Линейные автоматы над полем рациональных чисел

Ронжин Д.В.

Исследуется класс линейных автоматов над полем рациональных чисел. В указанном классе доказано отсутствие конечной K-полной системы, отсутствие конечных Σ полных с добавкой определенного вида систем, выделен бесконечный K-базис и бесконечный Σ-базис, а так же бесконечная Σ-полная система не содержащая Σ-базиса.

Ключевые слова: линейные автоматы, поле рациональных чисел, операции композиции, операции суперпозиции, K-замыкание, Σ-замыкание.

1. Введение

Настоящая работа посвящена классу линейных автоматов над полем рациональных чисел. Ранее, другими авторами [1-4] рассматривался класс линейных автоматов над конечными полями. В этих работах для рассматриваемого класса был использован аппарат формальных степенных рядов. Показано, что линейный автомат осуществляет преобразование таких рядов, и в терминах рядов были описаны операции композиции. Классическими проблемами теории автоматов являются проблемы выразимости и полноты по операциям композиции и суперпозиции (K и Σ соответственно)[5]. В настоящей работе для класса линейных автоматов над рациональными числами показано отсутствие конечной K-полной системы, найден бесконечный базис и бесконечная K-полная система, из которой нельзя выделить базис, получен бесконечный Σ-базис.

2. Используемые понятия и обозначения

Часть обозначений, используемых в этой работе введены в [1-4].

Будем обозначать множество рациональных чисел через $\mathbb{Q}$, а множество целых чисел через $\mathbb{Z}$.
Инициальным автоматом с n входами и m состояниями над полем рациональных чисел будем называть следующую упорядоченную шестерку:

$$V = (\mathbb{Q}^n, \mathbb{Q}^m, \mathbb{Q}, \vec{\varphi}, \psi, \vec{q_0}),\ \text{где}$$

1) $\mathbb{Q}^n$ - входной алфавит $\mathbb{Q}^m$ - алфавит состояний и $\mathbb{Q}$ - выходной алфавит автомата

2) $\vec{\varphi} = (\varphi_1, ..., \varphi_m)$, где $\varphi_i\colon \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}^m \to \mathbb{Q}$, $i \in [1, m]$ - функции переходов

3) $\psi\colon \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}^m \to \mathbb{Q}$ - функция выхода

4) $\vec{q_0} = (q_1^0, q_2^0, ..., q_m^0), q_i^0 \in \mathbb{Q}, i \in [1, m]$ - вектор начальных состояний.

Назовем *основной системой* **B** следующее бесконечное множество линейных автоматов над $\mathbb{Q}$:

$$\mathbf{B} = \{\xi_0, \xi_1, V_+, V_{\cdot c} | c \in \mathbb{Q}\},\ \text{где}$$

1) ξ_0 - задержка с нулевым начальным состоянием над $\mathbb{Q}$.

2) ξ_1 - задержка с единичным начальным состоянием над $\mathbb{Q}$.

3) V_+ - сумматор с двумя входами над $\mathbb{Q}$.

4) $V_{\cdot c}$ - автомат-умножитель на константу c с одним входом.

Для произвольного множества линейных автоматов V будем обозначать замыкание этого множества по операциям суперпозиции и композиции через $K[V]$ и $\Sigma[V]$ соответственно.
Множество *линейных автоматов* над полем рациональных чисел - $L(\mathbb{Q})$ определяется как:

$$L(\mathbb{Q}) = K[\mathbf{B}]$$

Множество всевозможных формальных степенных рядов с коэффициентами из $\mathbb{Q}$ с формальной переменной ξ будем обозначать следующим образом:

$$\mathbb{Q}_\xi^\infty = \{\alpha(\xi) = a_0 + a_1 \cdot \xi + a_2 \cdot \xi^2 + ... + a_k \cdot \xi^k + ... | a_i \in \mathbb{Q}, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

Для удобства записи, где возможно, будем обозначать ряд $\alpha(\xi)$ через α.

Операции сложения, вычитания и умножения формальных степенных рядов определяются покомпонентно.

Формальный степенной ряд $\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \xi^i \in \mathbb{Q}_{\xi}^{\infty}$ называется обратимым при условии $a_0 \neq 0$, (т.е. $\alpha(0) \neq 0$), и обратным к нему является ряд $\beta \in \mathbb{Q}_{\xi}^{\infty}$, такой что $\alpha \cdot \beta = 1$.

Будем называть множеством дробно-рациональных функций от переменной ξ с коэффициентами из поля рациональных чисел, со свободным членом в знаменателе отличным от нуля следующее множество:

$$\mathbf{R}(\mathbb{Q}) = \{\tfrac{P(\xi)}{Q(\xi)} | \text{ где } P(\xi), Q(\xi) \text{ - многочлены от } \xi \text{ над } \mathbb{Q}\text{,причем } (P(\xi), Q(\xi)) = 1 \text{ и } Q(0) \neq 0\}.$$

Скажем что $R = \frac{P(\xi)}{Q(\xi)} \in \mathbf{R}(\mathbb{Q})$ кратно ξ, если $P(\xi)$ делится на ξ без остатка как многочлен.

Несложно видеть, что элементы $\mathbf{R}(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}_{\xi}^{\infty}$, поскольку многочлены являются подмножеством формальных степенных рядов и знаменатели в указанных дробях - обратимы.

Пусть $V \in L(\mathbb{Q})$ - автомат с n входами из множества линейных автоматов над рациональными числами. Будем говорить, что на i-й вход автомата V подается степенной ряд $\alpha_i \in \mathbb{Q}_{\xi}^{\infty}$, $\alpha_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot \xi^j$, если $x_i(t) = a_t$, и ряд α_i будем называть *i-м входным рядом.*

Выходным рядом автомата V будем называть формальный степенной ряд $\beta \in Q_{\xi}^{\infty}$, $\beta = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \cdot \xi^j$, такой что $\psi(t) = b_t$. В таком случае V реализует отображение вида $V\colon (\mathbb{Q}_{\xi}^{\infty})^n \to \mathbb{Q}_{\xi}^{\infty}$.

Обозначим через $x_i(t) \in \mathbb{Q}$ значение, которое подается на i-й вход автомата V в момент времени t. Будем говорить, что автомат $V \in L(\mathbb{Q})$ *зависит от i-го входа непосредственным образом*, если выходная функция $y(t)$ автомата V существенным образом зависит от значения $x_i(t)$ в момент времени t для любого t. Нетрудно видеть, что отсутствие непосредственной зависимости i-го входа позволяет применять к нему операцию обратной связи.

Автомат $V \in L(\mathbb{Q})$ будем называть *константным автоматом* в случае, если его выходной ряд не зависит от входных значений. Последовательность выходных символов константного автомата будем называть *константным выходом.*

3. Вспомогательные утверждения

Нам понадобятся следующие леммы, которые мы приводим без доказательств.

Лемма 1. *Пусть $V \in L(\mathbb{Q})$ - линейный автомат с n входами, который реализует преобразование $V\colon (\mathbb{Q}_\xi^\infty)^n \to \mathbb{Q}_\xi^\infty$, и для некоторых $R_i \in \boldsymbol{R}(\mathbb{Q})$, при произвольных входных рядах $\alpha_i \in \mathbb{Q}_\xi^\infty, i \in [1,n]$ выходной ряд β имеет вид:*

$$\beta = R_0 + R_1 \cdot \alpha_1 + R_2 \cdot \alpha_2 + ... + R_n \cdot \alpha_n.$$

Тогда V не зависит от j-го входа непосредственным образом тогда и только тогда, когда R_j кратно ξ, $j \in [1,n]$.

Лемма 2. *Для всякого линейного автомата $V \in L(\mathbb{Q})$ с n входами существуют $R_i \in \boldsymbol{R}(\mathbb{Q}), i \in [0,n]$, такие что для любых входных рядов $\alpha_i \in \mathbb{Q}_\xi^\infty, i \in [1,n]$ выходной ряд $\beta \in \mathbb{Q}_\xi^\infty$ имеет вид:*

$$\beta = R_0 + R_1 \cdot \alpha_1 + R_2 \cdot \alpha_2 + ... + R_n \cdot \alpha_n,$$

Лемма 3. *Любой формальный степенной ряд вида*

$$\beta = a_0 + \textstyle\sum_{k=1}^\infty 0 \cdot \xi^t = a_0; a_0 \in \mathbb{Q}$$

реализуется некоторым константным автоматом без входа.

Лемма 4. *Пусть $f\colon (\mathbb{Q}_\xi^\infty)^n \to \mathbb{Q}_\xi^\infty$ и существуют такие P_i - многочлены от формальной переменной ξ над $\mathbb{Q}$, $0 \le i \le n$, что при любых $\alpha_i \in \mathbb{Q}_\xi^\infty, i \in [1,n]$ выполняется:*

$$f(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \beta = P_0 + P_1 \cdot \alpha_1 + P_2 \cdot \alpha_2 + ... + P_n \cdot \alpha_n.$$

Тогда существует $V \in L(\mathbb{Q})$ - линейный автомат с n входами, который реализует f, т.е. выходной ряд V совпадает с β при любых входных рядах α_i, $i \in [1,n]$.

Лемма 5. *Пусть $f\colon (\mathbb{Q}_\xi^\infty)^n \to \mathbb{Q}_\xi^\infty$ и существуют такие $R_i = \frac{P_i}{Q_i} \in \boldsymbol{R}(\mathbb{Q}), i \in [0,n]$, что при любых $\alpha_i \in \mathbb{Q}_\xi^\infty, i \in [1,n]$ выполняется:*

$$f(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \beta = R_0 + R_1 \cdot \alpha_1 + R_2 \cdot \alpha_2 + ... + R_n \cdot \alpha_n.$$

Тогда существует $V \in L(\mathbb{Q})$ - линейный автомат с n входами, который реализует отображение f.

Пример

Рассмотрим формальный степенной ряд, который представляет последовательность чисел Фибоначчи:

$$\alpha_F = 1 + 1 \cdot \xi + 2 \cdot \xi^2 + 3 \cdot \xi^3 + 5 \cdot \xi^4 + 8 \cdot \xi^5 ... + a_k \cdot \xi^k + ..., \text{ где}$$
$$a_k = a_{k-1} + a_{k-2}, k \geq 2$$

Нетрудно вычислить, что обратным к нему является ряд:

$$\tfrac{1}{\alpha_F} = 1 - \xi - \xi^2$$

Следовательно:

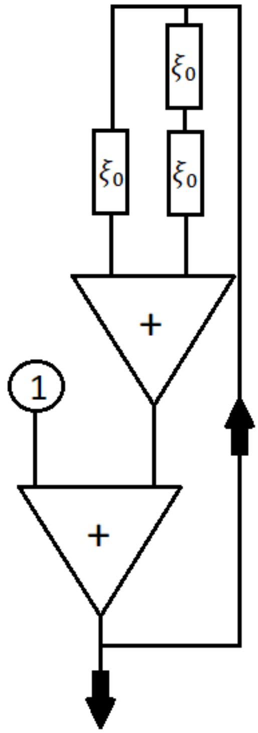
$$\alpha_F = \tfrac{1}{1-\xi-\xi^2}.$$

Построим константный линейный автомат, реализующий данный ряд.

Умножим это выражение на знаменатель, перенесем все коэффициенты кратные ξ вправо и заменим α_F в правой части уравнения на ряд α, запомнив что необходимо будет добавить обратную связь в конце построения на указанный новый вход. Получим уравнение:

$$\alpha_F = 1 + (\xi + \xi^2)\alpha.$$

Поскольку $(\xi + \xi^2)$ - многочлен степени 2, мы можем реализовать умножение на него согласно лемме 4. Подставим на один вход сумматора этот автомат, а на другой - автомат, реализующий константу 1 в первый такт, и 0 во все остальные такты, а так же применим операцию обратной связи. Получим автомат, изображенный на схеме, реализующий последовательность чисел Фибоначчи.



4. Основные результаты

Теорема 1. *В классе $L(\mathbb{Q})$ не существует конечной K-полной системы.*

Доказательство: Рассмотрим некоторую конечную систему линейных автоматов $\mathbf{V} = \{V_1, V_2, ..., V_m\}$. Рассмотрим $\alpha_{1,j}, ..., \alpha_{n_j,j} \in \mathbb{Q}_\xi^\infty$, при подаче которых на входы автомата V_j с n_j входами на выходе получается ряд:

$$\beta_j = R_{0,j} + R_{1,j} \cdot \alpha_{1,j} + R_{2,j} \cdot \alpha_{2,j} + ... + R_{k_j,j} \cdot \alpha_{n_j,j},$$

$$R_{i,j} = \tfrac{P_{i,j}}{Q_{i,j}} \in \mathbf{R}(\mathbb{Q}), 1 \leq j \leq m, 0 \leq i \leq n_j$$

Множество всех указанных $R_{i,j}$ обозначим через $\mathbf{R}$. Пусть $R_j \in \mathbf{R}$, тогда:

$$R_j = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} \cdot \xi^k, a_{j,k} \in \mathbb{Q}$$

Согласно указанным обозначениям, определим следующее множество коэффициентов:

$$\mathbf{V}_0 = \{a_{j,0} = \frac{p_{j,i}}{q_{j,i}} | j \in [1,n], i \in [1,n_j], (p_{j,0}, q_{j,0}) = 1\}$$

Рассмотрим $V \in K[\mathbf{V}]$ - автомат с k входами. Пусть $\mathbf{0} = \sum_{k=0}^{\infty} 0 \cdot \xi^k$. Подадим на входы V ряды $\alpha_j = \mathbf{0}, j \in [1,k]$. Тогда на выходе V получается ряд:

$$\beta = R'_0 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot \xi^k,\ R'_0 \in \mathbf{R}(\mathbb{Q})$$

Заметим, что R'_0 получена из некоторых $R_{i,j}$ путем конечного числа применений следующих операций:

1) Сложение двух имеющихся на некотором шаге дробно-рациональных R_1 и R_2.

2) Умножение двух имеющихся на некотором шаге дробно-рациональных R_1 и R_2.

3) Деление образованной на некотором шаге дробно-рациональной R_1 на $1 - R_2$, где R_2 делится на ξ. *(Заметим, что эта операция не влияет на свободный член ряда R_1, поскольку, по определению деления, происходит умножение свободного члена на единицу).*

Очевидно, что b_0 будет получаться из элементов множества $\mathbf{V}_0$ применением операций сложения, вычитания, умножения и деления.

В силу конечности системы $\mathbf{V}_0$ мы можем выбрать число A следующим образом: $A = max_{j \in [1,n]}(q_{j,0})$ либо, если все $q_{j,0} = 1$, положить A $=$ 2.

Однако в таком случае мы никогда не получим $b_0 = \frac{1}{A'}$, где $A' > A$ и A' - простое. Следовательно $\mathbf{V}$ - не полна. Теорема доказана.

Теорема 2. *В классе $L(\mathbb{Q})$ не существует конечной системы автоматов $\boldsymbol{V}$, такой что $\Sigma[\boldsymbol{V} \cup \boldsymbol{B}] = L(\mathbb{Q})$.*

Доказательство: Для начала покажем, что если $R_1, R_2 \in \mathbf{R}(\mathbb{Q})$, причем $R_1 \neq R_2$ как функции, тогда отображения $R_1 \cdot \alpha$ и $R_2 \cdot \alpha$ будут выдавать различные ряды при некоторых α.

В самом деле, предположим противное, тогда $(R_1 - R_2) \cdot \alpha = \mathbf{0}$, где

$$\mathbf{0} = 0 + 0 \cdot \xi + ... + 0 \cdot \xi^n + ... \in \mathbb{Q}_\xi^\infty.$$

Однако поскольку $(R_1 - R_2) \neq 0$, существует индекс i такой, что

$$(R_1 - R_2) = a_0 + a_1 \cdot \xi + a_2 \cdot \xi^2 + ... + a_i \cdot \xi^i + ..., \text{ причем } a_i \neq 0.$$

Рассмотрим $(R_1 - R_2)(\mathbf{1})$, где:

$$\mathbf{1} = 1 + \xi + \xi^2 + ...\xi^n + ... \in \mathbb{Q}_\xi^\infty$$

Отсюда сразу следует, что $(R_1 - R_2)(\mathbf{1}) \neq \mathbf{0}$, а это противоречит нашему предположению.

Рассмотрим некоторую конечную систему линейных автоматов из $L(\mathbb{Q})$:

$$\mathbf{V} = \{V_1, V_2, ..., V_m\}$$

Согласно лемме 2, V_j с n_j входами на входных рядах $\alpha_{k,j} \in \mathbb{Q}_\xi^\infty$ реализует выходной ряд:

$$\beta_j = R_{0,j} + R_{1,j} \cdot \alpha_{1,j} + R_{2,j} \cdot \alpha_{2,j} + ... + R_{n_j,j} \cdot \alpha_{n_j,j},$$

$$R_{i,j} = \tfrac{P_{i,j}}{Q_{i,j}} \in \mathbf{R}(\mathbb{Q}),\ 1 \leq j \leq m.$$

Определим множество из неприводимых многочленов $\mathbf{V}_Q$:

$$\mathbf{V}_Q = \{P(\xi) | P(\xi) - \text{ неприводимый многочлен: } \exists i, j : P(\xi) \text{ делит } Q_{i,j}\}$$

Пусть $V \in \Sigma[\mathbf{V} \cup \mathbf{B}]$ - автомат с k входами. При подаче на вход V рядов $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{Q}_\xi^\infty$ выходной ряд имеет вид:

$$\beta = R'_0 + R'_1 \cdot \alpha_1 + ... + R'_k \cdot \alpha_k$$

Рассмотрим выходной ряд при $\alpha_i = \mathbf{0}, i \in [1, k]$. Тогда $\beta = R'_0$, где $R'_0 \in \mathbf{R}(\mathbb{Q})$, полученная в результате построения V из некоторых $R_{i,j}$ путем применения конечного числа операций:

1) Сложение двух имеющихся на некотором шаге R_1 и R_2.

2) Умножение двух имеющихся на некотором шаге R_1 и R_2.

3) Умножение произвольной R_1 на $c \in \mathbb{Q}$.

4) Умножение произвольной R_1 на формальную переменную ξ.

5) Прибавление произвольной константы к R_1.

Нетрудно видеть, что используя указанный набор операций мы будем получать $R'_0 \neq \frac{P'}{Q'} \in \mathbf{R}(\mathbb{Q})$, где $Q' \notin \mathbf{V}_Q$. Следовательно $\mathbf{V}$ не полна. Теорема доказана.

При построении класса линейных автоматов мы использовали полную, но избыточную *основную систему* $\mathbf{B}$, которая не является базисной.

Следующие далее утверждения касаются вопроса существования базисов в классе линейных автоматов над полем рациональных чисел.

Теорема 3. *В классе $L(\mathbb{Q})$ можно выделить бесконечный K - базис.*

Доказательство: Рассмотрим счетное множество линейных автоматов $\mathbf{B_1}$:

$$\mathbf{B_1} = \{\xi_1, V_+, V_{\cdot(-1)}, V_{\cdot\frac{1}{p}} \mid p \text{ - простые числа}\}$$

Покажем что $K[\mathbf{B_1}] = L(\mathbb{Q})$, а именно, сведем все к заведомо полной системе $\mathbf{B}$:

1) $V_{\cdot 0}$ получим из V_+ и $V_{\cdot(-1)}$, подстановкой $V_{\cdot(-1)}$ на один из входов V_+ и отождествлением входов полученного автомата.

2) $V_{\cdot n}$, где $n \neq 0$ - целое число несложно получить из $V_{\cdot(-1)}$ и V_+.

3) $V_{\cdot\frac{a}{b}}$, где $b = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot ... \cdot p_k^{s_k}$, p_i -простые числа, s_i - натуральные, получим очевидным образом из $V_{\cdot(-1)}$, V_+,$V_{\cdot\frac{1}{p_i}}$, $i \in [1, k]$.

Таким образом мы целиком восстановим $\mathbf{B}$, а значит построим все автоматы в классе $L(\mathbb{Q})$.

Покажем что $\mathbf{B_1}$ - базис:

1) $K[\mathbf{B_1} \setminus \xi_1]$ содержит только автоматы сохраняющие ноль в первый момент времени.

2) $K[\mathbf{B_1} \setminus V_+]$ не содержит автоматов, зависящих более чем от одного входа.

3) $K[\mathbf{B_1} \setminus V_{\cdot\frac{1}{p}}]$ где p-простое, не содержит автоматов, выдающих в первый такт константу $\frac{1}{p}$.

4) $K[\mathbf{B_1} \setminus V_{\cdot(-1)}]$ не содержит автоматов, выдающих в первый такт отрицательное число.

Следовательно $\mathbf{B_1}$ - K - базис. Теорема доказана.

Теорема 4. *В классе $L(\mathbb{Q})$ существует бесконечная Σ -полная система, не содержащая Σ-базиса.*

Доказательство: Рассмотрим множество линейных автоматов $\mathbf{B_2}$:

$\mathbf{B_2} = \{\xi_1, V_+, V_{\cdot(-1)}, V_{\cdot\frac{1}{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k}} \mid p_i$ - подряд идущие простые числа$\}$

Очевидно, что $\mathbf{B_1} \subset \Sigma[\mathbf{B_2}]$, т.к. всякий $V_{\cdot\frac{1}{p_i}}$ может быть получен из $V_{\cdot\frac{1}{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k}}$, где $k \geq i$ и V_+.

В указанной системе невозможно выделить базис, поскольку любое конечное подмножество $\mathbf{B_2}$ не является полным, так как не позволит нам получить все умножители на простые числа, а из любого бесконечного подмножества всегда можно удалить элементы без потери свойства системы быть полной в $L(\mathbb{Q})$ по операция композиции. Теорема доказана.

Теорема 5. *В классе $L(\mathbb{Q})$ существует бесконечный Σ-базис.*

Доказательство: Определим автоматы-умножители на многочлены и рациональные функции:

1) $V_{\cdot P(\xi)}$ - линейный автомат с одним входом, выходной ряд которого равен:

$$\beta = P(\xi) \cdot \alpha,$$

где $P(\xi)$ - многочлен от ξ над $\mathbb{Z}$, α - входной ряд.

2) $V_{\cdot\frac{P(\xi)}{Q(\xi)}}$- линейный автомат с одним входом, выходной ряд которого равен:

$$\beta = \frac{P(\xi)}{Q(\xi)} \cdot \alpha,$$

где $\frac{P(\xi)}{Q(\xi)} \in \mathbf{R}(\mathbb{Q})$, α - входной ряд.

Назовем системой $\mathbf{B_3}$ следующую систему:

$$\mathbf{B_3} = \mathbf{B_1} \cup \mathbf{B_4},$$

где $\mathbf{B_4} = \{V_{\cdot \frac{1}{Q(\xi)}} \mid$ Q - неразложимый, $deg(Q(\xi)) > 0, Q(0) = 1\}$

Условие $Q(0) = 1$ введено для того, что бы избавиться от многочленов, равных с точностью до ассоциированного (умножения на $+1$ и -1) и добиться единичного содержания многочленов в знаменателе.
Покажем, что система $\mathbf{B_3}$ полна.
В $\Sigma[\mathbf{B_1}]$ содержатся все $V_{\cdot c}$ и $V_{\cdot P(\xi)}$. Для полноты системы необходимо реализовать произвольный $V_{\cdot \frac{P(\xi)}{Q(\xi)}}$, $\frac{P(\xi)}{Q(\xi)} \in \mathbf{R}(\mathbb{Q})$, т.к. тогда при подаче на входы $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{Q}_\xi^\infty$ реализуется любое отображение вида:

$$\beta = R_0 + R_1 \cdot \alpha_1 + R_2 \cdot \alpha_2 + ... + R_n \cdot \alpha_n$$

Очевидно, что любая $R_i = \frac{P_i}{Q_i} \in \mathbf{R}(\mathbb{Q})$, может быть представлена как $R_i = \frac{P_i'}{Q_i'} \in \mathbf{R}(\mathbb{Q})$, где $Q_i'(0) = 1$. Кольцо многочленов над целыми числами - факториально[6], поэтому любая дробно рациональная функция $R_i' = \frac{P_i'}{Q_i'}$ представима суммой дробно-рациональных, с неразложимыми в знаменателе, а значит $R_i' \in \Sigma[\mathbf{B_3}]$, поскольку всякий $V_{\cdot P_i'(\xi)} \in \Sigma[\mathbf{B_3}]$.

Поскольку мы реализовали произвольные $V_{\cdot \frac{P(\xi)}{Q(\xi)}}$, несложно получить константные отображения, реализующие ряд R_0, т.к. используя $V_+, V_{\cdot(-1)}$ и ξ_1 можно получить константный автомат с выходным рядом вида:

$$\beta = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 0 \cdot \xi^k$$

Полнота системы $\mathbf{B_3}$ доказана.
Покажем, что система $\mathbf{B_3}$ является базисом.

1) $\Sigma[\mathbf{B_3} \setminus V_+]$ не содержит автоматов, зависящих более чем от одного входа.

2) $\Sigma[\mathbf{B_3} \setminus V_{\cdot(-1)}]$ не содержит автоматов, выдающих отрицательные числа в первый момент времени.

3) $\Sigma[\mathbf{B_3} \setminus V_{\cdot \frac{1}{p}}]$ не содержит автоматов, выдающих константу $\frac{1}{p}$ в первый момент времени.

4) $\Sigma[\mathbf{B_3} \setminus \xi_1]$ не содержит автоматов, реализующих формальные степенные ряды вида $R \cdot x$, где R - неправильная рациональная функция от ξ (степень числителя больше степени знаменателя).

5) $\Sigma[\mathbf{B_3} \setminus V_{\cdot\frac{1}{Q(\xi)}}]$ не содержит константного автомата, реализующего выходной ряд $\frac{1}{Q(\xi)}$.

Таким образом, $\mathbf{B_3}$ - базис. Теорема доказана.

Автор выражает искреннюю признательность А.А.Часовских за постановку задачи, а так же ценные советы и замечания.

Список литературы

[1] Гилл А. «Линейные последовательные машины.» — М.: Наука, 1974.

[2] Кудрявцев В. Б. Алешин С. В. Подколзин А. С. «Элементы теории автоматов» — М.: Издательство Московского Университета – 1978

[3] Часовских А. А. «О полноте в классе линейных автоматов» // Математические вопросы кибернетики –Выпуск 03 – С. 140–166 – 1991.

[4] Часовских А. А. «О полноте в классе линейных 2-адических автоматов» // Интеллектуальные системы – Том 20 – Выпуск 4 – С. 209–227 – 2016.

[5] Кудрявцев В. Б. Алешин С. В. Подколзин А. С. «Введение в теорию автоматов» — М.: Наука – Главная редакция физико-математической литературы – 1985

[6] Кострикин А. И. «Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры: Учебник для вузов. -3-е изд.»— М.: Физматлит – 2004

Linear automata over rational numbers field

Ronzhin D.V.

We consider a class of linear automata over the field of rational numbers. In this class we prove there are no finite K-full systems and no finite Σ-full systems with infinte additive of special form. We construct an infinite K-basis and an infinite Σ-basis, and also an infinite Σ-full sistem which contains no Σ-basis.

Keywords: linear automata, rational numbers field, composition operations, superposition operations, K-closure, Σ-closure.