

Некоторые математические модели упругопластических процессов сложного нагружения

Молодцов И.Н., Бабаева Д.О.

В рамках теории упругопластических процессов А.А.Ильюшина [1], в [3] для математического моделирования процессов сложного нагружения использовано квазилинейное определяющее уравнение с тремя функционалами состояния. Калибровка определяющих функционалов там проведена с использованием экспериментальных результатов [4] (Р.А.Васин и др.) по трехмерным винтовым траекториям деформаций. Выяснилось, что отклик на винтовую траекторию деформации принимает, по исчерпанию некоторого следа запаздывания, вполне определенную форму предельного режима. Поэтому для произвольных трехмерных процессов деформации в [2] предлагалось последовательно аппроксимировать траектории деформации отрезками винтовых линий, на которых вычислять определяющие функционалы по уравнениям предельных режимов. Тогда на траекториях указанного вида реализуется соответствие геометрии траектории деформаций форме отклика. Это соответствие по А.А.Ильюшину назовем теоремой изоморфизма, уточняя для процессов высокой размерности уравнения самих винтовых сплайнов в пространстве деформаций и форм отклика. Принятый в [2] алгоритм относился исключительно к трехмерным траекториям и базировался на использовании смешанного пространственного базиса, включающего, помимо традиционных в определяющих соотношениях векторов (направляющих векторов напряжений и скоростей деформаций), еще и сам направляющий вектор деформаций. Здесь рассматриваются варианты модификации общей теории, годные для описания произвольных процессов нагружения с траекториями деформаций любой размерности. В качестве репера во всех новых теориях использованы направляющий вектор напряжений и векторы, построенные на основе векторов естественного сопровождающего репера Френе. Поскольку далее рассматриваются процессы деформации высокой размерности, то растет чис-

ло определяющих функционалов и несколько усложняются методы их идентификации.

Ключевые слова: пластичность, пластические деформации, сложное нагружение, определяющие соотношения, идентификация функционалов, теорема изоморфизма

Основная идея.

Рассматриваются процессы сложного упругопластического нагружения материалов. Для описания их свойств вводятся пятимерные евклидовы пространства векторов–девиаторов напряжений и деформаций. Процесс деформации характеризуется в пространстве пятимерной кривой, в каждой точке которой изображается реакция или отклик материала на деформацию в виде вектора напряжений. Пусть $\bar{\sigma}$ и $\bar{\varepsilon}$ обозначают согласованные пары пятимерных векторов напряжений и деформаций, построенные на базе девиаторов соответствующих тензоров. В [2] векторы напряжений и деформаций связываются между собой определяющими уравнениями:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = Q \frac{d\bar{\varepsilon}}{ds} + (P - Q) \left(\frac{d\bar{\varepsilon}}{ds}, \bar{n}_\sigma \right) + (N - Q) \left(\frac{d\bar{\varepsilon}}{ds}, \bar{n}'_\varepsilon \right) \bar{n}'_\varepsilon, \quad (1)$$

$$\bar{n}'_\varepsilon \equiv \frac{\bar{n}_\varepsilon - (\bar{n}_\sigma, \bar{n}_\varepsilon) \bar{n}_\sigma}{\sqrt{\Psi}}, \quad \Psi \equiv 1 - (\bar{n}_\sigma, \bar{n}_\varepsilon)^2,$$

в которых P, N, Q - функционалы процесса деформаций, s - длина дуги траектории деформаций. Другой формой (1) является эквивалентное представление скорости изменения напряжений в ортонормированном репере из трех векторов, связанных с направляющими векторами напряжений, деформаций и скоростей деформаций:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = Q \left(\frac{d\bar{\varepsilon}}{ds} - \bar{n}_\sigma \left(\bar{n}_\sigma, \frac{d\bar{\varepsilon}}{ds} \right) - \bar{n}'_\varepsilon \left(\bar{n}'_\varepsilon, \frac{d\bar{\varepsilon}}{ds} \right) \right) + P \bar{n}_\sigma \left(\bar{n}_\sigma, \frac{d\bar{\varepsilon}}{ds} \right) + N \bar{n}'_\varepsilon \left(\bar{n}'_\varepsilon, \frac{d\bar{\varepsilon}}{ds} \right).$$

Рассмотрение уравнения (1) в пятимерном пространстве, где

$$\bar{n}_\sigma = \cos \theta_1 \bar{n}_1 - \sin \theta_1 (\cos \theta_2 \bar{n}_2 - \sin \theta_2 (\cos \theta_3 \bar{n}_3 - \sin \theta_3 (\cos \theta_4 \bar{n}_4 - \sin \theta_4 \bar{n}_5))),$$

$$\bar{n}_\varepsilon = \cos \varphi_1 \bar{n}_1 - \sin \varphi_1 (\cos \varphi_2 \bar{n}_2 - \sin \varphi_2 (\cos \varphi_3 \bar{n}_3 - \sin \varphi_3 (\cos \varphi_4 \bar{n}_4 - \sin \varphi_4 \bar{n}_5))),$$

приводит к векторному определяющему уравнению

$$\bar{n}_\sigma \dot{} = \frac{Q}{\sigma} (\bar{n}_1 - \cos \theta_1 \bar{n}_\sigma) + \frac{N_1}{\sigma} \sin \theta_1 (\bar{n}_\varepsilon - (\bar{n}_\sigma, \bar{n}_\varepsilon) \bar{n}_\sigma). \quad (2)$$

Это следует из того, что эквивалентная (2) система уравнений для углов в представлении направляющего вектора напряжений в репере Френе:

$$\begin{cases} \theta_1 = \kappa_1 \cos \theta_2 - \frac{Q}{\sigma} \sin \theta_1 - \frac{N_1}{\sigma} \sin \theta_1 \Delta_{14}, \\ \theta_2 = \kappa_2 \cos \theta_3 - \kappa_1 \frac{\cos \theta_1}{\sin \theta_1} \sin \theta_2 - \frac{N_1}{\sigma} \sin \varphi_1 \Delta_{24}, \\ \theta_3 = \kappa_3 \cos \theta_4 - \kappa_2 \frac{\cos \theta_2}{\sin \theta_2} \sin \theta_3 - \frac{N_1}{\sigma} \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \Delta_{34}, \\ \theta_4 = \kappa_4 - \kappa_3 \frac{\cos \theta_3}{\sin \theta_3} \sin \theta_4 - \frac{N_1}{\sigma} \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \Delta_{44}, \end{cases} \quad (3)$$

содержит в качестве определяющих функционалов именно Q и N_1 . Здесь и далее точка над величиной обозначает производную величины по длине дуги траектории деформаций, а также приняты обозначения:

$$\begin{aligned} \Delta_{14} &\equiv \sin \theta_1 \cos \varphi_1 - \cos \theta_1 \sin \varphi_1 (\cos \theta_2 \cos \varphi_2 + \sin \theta_2 \sin \varphi_2 (\cos \theta_3 \cos \varphi_3 + \\ &\quad + \sin \theta_3 \sin \varphi_3 (\cos \theta_4 \cos \varphi_4 + \sin \theta_4 \sin \varphi_4))) \\ \Delta_{24} &\equiv \sin \theta_2 \cos \varphi_2 - \cos \theta_2 \sin \varphi_2 (\cos \theta_3 \cos \varphi_3 + \\ &\quad + \sin \theta_3 \sin \varphi_3 (\cos \theta_4 \cos \varphi_4 + \sin \theta_4 \sin \varphi_4)) \\ \Delta_{34} &\equiv \sin \theta_3 \cos \varphi_3 - \cos \theta_3 \sin \varphi_3 (\cos \theta_4 \cos \varphi_4 + \sin \theta_4 \sin \varphi_4) \\ \Delta_{44} &\equiv \sin \theta_4 \cos \varphi_4 - \cos \theta_4 \sin \varphi_4 \end{aligned}$$

Система уравнений (3) определяет смысл функционалов Q и N_1 , как функционалов, регулирующих скорости изменения первого и второго углов. На примере уравнения (1), в [3] для трехмерных траекторий деформации проведена калибровка определяющих функционалов и предложен вариант термомеханики упругопластических процессов. Изложенная там теория вполне подходит для описания упругопластических процессов и хорошо соответствует имеющимся экспериментам. При усложнении теории требуется увеличение числа векторов основного репера в ответ на увеличение размерности траектории процесса. В самом общем случае максимальное число определяющих функционалов может достигать пяти. Для выполнения свойства объективности определяющих соотношений далее исключаются из рассмотрения реперы, прямо содержащие векторы деформации. Тогда вполне естественной выглядит конструкция ортонормированных реперов из направляющего вектора напряжений и векторов, построенных на базе векторов пятимерного репера Френе.

Новые определяющие реперы и уравнения.

1. В пятимерном пространстве выбираем базовую систему векторов $\bar{n}_\sigma, \bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3, \bar{n}_4$ и строим на ее основе ортонормированный репер:

$$\begin{aligned}
\bar{n}_\sigma, \bar{n}'_1 &\equiv \frac{\bar{n}_1 - \cos \theta_1 \bar{n}_\sigma}{\sin \theta_1}, \\
\bar{n}'_2 &\equiv \frac{\bar{n}_2 - (\bar{n}_2, \bar{n}_\sigma) \bar{n}_\sigma - (\bar{n}_2, \bar{n}'_1) \bar{n}'_1}{\sin \theta_2}, \\
\bar{n}'_3 &\equiv \frac{\bar{n}_3 - (\bar{n}_3, \bar{n}_\sigma) \bar{n}_\sigma - (\bar{n}_3, \bar{n}'_1) \bar{n}'_1 - (\bar{n}_3, \bar{n}'_2) \bar{n}'_2}{\sin \theta_3}, \\
\bar{n}'_4 &\equiv \frac{\bar{n}_4 - (\bar{n}_4, \bar{n}_\sigma) \bar{n}_\sigma - (\bar{n}_4, \bar{n}'_1) \bar{n}'_1 - (\bar{n}_4, \bar{n}'_2) \bar{n}'_2 - (\bar{n}_4, \bar{n}'_3) \bar{n}'_3}{\sin \theta_4}. \quad (4)
\end{aligned}$$

По аналогии с (1) записываем определяющее уравнение в виде:

$$\bar{n}_\sigma \dot{=} \frac{Q}{\sigma} \sin \theta_1 \bar{n}'_1 + \frac{F}{\sigma} \sin \theta_2 \bar{n}'_2 + \frac{U}{\sigma} \sin \theta_3 \bar{n}'_3 + \frac{W}{\sigma} \sin \theta_4 \bar{n}'_4. \quad (5)$$

с пятью определяющими функционалами Q, F, U, W и скрытым в (5) функционалом P , отвечающим за скалярные свойства материала. Эквивалентная уравнениям (5) система уравнений для углов:

$$\begin{cases} \theta_1 = \kappa_1 \cos \theta_2 - \frac{Q}{\sigma} \sin \theta_1, \\ \theta_2 = \kappa_2 \cos \theta_3 - \kappa_1 \frac{\cos \theta_1}{\sin \theta_1} \sin \theta_2 + \frac{F \sin \theta_2}{\sigma \sin \theta_1}, \\ \theta_3 = \kappa_3 \cos \theta_4 - \kappa_2 \frac{\cos \theta_2}{\sin \theta_2} \sin \theta_3 - \frac{U}{\sigma} \frac{\sin \theta_3}{\sin \theta_1 \sin \theta_2}, \\ \theta_4 = \kappa_4 - \kappa_3 \frac{\cos \theta_3}{\sin \theta_3} \sin \theta_4 + \frac{W}{\sigma} \frac{\sin \theta_4}{\sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3}. \end{cases} \quad (6)$$

2. Для трехмерных процессов сложного нагружения

$$\bar{n}_\sigma = \cos \theta_1 \bar{n}_1 - \sin \theta_1 (\cos \theta_2 \bar{n}_2 - \sin \theta_2 \bar{n}_3).$$

В зависимости от выбора основного репера получим разные определяющие уравнения и соответствующие им системы уравнений для углов:

2.1.

$$\begin{aligned}
&\{\bar{n}_\sigma, \bar{n}'_1, \bar{n}'_2\} : \\
&\bar{n}_\sigma \dot{=} \frac{Q}{\sigma} \sin \theta_1 \bar{n}'_1 + \frac{F}{\sigma} \sin \theta_2 \bar{n}'_2, \quad (7)
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \theta_1 \dot{=} \kappa_1 \cos \theta_2 - \frac{Q}{\sigma} \sin \theta_1, \\ \theta_2 \dot{=} \kappa_2 - \kappa_1 \frac{\cos \theta_1}{\sin \theta_1} \sin \theta_2 + \frac{F \sin \theta_2}{\sigma \sin \theta_1}, \end{cases} \quad (7.1)$$

2.2.

$$\begin{aligned}
&\{\bar{n}_\sigma, \bar{n}'_1, \bar{n}'_\varepsilon\} : \\
&\bar{n}_\sigma \dot{=} \frac{Q}{\sigma} \sin \theta_1 \bar{n}'_1 + \frac{N_1}{\sigma} \sin \theta_1 \bar{n}'_\varepsilon. \quad (8)
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \theta_1 \dot{} = \kappa_1 \cos \theta_2 - \frac{Q}{\sigma} \sin \theta_1 - \frac{N_1}{\sigma} \sin \theta_1 \Delta, \\ \theta_2 \dot{} = \kappa_2 - \kappa_1 \frac{\cos \theta_1}{\sin \theta_1} \sin \theta_2 - \frac{N_1}{\sigma} \sin \varphi_1 \sin(\theta_2 - \varphi_2), \end{cases} \quad (8.1)$$

$$\Delta \equiv \sin \theta_1 \cos \varphi_1 - \cos \theta_1 \sin \varphi_1 \cos(\theta_2 - \varphi_2).$$

Калибровка определяющих функционалов Вопрос калибровки определяющих функционалов на произвольных процессах деформаций решается однотипно для изображающих пространств и траекторий любой размерности. Он осуществляется в четыре этапа:

1. Этап первый: по уравнению кривой деформации определяем скалярные характеристики траектории в данной точке (кривизна и крутки);
2. Этап второй: приближаем траектории деформаций сплайнами в виде отрезков винтовых линий соответствующей размерности;
3. Этап третий: определяем формы отклика из теоремы изоморфизма и калибруем параметры отклика;
4. Этап четвертый: на данном отрезке по форме отклика из системы уравнений для углов находим определяющие функционалы и т.д.

Пример.

Трехмерное пространство. Рассмотрим трехмерный процесс деформаций с заданной траекторией.

Сплайн. В любой точке траектории деформаций с заданными на ней скалярными характеристиками уравнения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_{10} + c \cos \alpha, \quad \varepsilon_3 = c \sin \alpha, \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_{20} + a \left(\frac{\alpha}{2\pi} + (m - 1) \right), \end{aligned} \quad (8.2)$$

$$\varepsilon_{20} \equiv \frac{\varepsilon_{10} + c}{\sqrt{3}}, \quad c \equiv \frac{\kappa_1}{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}, \quad a \equiv \frac{2\pi\kappa_2}{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}, \quad a_1 \equiv \frac{\kappa_2}{\sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}}$$

определяют сплайн в виде винтовой линии, проходящей через точку начала траектории с параметрами (кривизной и кручением), совпадающими с параметрами траектории деформации в начальной точке.

Параметры отклика. На основании экспериментальных данных [4] в [3] была установлена форма отклика на траекторию деформации (8.2) с четырьмя параметрами, неизвестным образом зависящими от характеристик сплайна:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{10} + R \cos \beta, \quad \sigma_3 = \sigma_{30} + R \sin \beta, \quad \beta \equiv \alpha + \alpha_0, \\ \sigma_2 &= \sqrt{\sigma(s)^2 - \sigma_1^2 - \sigma_2^2}, \quad \sigma(s) = \sigma_0 + G' s. \end{aligned} \quad (9)$$

В трехмерном случае соотношения (8.2) и (9) задают изоморфизм пространств деформаций и напряжений.

Формулы для функционалов. Имеют место следующие аналитические представления векторных характеристик процесса через параметры траектории деформаций и отклика:

$$\begin{aligned}\cos \theta_1 &= \frac{\kappa_1}{\sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}} \frac{\sigma_{30} \cos \alpha - \sigma_{10} \sin \alpha + R \sin \alpha_0}{\sigma} + a_1 \frac{\sigma_2}{\sigma}, \\ \cos \theta_2 &= \frac{\sigma_{10} \cos \alpha + \sigma_{30} \sin \alpha + R \cos \alpha_0}{\sigma \sin \theta_1}.\end{aligned}\quad (10)$$

Преобразуем уравнения (7.1) с учетом формул (10). В итоге получим систему линейных алгебраических уравнений для определяющих функционалов процесса:

$$\begin{aligned}\frac{Q}{\sigma} \sin^2 \theta_1 &= \frac{\kappa_2}{\sigma \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}} \left(\sigma_2 - \frac{\sigma_2}{\sigma} \sigma \right) + \frac{R}{\sigma} \cos \alpha_0 - \\ &\quad - \frac{\kappa_1}{\sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}} \frac{\sigma_{30} \cos \alpha - \sigma_{10} \sin \alpha + R \sin \alpha_0}{\sigma^2} \sigma, \\ \cos \theta_2 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma} - \frac{Q}{\sigma} \cos \theta_1 \right) &- \frac{\sigma_{30} \cos \alpha - \sigma_{10} \sin \alpha}{\sigma \sin \theta_1} \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2} = \\ &= \kappa_2 \sin \theta_2 - \kappa_1 \frac{\cos \theta_1}{\sin \theta_1} + \frac{F \sin^2 \theta_2}{\sigma \sin \theta_1}.\end{aligned}$$

Пятимерное пространство. В этом случае уравнение сплайна строим в виде пятимерного винта. В [1] в пятимерном пространстве решена задача построения траектории с постоянными кривизнами. Решение задачи выписано в репере, который не является ортогональным. Это решение приводим к ортонормированному реперу Френе начальной точки траектории. Результат в виде трехчленного пятимерного винта дается формулой:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\kappa_2 \kappa_4}{k_1^2 k_2^2} s \begin{pmatrix} \kappa_2 \kappa_4 \\ 0 \\ \kappa_1 \kappa_4 \\ 0 \\ \kappa_1 \kappa_3 \end{pmatrix} + \frac{\kappa_1}{k_1^2 (k_1^2 - k_2^2)} \begin{pmatrix} -\kappa_1 (k_2^2 - \kappa_1^2 - \kappa_2^2) \frac{\sin k_1 s}{k_1} \\ -(k_2^2 - \kappa_1^2 - \kappa_2^2) (1 - \cos k_1 s) \\ \kappa_2 (\kappa_4^2 - k_1^2) \frac{\sin k_1 s}{k_1} \\ -\kappa_2 \kappa_3 (1 - \cos k_1 s) \\ \kappa_2 \kappa_3 \kappa_4 \frac{\sin k_1 s}{k_1} \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{\kappa_1}{k_2^2(k_1^2 - k_2^2)} \begin{pmatrix} \kappa_1(k_1^2 - \kappa_1^2 - \kappa_2^2) \frac{\sin k_2 s}{k_2} \\ (k_1^2 - \kappa_1^2 - \kappa_2^2)(1 - \cos k_2 s) \\ -\kappa_2(\kappa_4^2 - k_2^2) \frac{\sin k_2 s}{k_2} \\ \kappa_2 \kappa_3 (1 - \cos k_2 s) \\ -\kappa_2 \kappa_3 \kappa_4 \frac{\sin k_2 s}{k_2} \end{pmatrix},$$

в которую входят кривизны траектории, а также две функции кривизн, см.[1]:

$$\begin{aligned} k_1^2 &= \frac{1}{2} (\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \kappa_4^2 + \\ &+ \sqrt{(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \kappa_4^2)^2 - 4(\kappa_1^2 \kappa_3^2 + \kappa_2^2 \kappa_4^2 + \kappa_1^2 \kappa_4^2)}) \\ k_2^2 &= \frac{1}{2} (\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \kappa_4^2 - \\ &- \sqrt{(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \kappa_4^2)^2 - 4(\kappa_1^2 \kappa_3^2 + \kappa_2^2 \kappa_4^2 + \kappa_1^2 \kappa_4^2)}). \end{aligned}$$

В результате тождественных преобразований трехчленной формулы пятимерного винта получается пятичленное представление:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= p_1 \frac{\kappa_1}{k_1^2(k_1^2 - k_2^2)} \{\bar{\varepsilon}_1(-1 + \cos k_1 s) + \bar{\varepsilon}_3 \sin k_1 s\} + s \frac{\kappa_2 \kappa_4}{k_1 k_2} \bar{\varepsilon}_2 + \\ &+ p_4 \frac{\kappa_1}{k_2^2(k_1^2 - k_2^2)} \{\bar{\varepsilon}_4(-1 + \cos k_2 s) + \bar{\varepsilon}_5 \sin k_2 s\} \end{aligned} \quad (11)$$

с известным образом зависящими от кривизн траектории функциями p_1, p_4 .

Значит, в специальном ортонормированном репере $\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_3, \bar{\varepsilon}_4, \bar{\varepsilon}_5$ уравнение пятимерного винта имеет представление подобное трехмерному винту (8.2). Что касается самого репера, то, как видно, он определяется только внутренней геометрией траектории.

Указанное обстоятельство позволяет постулировать подобную (9) форму для отклика на траекторию деформаций в виде пятимерной винтовой линии:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_{10} + R_1 \cos \beta, \beta \equiv k_1 s + \beta_0, \\ \sigma_3 = \sigma_{30} + R_1 \sin \beta, \\ \sigma_4 = \sigma_{40} + R_2 \cos \gamma, \gamma \equiv k_2 s + \gamma_0, \\ \sigma_5 = \sigma_{50} + R_2 \sin \gamma, \\ \sigma_2 = \sqrt{\sigma^2 - \sigma_1^2 - \sigma_3^2 - \sigma_4^2 - \sigma_5^2}. \end{cases} \quad (12)$$

Подчеркнем, что отличие этого представления от (9) в том, что форма отклика для трехмерных винтовых траекторий была выбрана в [3] на основе анализа результатов обработки экспериментальных данных [4], тогда как соотношение (12) представляет собой формулировку теоремы изоморфизма для пятимерных траекторий деформации. В четырехмерном или двумерном пространствах деформаций секулярные члены в уравнениях винтов (11) равны нулю и это обстоятельство соответствующим образом корректирует и формы отклика двумерных и четырехмерных процессов деформации..

Калибровка параметров отклика.

Оценка параметров (9) или (12) проводится по уравнению:

$$\bar{\sigma} \cdot = Q\bar{n}_1 + \left(\frac{d\sigma}{ds} - Q \cos \theta_1 \right) \bar{n}_\sigma,$$

которое является трехчленной формулой А.А.Ильюшина, и его вполне можно считать 0-приближением всех рассматриваемых здесь уравнений (5),(7),(8), с использованием формулы

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 = c_1 k_1 \frac{\sigma_{30} \cos k_1 s - \sigma_{10} \sin k_1 s + R_1 \sin \beta_0}{\sigma} + \\ + c_2 k_2 \frac{\sigma_{50} \cos k_2 s - \sigma_{40} \sin k_2 s + R_2 \sin \gamma_0}{\sigma} + a_1 \frac{\sigma_2}{\sigma}. \end{aligned} \quad (13)$$

В этом приближении пренебрегаем малыми величинами порядка $\sigma_{10}/\sigma, \dots, \sigma_{50}/\sigma$, (это следовало в трехмерном случае из анализа экспериментальных данных [4]) и записываем с учетом (12) первое, третье, четвертое и пятое уравнения 0-приближения. Получаем систему из 4 независимых уравнений для 4 неизвестных параметров отклика ($R_1, R_2, \beta_0, \gamma_0$):

$$\begin{aligned} R_1 = \frac{c_1}{\lambda} \sigma \cos \beta_0, R_2 = \frac{c_2}{\lambda} \sigma \cos \gamma_0, k_1 \operatorname{tg} \beta_0 = k_2 \operatorname{tg} \gamma_0, \\ \operatorname{tg}^5 \beta_0 + \operatorname{tg}^4 \beta_0 \frac{1}{k_1} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{ds} - \frac{a_1}{\lambda} \right) + \operatorname{tg}^3 \beta_0 \left(\frac{k_2^2}{k_1^2} + 1 - \frac{c_1^2}{\lambda^2} - \frac{c_2^2 k_2^2}{\lambda^2 k_1^2} \right) + \\ + \operatorname{tg}^2 \beta_0 \frac{1}{k_1} \left(\frac{k_2^2}{k_1^2} + 1 \right) \left(\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{ds} - \frac{a_1}{\lambda} \right) + \operatorname{tg} \beta_0 \frac{k_2^2}{k_1^2} \left(1 - \frac{c_1^2 + c_2^2}{\lambda^2} \right) + \\ + \frac{1}{k_1} \frac{k_2^2}{k_1^2} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{ds} - \frac{a_1}{\lambda} \right) = 0, \frac{1}{\lambda} \equiv \frac{Q}{\sigma}. \end{aligned} \quad (14)$$

При $k_2 = 0, c_2 = 0$ отсюда следуют характеристики отклика трехмерного процесса деформаций:

$$R_1 = \frac{c_1}{\lambda} \sigma \cos \beta_0,$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg}^3 \beta_0 + \operatorname{tg}^2 \beta_0 \frac{1}{k_1} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{ds} - \frac{a_1}{\lambda} \right) + \\ & + \operatorname{tg} \beta_0 \left(1 - \frac{c_1^2}{\lambda^2} \right) + \frac{1}{k_1} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{ds} - \frac{a_1}{\lambda} \right) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Параметры $\sigma_{10}, \sigma_{20}, \sigma_{30}, \sigma_{40}, \sigma_{50}$, в 0-приближении остаются неопределенными. Итерационная процедура для нахождения этих параметров в трехмерном случае изложена в [2] вместе с примером реализации для процессов в виде трехмерных винтовых линий. Найденные там значения этих параметров уже в 1-приближении соответствуют экспериментальным данным.

Все предложенные выше подходы были реализованы на пятимерных процессах деформаций с траекториями деформаций в виде пятимерных винтовых линий после одноосного нагружения. Мы взяли реальные эксперименты из [4] на трехмерных винтах и на их основе построили пятимерные траектории деформаций, сохранив для них те же самые номера, что были в прототипах.

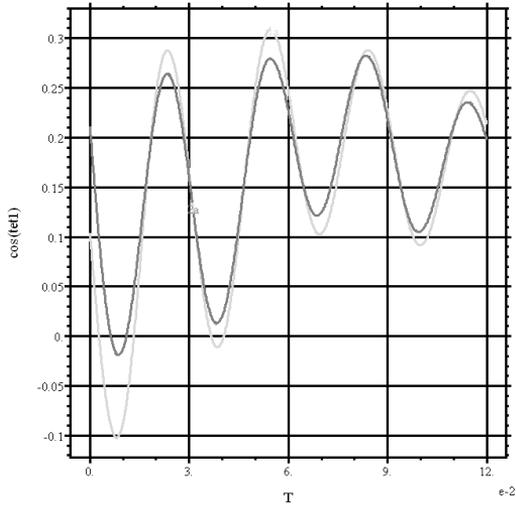
Таблица параметров рассмотренных пятимерных процессов деформаций.

Nexp	κ_1	κ_2	κ_3	κ_4	σ_{10}	σ_{30}	σ_{40}	σ_{50}	λ
25	333	666	200	200	70	30	10	10	0.005
27	100	200	50	50	50	50	70	10	0.008
29	200	200	50	50	70	50	-20	50	0.008
31	200	60	60	60	70	30	10	100	0.08
35	200	400	100	100	70	30	10	70	0.01

Результаты некоторых расчетов приводятся ниже.

Experiment -5D-31

07:34:53 5/21/18
FlexPDE 5.0.17



HISTORY

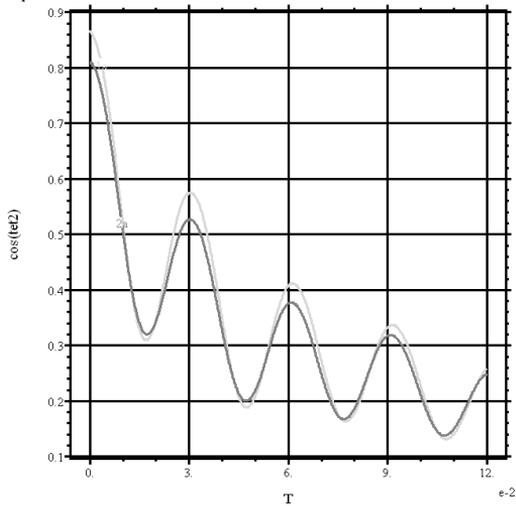
- 1: cos(tet1)
- 2: cote1



Solve 5D: Cycle=828 Time= 0.1200 dt= 1.8735e-4 P2 Nodes=9 Cells=2 RMS Err= 2.e-18

Experiment -5D-31

07:34:53 5/21/18
FlexPDE 5.0.17



HISTORY

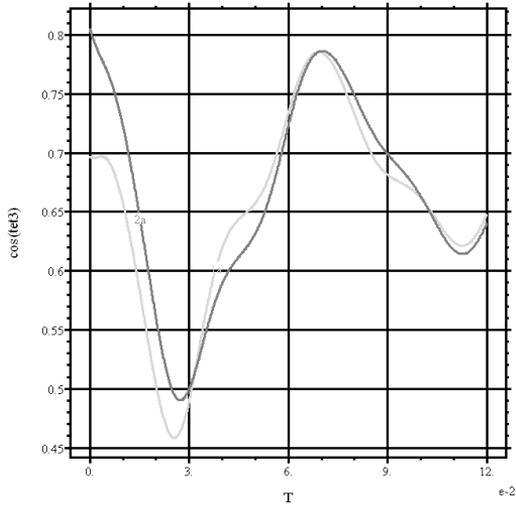
- 1: cos(tet2)
- 2: cote2



Solve 5D: Cycle=828 Time= 0.1200 dt= 1.8735e-4 P2 Nodes=9 Cells=2 RMS Err= 2.e-18

Experiment -5D-31

07:34:53 5/21/18
FlexPDE 5.0.17



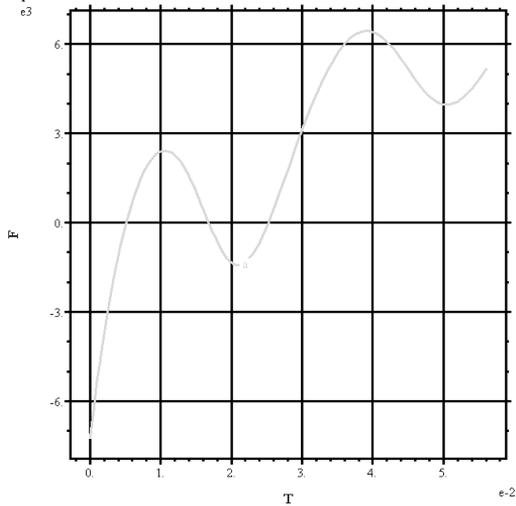
HISTORY
1: cos(5t3)
2: cote3



Solve 5D: Cycle=828 Time= 0.1200 dt= 1.8735e-4 P2 Nodes=9 Cells=2 RMS Err= 2.e-18

Experiment 27-3D

07:10:38 5/21/18
FlexPDE 5.0.17



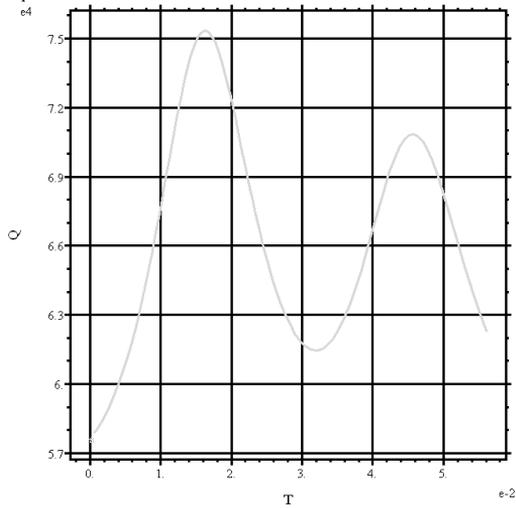
HISTORY
1: F



Solve1 3D: Cycle=108 Time= 0.0561 dt= 8.6779e-4 P2 Nodes=9 Cells=2 RMS Err= 1.e-12

Experiment 27-3D

07:10:38 5/21/18
FlexPDE 5.0.17



HISTORY

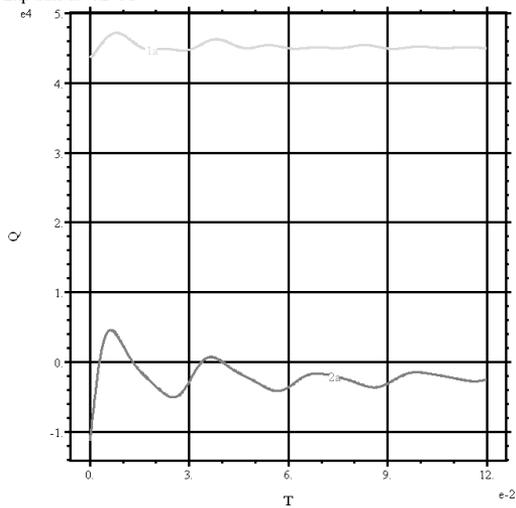
1: Q



Solve1 3D: Cycle=108 Time= 0.0561 dt= 8.6779e-4 P2 Nodes=9 Cells=2 RMS Err= 1.e-12

Experiment -5D-31

07:41:23 5/21/18
FlexPDE 5.0.17



HISTORY

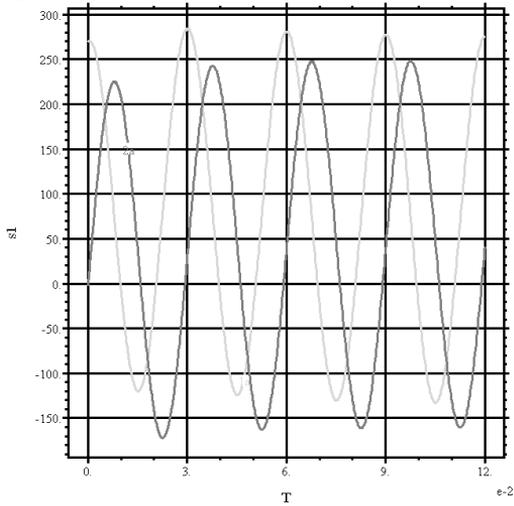
1: Q
2: F



Solve 5D: Cycle=828 Time= 0.1200 dt= 1.8735e-4 P2 Nodes=9 Cells=2 RMS Err= 2.e-18

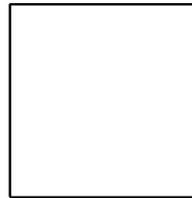
Experiment -5D-31

07:34:53 5/21/18
FlexPDE 5.0.17



HISTORY

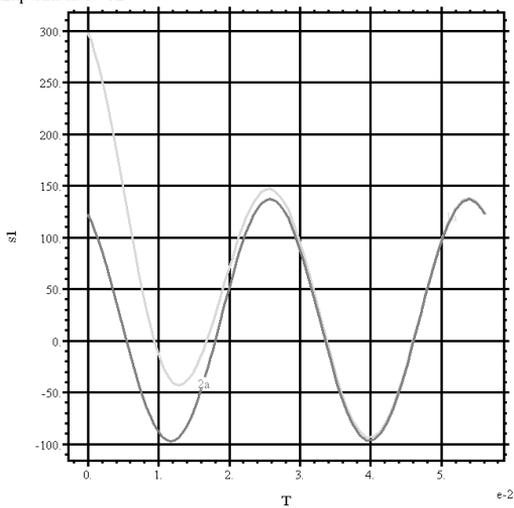
- 1: s1
- 2: s3



Solve 5D: Cycle=828 Time= 0.1200 dt= 1.8735e-4 P2 Nodes=9 Cells=2 RMS Err= 2.e-18

Experiment 27-3D

07:10:38 5/21/18
FlexPDE 5.0.17



HISTORY

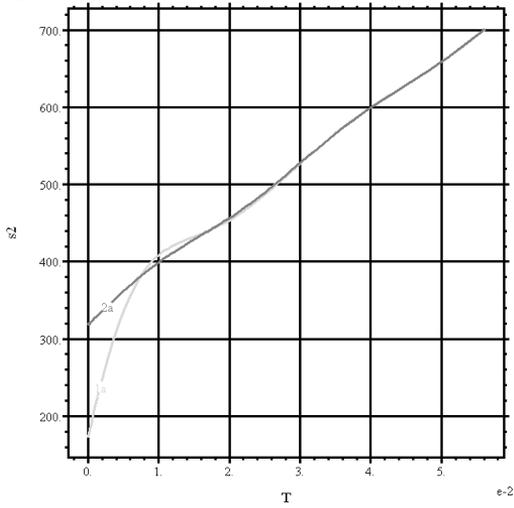
- 1: s1
- 2: sig1



Solve1 3D: Cycle=108 Time= 0.0561 dt= 8.6779e-4 P2 Nodes=9 Cells=2 RMS Err= 1.e-12

Experiment 27-3D

07:10:38 5/21/18
FlexPDE 5.0.17



HISTORY

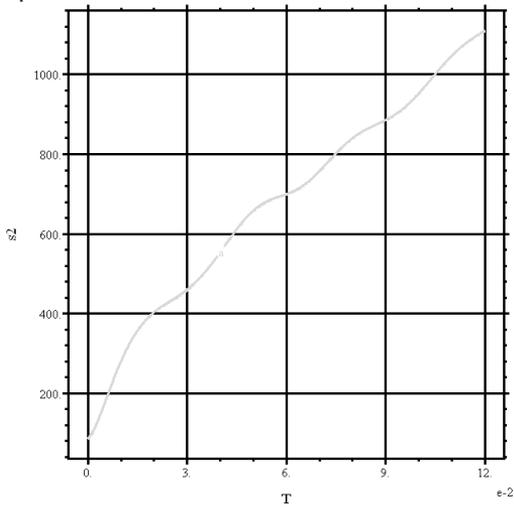
- 1: s2
- 2: sig2



Solve1 3D: Cycle=108 Time= 0.0561 dt= 8.6779e-4 P2 Nodes=9 Cells=2 RMS Err= 1.e-12

Experiment -5D-31

07:34:53 5/21/18
FlexPDE 5.0.17



HISTORY

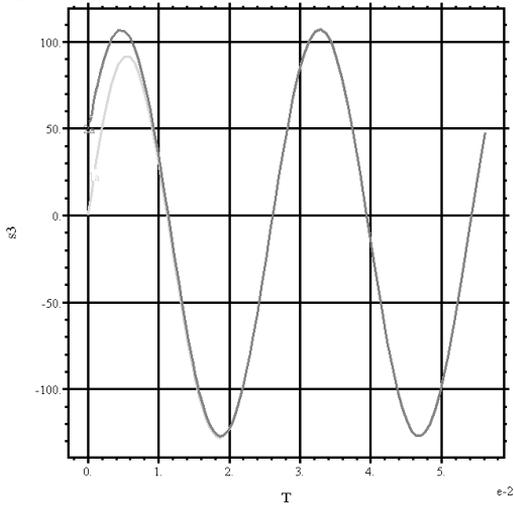
- 1: s2



Solve 5D: Cycle=828 Time= 0.1200 dt= 1.8735e-4 P2 Nodes=9 Cells=2 RMS Err= 2.e-18

Experiment 27-3D

07:10:38 5/21/18
FlexPDE 5.0.17



HISTORY

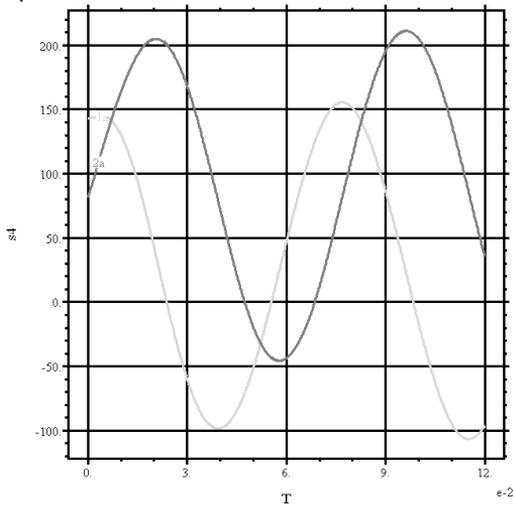
- 1: s3
- 2: sig3



Solve1 3D: Cycle=108 Time= 0.0561 dt= 8.6779e-4 P2 Nodes=9 Cells=2 RMS Err= 1.e-12

Experiment -5D-31

07:34:53 5/21/18
FlexPDE 5.0.17



HISTORY

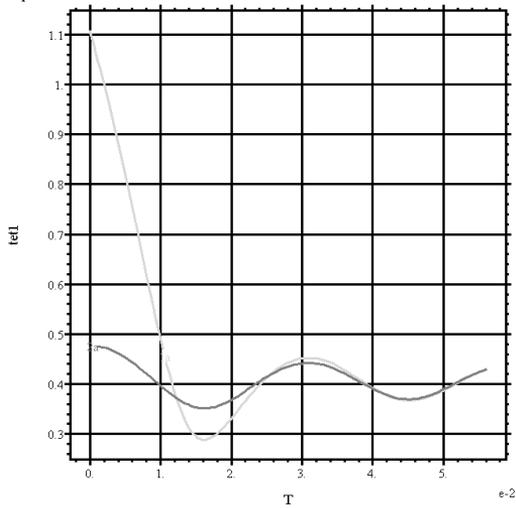
- 1: s4
- 2: s5



Solve 5D: Cycle=828 Time= 0.1200 dt= 1.8735e-4 P2 Nodes=9 Cells=2 RMS Err= 2.e-18

Experiment 27-3D

07:10:38 5/21/18
FlexPDE 5.0.17



HISTORY

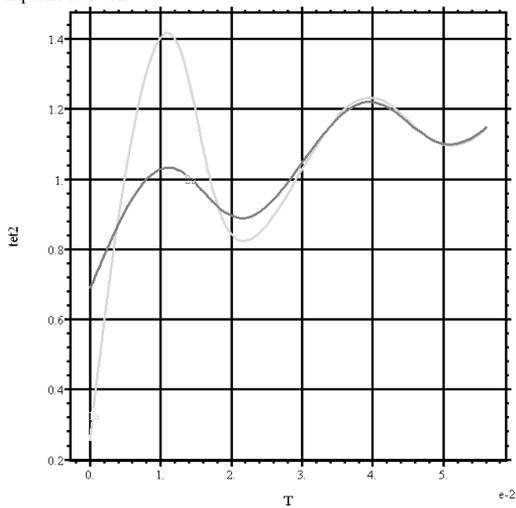
- 1: tet1
- 2: arccos(cote1)



Solve1 3D: Cycle=108 Time= 0.0561 dt= 8.6779e-4 P2 Nodes=9 Cells=2 RMS Err= 1.e-12

Experiment 27-3D

07:10:38 5/21/18
FlexPDE 5.0.17



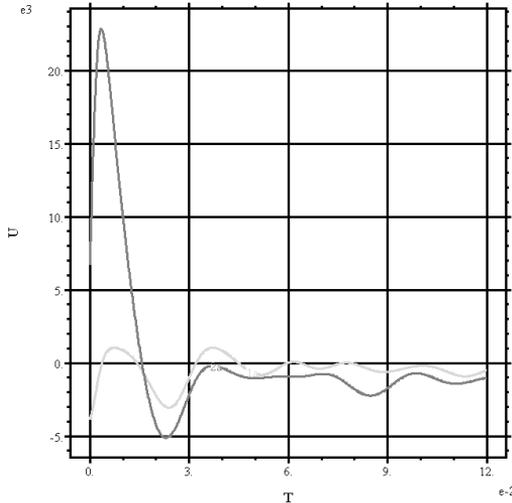
HISTORY

- 1: tet2
- 2: arccos(cote2)



Solve1 3D: Cycle=108 Time= 0.0561 dt= 8.6779e-4 P2 Nodes=9 Cells=2 RMS Err= 1.e-12

Experiment -5D-31
e3



07:41:23 5/21/18
FlexPDE 5.0.17

HISTORY
1: U
2: W

Solve 5D: Cycle=828 Time= 0.1200 dt= 1.8735e-4 P2 Nodes=9 Cells=2 RMS Err= 2.e-18

Список литературы

- [1] Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории // Изд-во АН СССР, Москва,-1963,- 272 с.
- [2] Молодцов И.Н., Бабаева Д.О. Некоторые вопросы верификации теории упругопластических процессов при сложном нагружении// Проблемы машиностроения и автоматизации, Москва, -2016, -№3, -с.98-105.
- [3] Молодцов И.Н., Бабаева Д.О. О роли функционалов пластичности в геометрическом истолковании диссипации и описании векторных свойств материала в процессах сложного нагружения// В сборнике Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 105-летию со дня рождения А.А.Ильюшина// Москва,-2016,-с.210-215.
- [4] Вавакин А.С., Васин Р.А., Викторов В.В., Широков Р.И. Экспериментальное исследование упругопластического деформирования стали при сложном нагружении по криволинейным пространственным траекториям деформаций. Деп. в ВИНТИ, 16.10.86, №7298-B86. 66с.

Some mathematical models of elastoplastic processes of complex loading

Molodtsov I.N., Babaeva D.O.

In the framework of the Ilyushin's theory of elastoplastic processes, in [3] for mathematical modeling of complex loading processes we use special type quasilinear equation with three state functionals. The functionals was calibrated using the experimental results [4] (R.A.Vasin, etc.) for 3D- helical trajectories of deformations. It turned out that the response on a helical trajectory of deformation takes a completely definite loading form, not exactly, but after the exhaustion of some trace of retard. On the helical trajectories of deformations the form of loading is the same: helical trajectory of deformations is becoming to helical trajectory of loading there and back. The used map preserves the geometry of space. This correspondence by Ilyushin is called as isomorphism theorem. All new theories use as the basis the directing vector of stresses and vectors constructed on the base of Frenet basis. For high-dimensional processes, the number of state functionals increases, so and the methods of their identification become more complicated. All models are completely verified. The results are given below.

Keywords: plasticity, plastic deformations, complex loading, state functional, identification of functionals, isomorphism theorem