О максимальном накрытии начала натурального ряда с ограничениями

Дергач Пётр Сергеевич

В статье рассматривается следующая задача: необходимо определить, какое максимальное по длине начало натурального ряда можно накрыть арифметическими прогрессиями, не накрыв при этом весь ряд. При этом может вводиться ряд ограничений на начало и разность(шаг) этих прогрессий, а также на их общее количество. В зависимости от того, какие из ограничений имеют место, возникает класс различных задач, часть из которых успешно решается в данной статье. Самыми интересными случаями оказываются ограничения типа "начало+шаг", "количество".

Ключевые слова: натуральный ряд, арифметическая прогрессия, максимальное накрытие.

Введение

В статье приводятся точные оценки на решение задачи с ограничениями типа "начало", "шаг", "непересечение", "количество". Тем самым окончательно закрывается вопрос о решении поставленной проблемы с единственным типом ограничения. Для задачи с парой ограничений возникающие при этом выкладки становится на порядок нетривиальнее. Тем не менее, для ограничений типа "начало+шаг" удается найти и доказать соответствующую точную оценку.О решении похожих проблем можно прочитать в статьях [1-8]. О других интересных аспектах исследований автора и других ученых в смежных областях к тематике данной работы можно прочитать в [9-20].

Основные определения

Множество натуральных чисел обозначаем через $\mathbb{N}$.

Множество целых чисел обозначаем через $\mathbb{Z}$.

Множество целых неотрицательных чисел обозначаем через $\mathbb{N}_0$.

Множество действительных чисел обозначаем через $\mathbb{R}$.

Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ множество натуральных чисел от 1 до n обозначаем через E_n.

Через $\mathbf{P}$ обозначаем множество простых чисел.

Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ Через $\mathbf{P}_n$ обозначаем множество $\mathbf{P} \cap E_n$.

Пусть $a, b \in \mathbb{N}$. Тогда *арифметической прогрессией с началом a и шагом b* называется множество

$$\{a + ib \mid i \in \mathbb{N}_0\}.$$

Для краткости обозначаем эту прогрессию через (a, b).

Множество всех арифметических прогрессий обозначаем через $\mathbb{P}$.

Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ множество всех арифметических прогрессий, начало которых не превосходит n, обозначаем через $\mathbb{P}_1(n)$.

Множество всех арифметических прогрессий, шаг которых не превосходит n, обозначаем через $\mathbb{P}_2(n)$.

Через f_1 обозначаем максимальное $m \in \mathbb{N}$ такое, что множество E_m можно накрыть объединением любого конечного количества попарно непересекающихся элементов из $\mathbb{P}$, не накрыв при этом весь натуральный ряд $\mathbb{N}$.

Через $f_2(n)$ обозначаем максимальное $m \in \mathbb{N}$ такое, что множество E_m можно накрыть объединением любого конечного количества элементов из $\mathbb{P}_1(n)$, не накрыв при этом весь натуральный ряд $\mathbb{N}$.

Через $f_3(n)$ обозначаем максимальное $m \in \mathbb{N}$ такое, что множество E_m можно накрыть объединением любого конечного количества элементов из $\mathbb{P}_2(n)$, не накрыв при этом весь натуральный ряд $\mathbb{N}$.

Через $f_4(n)$ обозначаем максимальное $m \in \mathbb{N}$ такое, что множество E_m можно накрыть объединением не более чем n элементов из $\mathbb{P}$, не накрыв при этом весь натуральный ряд $\mathbb{N}$. При этом никаких ограничений на попарное пересечение арифметических прогрессий, их начало и шаг не накладывается.

Через $f_{2,3}(n)$ обозначаем максимальное $m \in \mathbb{N}$ такое, что множество E_m можно накрыть объединением любого конечного количества элементов из $\mathbb{P}_1(n) \cap \mathbb{P}_2(n)$, не накрыв при этом весь натуральный ряд

$\mathbb{N}$. При этом никаких ограничений на попарное пересечение арифметических прогрессий или их количество не накладывается.

Любую арифметическую прогрессию (a, b) можно представить в виде объединения

$$(a, b) = (a, bp) \cup (a + b, bp) \cup \ldots \cup (a + b(p - 1), bp).$$

Множество $(a+b(i-1), bp)$ называем *i-ым слоем* прогрессии (a, b) *с шагом bp*.

Называем подмножество S натурального ряда *плотно-упакованным с шагом p* и *глубиной k*, если его можно получить отбрасыванием из множества $\mathbb{N}$ нескольких(хотя бы одного) слоев, взятых в каком-нибудь фиксированном слое прогрессии $(1, 1)$ с шагом p^{k-1}.

Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ обозначаем

$$t(n) := \max\{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k \mid k, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}, a_1 + \ldots + a_k = n\}.$$

Для любого $x \in \mathbb{R}$ через $[x]$ обозначаем наибольшее целое число $a \in \mathbb{Z}$, для которого $a \leq x$.

Теорема 1. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $m > 1$. Тогда*

$$f_1 = \infty,\ f_2(1) = 1,\ f_2(m) = \infty,\ f_3(n) = HOK(1, 2, \ldots, n) - 1.$$

Теорема 2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда* $f_{2,3}(n) = \prod\limits_{p \in \mathbf{P}_n} p^{[\log_p n]}$.

Теорема 3. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда* $f_4(n) = 2^n - 1$.

Доказательство вспомогательных утверждений

Лемма 1. Критерий пересечения. *Для любых* $a, c \in \mathbb{N}_0$ *и* $b, d \in \mathbb{N}$ *верно*

$$(a, b) \cap (c, d) \neq \emptyset \Longleftrightarrow a \equiv c \ (mod\ НОД(b, d)).$$

Доказательство леммы см. в [1].

Лемма 2. О примарности. *Пусть* $k, n \in \mathbb{N}$ *и для* $1 \leq i \leq k$ *выполнено* $a_i, b_i \in \mathbb{N}$, $b_i > 1$. *Пусть, кроме того,*

$$E_n \subset \bigcup_{i=1}^{k} (a_i, b_i) \neq \mathbb{N}$$

и $b_1 = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_s^{a_s}$ *— разложение числа* b_1 *на простые множители. Тогда существует такое* $t \in E_s$, *для которого*

$$E_n \subset \bigcup_{i=2}^{k} (a_i, b_i) \cup (a_1, p_t^{a_t}) \neq \mathbb{N}.$$

Доказательство.

Предположим, что утверждение неверно и для любого $t \in E_s$ не выполнено условие

$$E_n \subset \bigcup_{i=2}^{k} (a_i, b_i) \cup (a_1, p_t^{a_t}) \neq \mathbb{N}. \quad (1)$$

Очевидно, что для любого $t \in E_s$ выполнено

$$E_n \subset \bigcup_{i=1}^{k} (a_i, b_i) \subset \bigcup_{i=2}^{k} (a_i, b_i) \cup (a_1, p_t^{a_t}). \quad (2)$$

Из невыполнения условия (1) отсюда тогда следует, что для каждого $t \in E_s$ верно

$$\bigcup_{i=1}^{k} (a_i, b_i) \subset \bigcup_{i=2}^{k} (a_i, b_i) \cup (a_1, p_t^{a_t}) = \mathbb{N}. \quad (3)$$

Обозначим через S множество $\mathbb{N} \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k} (a_i, b_i)$. По условию оно непусто. Однако, из (3) получаем, что при всех $t \in E_s$ выполнено

$$S \subset (a_1, p_t^{a_t}). \quad (4)$$

Значит
$$S \subset \bigcap_{i=1}^{s}(a_1, p_t^{a_t}). \tag{5}$$
Из взаимной простоты чисел $p_t^{a_t}$, $t \in E_s$ получаем из (5), что
$$\mathbb{N} \setminus \bigcup_{i=1}^{k}(a_i, b_i) = S \subset (a_1, \prod_{i=1}^{s} p_t^{a_t}) = (a_1, b_1).$$
Полученное противоречие очевидно завершает доказательство леммы.

■

Лемма 3. О плотной упаковке. *Пусть p — простое число, дано $L = (a_i, b_i)_{i=1}^{n}$ — семейство попарно непересекающихся прогрессий с шагами, равными степеням числа p и пусть это семейство не накрывает все $\mathbb{N}$. Тогда его можно накрыть плотно-упакованным множеством с шагом p и глубиной $]\frac{n}{p-1}[$, использовав при этом не более n прогрессий.*

Доказательство.

Суть доказательства очень проста. Обозначим через k число $]\frac{n}{p-1}[$. Рассмотрим слои прогрессии $(1,1)$ с шагом p. Возможны два случая: или хотя бы один из этих слоев не пересекается с элементами из L, или же L хотя бы частично накрывает каждый слой прогрессии $(1,1)$ с шагом p. Ясно, что каждая прогрессия из L будет находиться целиком внутри какого-то одного слоя. В первом случае нужно заменить все элементы из L, находящиеся внутри своего слоя на сам этот слой. Во втором случае этого сделать нельзя. Однако, можно заменить таким образом все слои, кроме одного. А уже к этому слою применить такое же рассуждение, которое выше было использовано для прогрессии $(1,1)$. Всего на каждом шаге итерации этого процесса будет взято $p-1$ слоев. И лишь на последнем шаге может потребоваться взять только некоторую часть всех слоев. Очевидно, что при такой замене количество использованных прогрессий не возрастает и, значит, их будет не больше n. И на последнем шаге итерации мы будем брать слои с шагом p^k. Значит образованное нами множество является плотно упакованным с шагом p и глубиной $k =]\frac{n}{p-1}[$.

■

Лемма 4. Про t(n). *Для любого $k \in \mathbb{N}$ верны следующие равенства:*

$$t(3k) = 3^k,\ t(3k+1) = 4 \cdot 3^{k-1},\ t(3k+2) = 2 \cdot 3^k.$$

Доказательство.

Пусть для фиксированного $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ числа $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$ доставляют максимальное значение для $a_1 \cdot \ldots \cdot a_k$ с ограничением

$$a_1 + \ldots + a_k = n.$$

Тогда все $a_i > 1$, так как в противном случае пару $1, a_i$ можно было бы, не поменяв сумму и увеличив произведение, заменить на a_i+1. Аналогично, все $a_i < 5$, так как при $a_i \geq 5$ было бы верно, что

$$2(a_i - 2) = 2a_i - 4 = a_i + (a_i - 4) > a_i$$

и замена числа a_i на пару чисел 2 и a_i не изменила бы сумму, но увеличила произведение. Также можно считать, что $a_i \neq 4$, так как 4 можно, не изменив суммы и произведения, заменить на 2 и 2. Таким образом, все a_i равны или двум, или трем. Больше двух двоек среди a_i быть не может, так как иначе мы могли бы заменить 3 двойки на 2 тройки и, не изменив сумму, увеличили бы произведение. После сказанного утверждение леммы становится очевидным.

■

Следствие из леммы 4. Для любого $n \in \mathbb{N}$ верно, что $t(n) \leq 3^{\frac{n}{3}}$.
Доказательство.

Для $n = 1, 2$ утверждение проверяется непосредственно. При $n > 2$ утверждение тривиально вытекает из верных неравенств

$$4 \cdot 3^{k-1} \leq 3^{k+\frac{1}{3}},\ 2 \cdot 3^k \leq 3^{k+\frac{2}{3}}.$$

■

Лемма 5. Индуктивный переход. *Пусть для всех $m \in E_n$ верно, что $f_4(m) = 2^m - 1$. И пусть дано $L = (a_i, b_i)_{i=1}^{n+1}$ — семейство из $n+1$ прогрессий, содержащее плотно-упакованное множество с шагом $p \in$* **P** *и глубиной больше* 1. *Тогда L не может накрывать $E_{2^{n+1}}$, не накрыв при этом весь ряд $\mathbb{N}$.*

Доказательство.

Будем доказывать утверждение от противного. По определению плотно упакованного множества в L есть $p-1$ различных слоев с шагом p. Удалим из L эти слои и обозначим получившееся семейство через L'. В оставшемся слое (x,p) будет, как минимум, $\left[\frac{2^{n+1}}{p}\right]$ чисел из $E_{2^{n+1}}$. Так как L не накрывало $\mathbb{N}$, то и L' не накрывает (x,p). Заменим каждый элемент (a,b) из L' на $(a,b)\cap(x,p)$. Полученное семейство обозначим через L''. Можно считать, что в нем столько же элементов, сколько и в L', иначе какой-то элемент $(a,b)\in L'$ не пересекался бы с (x,p) и его можно было бы изначально выкинуть из L. Значит в L'' всего $n+1-(p-1)$ элементов. Так как $n+1-(p-1)\in E_n$, то по условию

$$f(n+1-(p-1)) = 2^{n+1-(p-1)} - 1. \tag{6}$$

Однако, все элементы из L'' лежат в (x,p), но L'' не накрывает его целиком. Поэтому

$$f(n+1-(p-1)) \geq \left[\frac{2^{n+1}}{p}\right]. \tag{7}$$

Из (6) и (7) получаем, что

$$2^{n+1-(p-1)} - 1 \geq \left[\frac{2^{n+1}}{p}\right]. \tag{8}$$

При $p=2$ это условие, очевидно, нарушается. Если же $p>2$, то из (8) получаем $\frac{2^{n+1}}{2^{p-1}} \geq \frac{2^{n+1}}{p}$, а значит $p \geq 2^{p-1}$, что, конечно же, неверно.

■

Доказательство основных утверждений

Теорема 1. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $m > 1$. *Тогда*

$$f_1 = \infty,\ \ f_2(1) = 1,\ \ f_2(m) = \infty,\ \ f_3(n) = HOK(1, 2, \ldots, n) - 1.$$

Доказательство.

Докажем, что $f_1 = \infty$. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим следующее множество:

$$P_1 = (1, 2) \sqcup (2, 4) \sqcup (4, 8) \sqcup \ldots \sqcup (2^{k-1}, 2^k). \tag{9}$$

Ясно, что в (9) все прогрессии попарно не пересекаются и в совокупности накрывают все числа, не делящиеся нацело на 2^k. Значит $f_1 \geq 2^k - 1$, т.е., из произвольности k, $f_1 = \infty$.

Докажем от противного, что $f_2(1) = 1$. Пусть $f_2(1) > 1$. Тогда существует такое конечное семейство арифметических прогрессий с началом в 1, объединение которых содержит 1 и 2. Но это, в свою очередь, означает, что в какой-то из прогрессий этого семейства есть и 1, и 2. Но тогда эта прогрессия будет накрывать весь ряд. Полученное противоречие доказывает, что $f_2(1) = 1$.

Докажем, что $f_2(m) = \infty$. Для этого достаточно доказать, что

$$f_2(2) = \infty.$$

Рассмотрим произвольное $l \in \mathbb{N}$. Так как простых чисел бесконечно много, то существует простое число p, которое больше l. Посмотрим на следующее множество:

$$P_2 = (1, 2) \cup (1, 3) \cup (1, 4) \cup \ldots \cup (1, l) \cup (2, p).$$

Ясно, что P_2 накрывает все натуральные числа, меньшие или равные $l + 1$. В то же время это множество точно не содержит числа $1 + p$. Поэтому $f_2(m) = \infty$.

Докажем, что $f_3(n) = \text{НОК}(1, 2, \ldots, n) - 1$. При $n = 1$ ясно, что все разрешенные прогрессии будут иметь шаг 1 и поэтому не смогут накрыть в совокупности 1, не накрыв весь натуральный ряд. Значит $f_3(1) = 0 = \text{НОК}(1) - 1$. Формула выполнена. Допустим теперь, что $n > 1$. Рассмотрим следующее множество:

$$P_3 = \Big((1, 2)\Big) \cup \Big((1, 3) \cup (2, 3)\Big) \cup \ldots \cup \Big((1, n) \cup (2, n) \cup \ldots (n-1, n)\Big). \tag{10}$$

Ясно, что семейство прогрессий из (10) не накрывает в совокупности те и только те числа, которые одновременно делятся на 2, на 3, на 4 и так далее до n. Значит P_3 заведомо содержит в себе все натуральные числа, строго меньшие чем $\text{НОК}(1, 2, \ldots, n)$. Поэтому

$$f_3(n) \geq \text{НОК}(1, 2, \ldots, n) - 1. \tag{11}$$

Докажем теперь от противного, что

$$f_3(n) \leq \text{НОК}(1, 2, \ldots, n) - 1. \tag{12}$$

Пусть это не так. Тогда существует такое конечное семейство X арифметических прогрессий, объединение которых содержит все натуральные числа от 1 до $\text{НОК}(1, 2, \ldots, n)$ и при этом не накрывает весь натуральный ряд. Пусть $s \in \mathbb{N}$ — произвольное натуральное число между 1 и $\text{НОК}(1, 2, \ldots, n)$. Его накрывает одна из прогрессий семейства X. Без ограничения общности, эта прогрессия имеет вид (x, y). Здесь $1 \leq y \leq n$. Но тогда число $s + \text{НОК}(1, 2, \ldots, n)$ тоже принадлежит (x, y), ведь $\text{НОК}(1, 2, \ldots, n)$ делится без остатка на y. Но число s можно выбрать произвольно среди натуральных чисел от 1 до $\text{НОК}(1, 2, \ldots, n)$. Значит семейство X накрывает весь $\mathbb{N}$, а это невозможно. Итак, неравенство (12) доказано. Объединяя неравенства (11), (12), получаем, что $f_3(n) = \text{НОК}(1, 2, \ldots, n) - 1$.

■

Теорема 2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда* $f_{2,3} = \prod\limits_{p \in \mathbf{P}_n} p^{[\log_p n]} - 1.$

Доказательство.

Обозначим через $t(n)$ число $\prod\limits_{p \in \mathbf{P}_n} p^{[\log_p n]}$. Докажем, что

$$f_{2,3} \geq t(n) - 1. \tag{13}$$

Для произвольного $p \in \mathbf{P}_n$ обозначим через $a(p)$ число $p^{[\log_p n]}$ и для произвольного $i \in E_{a(p)-1}$ вводим обозначение

$$R(p, i) = (i, a(p)). \tag{14}$$

Очевидно, что в (14) все $R(p, i) \in \mathbb{P}_1(n) \cap \mathbb{P}_2(n)$ и выполнено

$$\bigcup_{i=1}^{a(p)-1} R(p, i) = \mathbb{N} \setminus (a(p), a(p)). \tag{15}$$

Для доказательства (13) осталось заметить, что из (15) можно получить

$$\bigcup_{p\in\mathbf{P}_n}\left(\bigcup_{i=1}^{a(p)-1} R(p,i)\right) = \bigcup_{p\in\mathbf{P}_n} \mathbb{N}\setminus(a(p),a(p)) = \mathbb{N}\setminus\left(\bigcap_{p\in\mathbf{P}_n}(a(p),a(p))\right) =$$

$$= \mathbb{N}\setminus\left(\prod_{p\in\mathbf{P}_n} a(p), \prod_{p\in\mathbf{P}_n} a(p)\right) = \mathbb{N}\setminus(t(n),t(n)).$$

Докажем теперь, что

$$f_{2,3} \le t(n) - 1. \tag{16}$$

Пусть это неверно и нашлись такие $k \in \mathbb{N}$ $a_i, b_i \in \mathbb{N}$, $i \in E_k$, для которых

$$E_{t(n)} \subset \bigcup_{i=1}^{k}(a_i,b_i) \neq \mathbb{N}, \tag{17}$$

$$(a_i,b_i) \in \mathbb{P}_1(n) \cap \mathbb{P}_2(n),\ i \in E_k. \tag{18}$$

Можно сразу считать, что все b_i в (16) больше 1, так как иначе прогрессия (a_i,b_i) не пересекалась бы с $E_{t(n)}$ и ее можно было бы выкинуть. По лемме 2 о примарности можем считать, что все b_i, $i \in E_k$ — примарные числа, так как проводимая в лемме 2 замена прогрессии (a_1,b_1) на прогрессию $(a_1,p_t^{a_t})$ не выводит нас за класс $\mathbb{P}_1(n) \cap \mathbb{P}_2(n)$. Из (18) следует, что $a_i, b_i \le n$ при $i \in E_k$. Для каждого $p \in \mathbf{P}_n$ обозначаем

$$v(p) := \{i \in E_k \mid b_i \text{ делится на } p\}.$$

Так как все $b_i \le n$, то их примарные основания тоже не превосходят n, а значит лежат в $\mathbf{P}_n$. Поэтому

$$\bigcup_{p\in\mathbf{P}_n} v(p) = E_k. \tag{19}$$

Теперь проделаем следующее преобразование. Для всех $p \in \mathbf{P}_n$ и для всех $i \in v(p)$ прогрессию (a_i,b_i) можно представить в виде конечного объединения непересекающихся прогрессий с максимально возможным для класса $v(p)$ шагом $a(p)$. Это верно, так как все такие b_i — степени числа p и эти степени не превосходят $a(p)$. При этом, возможно, мы выйдем за границы класса $\mathbb{P}_1(n)$. Заметим, что хотя бы одна из прогрессий в списке

$$(1,a(p)),(2,a(p)),\ldots,(a(p),a(p))$$

не войдет в наше представление. Другими словами такой прогрессии (обозначим ее за $(b(p), a(p))$) не будет в множестве

$$\bigcup_{i \in v(p)} (a_i, b_i). \tag{20}$$

Рассмотрим теперь множество

$$\bigcap_{p \in \mathbf{P}_n} (b(p), a(p)). \tag{21}$$

Оно непусто, так как при разных $p_1, p_2 \in \mathbf{P}_n$ числа $a(p)$ будут взаимно простыми. Более того, из китайской теоремы об остатках известно, что (21) образует арифметическую прогрессию с шагом $\prod\limits_{p \in \mathbf{P}_n} a(p)$ и началом не выше этого же числа. Осталось заметить, что

$$\prod_{p \in \mathbf{P}_n} a(p) = \prod_{p \in \mathbf{P}_n} p^{[\log_p n]} = t(n).$$

Получили противоречие с условием (17).

■

Теорема 3. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда $f_4(n) = 2^n - 1$.*

Доказательство.

Докажем сначала, что $f_4(n) \geq 2^n - 1$. Для этого достаточно рассмотреть накрытие

$$P = (1, 2) \sqcup (2, 4) \sqcup (4, 8) \sqcup \ldots \sqcup (2^{n-1}, 2^n).$$

Ясно, что в правой части этого накрытия ровно n прогрессий и они в совокупности накрывают все числа, строго меньшие чем 2^n. Поэтому $f_4(n) \geq 2^n - 1$.

Докажем теперь, что $f_4(n) \leq 2^n - 1$. Будем доказывать утверждение индукцией по n. При $n = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что при $n \in E_k$ утверждение доказано. Докажем, что и при $n = k + 1$ утверждение тоже верно. Пусть это не так и $f_4(k+1) \geq 2^{k+1}$. Рассмотрим тогда какое-нибудь семейство

$$L = (a_i, b_i)_{i=1}^{k+1},$$

накрывающее $E_{2^{k+1}}$, но не накрывающее весь ряд $\mathbb{N}$. Обозначим через $U(L)$ объединение его элементов. Можно сразу считать, что все $b_i > 1$, так как иначе прогрессии $(a_i, 1)$ не пересекались бы с $E_{2^{k+1}}$ и их можно было бы выкинуть. По лемме 2 считаем, что все b_i примарны, то есть являются степенями простых чисел. Тогда семейство L можно представить в конечного объединения семейств $(L_i)_{i=1}^{s}$ таких, что шаги всех прогрессий из L_i являются степенями некоторого $p_i \in \mathbf{P}$.

Обозначим количество элементов в L_i через a_i. Обозначим через $U(L_i)$ объединение элементов из L_i. Из леммы 1 очевидно следует, что при всех $i = 1, \ldots, s$ элементы из L_i попарно не пересекаются. По лемме 3 можно считать, что каждое из множеств $U(L_i)$ является плотноупакованным множеством с шагом p_i. Причем из леммы 5 следует, что глубина каждого из таких множеств равна 1, то есть все шаги b_i прогрессий из L — простые числа вида $(p_i)_{i=1}^{s}$. Тогда $U(L)$ является периодическим множеством с периодом $t := p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_s$. Значит найдется такое $x \in E_t$, что все элементы из L не пересекаются с прогрессией (x, t). Оценим сверху количество элементов в множестве

$$U(L) \cap \{x + i \mid i \in E_{t-1}\},$$

то есть количество элементов из $U(L)$ на его периоде. По китайской теореме об остатках таких элементов будет не больше чем $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_s$. Но мы знаем, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_s = k + 1$. По следствию из леммы 4 получаем

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_s \leq 3^{\frac{k+1}{3}}.$$

Осталось заметить, что $3^{\frac{k+1}{3}} < 2^{k+1}$. Значит на периоде множество $U(L)$ имеет менее чем 2^{k+1} элементов, что противоречит тому факту, что семейство L накрывает $E_{2^{k+1}}$.

■

Список литературы

[1] П. С. Дергач. *О каноническом регулярном представлении S-тонких языков.* Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 1, М., Сс. 211-242.системы, 2014. Т.18, вып. 1, М., Сс. 211-242.

[2] П. С. Дергач. *О проблеме вложения допустимых классов.* Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 2, М., Сс. 143-174.

[3] П. С. Дергач, Э. С. Айрапетов. *О прогрессивном разбиении некоторых подмножеств натурального ряда.* Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 3, М., Сс. 79-86.

[4] П. С. Дергач. *О двух размерностях спектров тонких языков.* Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 3, М., Сс. 155-174.

[5] П. С. Дергач, Э. С. Айрапетов. *О прогрессивном разбиении последовательности натуральных чисел, имеющей пропуск длины 2.* Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 2, М., Сс. 67-86.

[6] П. С. Дергач, Е. Д. Данилевская. *О покрытиях и разбиениях натуральных чисел, имеющих два последовательных пропуска длины 1.* Интеллектуальные системы, 2017. Т.21, вып. 1, М., Сс.192-237.

[7] П. С. Дергач. *О структуре вложения прогрессивных множеств сложности два.* Интеллектуальные системы, 2017. Т.21, вып. 2, М., Сс.117-162.

[8] П. С. Дергач, Ж. И. Раджабов *О длине минимальной алфавитной склейки для класса линейных регулярных языков.* Интеллектуальные системы, 2017. Т.21, вып. 3, М., Сс.120-130.

[9] Д. Е. Александров. *Эффективные методы реализации проверки содержания сетевых пакетов регулярными выражениями.* Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 1, М., Сс. 37-60.

[10] Д. Н. Бабин. *Частотные регулярные языки.* Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 1, М., Сс. 205-210.

[11] Д. Е. Александров. *Об оценках автоматной сложности распознавания классов регулярных языков.* Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 4, М., Сс. 161-190.

[12] В. М. Дементьев. *О звездной высоте регулярного языка и циклической сложности минимального автомата.* Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 4, М., Сс. 215-222.

[13] И. Е. Иванов. *О сохранении периодических последовательностей автоматами с магазинной памятью с однобуквенным магазином.* Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 1, М., Сс. 145-160.

[14] А. А. Петюшко. *О контекстно-свободных биграмных языках.* Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 2, М., Сс. 187-208.

[15] И. Е. Иванов. *Нижняя оценка на максимальную длину периода выходной последовательности автономного автомата с магазинной памятью.* Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 3, М., Сс. 175-194.

[16] В. А. Орлов. *О конечных автоматах с максимальной степенью различимости состояний.* Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 1, М., Сс. 213-222.

[17] П. С. Дергач. *О проблеме проверки однозначности алфавитного декодирования в классе регулярных языков с полиномиальной функцией роста.* Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 2, М., Сс. 147-202.

[18] А. М. Миронов. *Основные понятия теории вероятностных автоматов.* Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 2, М., Сс. 283-330.

[19] А. А. Петюшко, Д. Н. Бабин. *Классификация Хомского для матриц биграммных языков.* Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 2, М., Сс. 331-336.

[20] С. Б. Родин. *О связи линейно реализуемых автоматов и автоматов с максимальной вариативностью относительно кодирования состояний.* Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 2, М., Сс. 337-348.

Сведения об авторах

Дергач Петр Сергеевич

Младший научный сотрудник МГУ имени М. В. Ломоносова в городе Москве;

адрес: Россия, г. Москва, 125565, Ленинградское ш., 88-19;

тел. моб.: +79037189288;

e-mail: dergachpes@mail.ru.

About the maximum coverage of positive integers with some kind of restrictions
Dergach Peter Sergeevich

In this thesis it is necessary to find the maximum length of the beginning of natural set, that can be covered by the union of arithmetic progressions without covering this way all natural set. There are also some kind of restrictions on beginning and step of these progressions, and on their total number. Depending on what type of restrictions take place, we have a class of various tasks. Some of them were solved in this paper. The most interesting cases are types of restrictions like "beginning+step"and "quantity".

Keywords: natural set, arithmetic progression, maximum coverage.