

# К вопросу о восстановлении трехмерного тела по его плоским проекциям

Д.В.Алексеев

В работе рассматривается задачи восстановления трехмерного изображения по его плоским проекций с точностью до аффинной и метрической эквивалентности. Найдено необходимое и достаточное условие разрешимости этих задач.

**Ключевые слова:** аффинные преобразования, изометрические преобразования, распознавание изображений, восстановление трехмерных изображений, стереозрение.

## 1. Введение

В работе рассматривается задача восстановления по плоским проекциям. В работе [4] описан процесс восстановления тела по плоским проекциям с точностью до аффинной эквивалентности. В [3] описан оптимизированный алгоритм решения этой задачи. В указанных работах не приводится критерия возможности восстановления тела, т.е. условия, позволяющие по двум наборам точек определить, являются ли они проекциями одного и того же трехмерного тела. В данной работе такой критерий приводится в главе 3.

Также рассматривается более сложная задача восстановления трехмерного тела с точностью до метрической эквивалентности проекции. Задача состоит в том, что надо построить трехмерное тело и задать две плоскости и два направления проектирования так, чтобы проекции были равны данным (как геометрические фигуры). Эта задача решается в главе 4.

## 2. Определения и формулировки задач

**Определение 1.** Будем называть *изображением* (двумерным) произвольный занумерованный набор (непустое конечное множество) то-

чек на плоскости. Будем называть **телом** произвольный занумерованный набор (непустое конечное множество) точек в трехмерном пространстве (с указанием порядка).

**Определение 2.** Пусть дано 2-мерное изображение, состоящее из  $n$  точек  $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_n)$ . Кроме того, пусть задан вектор  $\vec{p}$  и прямая  $l$ , не параллельная вектору  $\vec{p}$ . Будем называть такие прямые (не параллельные  $\vec{p}$ ) **допустимыми**. Рассмотрим прямые  $a_i$ , проходящие через соответствующие точки  $A_i$  параллельно вектору  $\vec{p}$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Проекцией изображения  $\mathcal{A}$  по направлению  $\vec{p}$  на прямую  $l$  называется изображение  $\mathcal{A}' = A'_1, \dots, A'_n$ , в котором  $A'_i$  есть точка пересечения прямых  $a_i$  и  $l$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Пусть на прямой  $l$  введена система координат, тогда вектор координат точек  $X(A'_1), \dots, X(A'_n)$  будем называть **отпечатком** множества  $\mathcal{A}$  и обозначать  $F_{l,p}(\mathcal{A})$ .

**Определение 3.** Пусть дано 3-мерное изображение, состоящее из  $n$  точек  $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_n)$ . Кроме того, пусть задан вектор  $\vec{p}$  и плоскость  $\Pi$ , не параллельная вектору  $\vec{p}$ . Рассмотрим прямые  $a_i$ , проходящие через соответствующие точки  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , параллельно вектору  $\vec{p}$  (см. рис. 2). **Проекцией** изображения  $\mathcal{A}$  по направлению  $\vec{p}$  на плоскость  $\Pi$  называется изображение  $\mathcal{A}' = A'_1, \dots, A'_n$ , в котором  $A'_i$  есть точка пересечения прямой  $a_i$  с плоскостью  $\Pi$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

**Задача 1.** Пусть даны два плоских изображения. Построить трехмерное тело и указать плоскости и направления проектирования, такие, что проекции указанного тела на эти плоскости аффинно эквивалентны данным плоским изображениям.

**Задача 2.** Пусть даны два плоских изображения. Построить трехмерное тело и указать плоскости и направления проектирования, такие, что проекции указанного тела на эти плоскости метрически эквивалентны данным плоским изображениям. Т.е. существуют изометрические преобразования, переводящие проекции в данные изображения.

Дальше будут указаны необходимые и достаточные условия, для каждого из этих построений, также будут описаны алгоритмы этих построений.

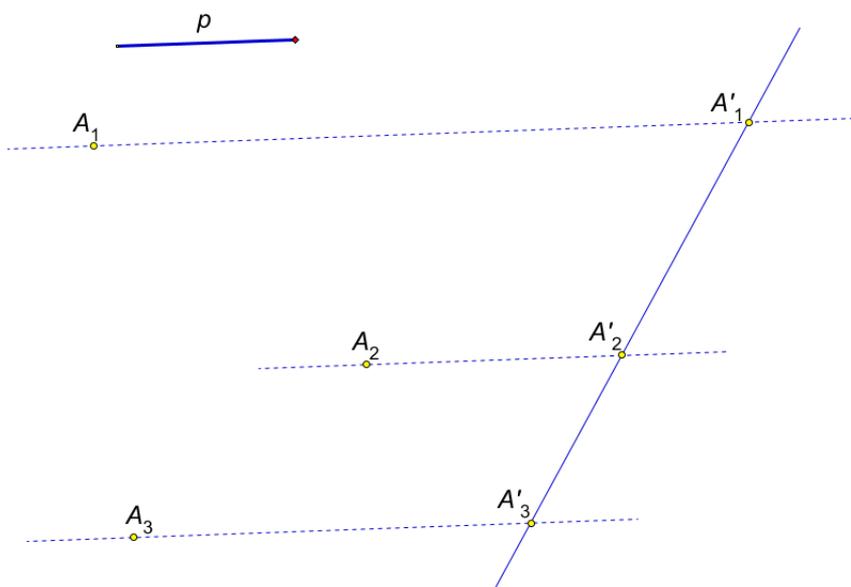


Рис. 1. Проекция на прямую

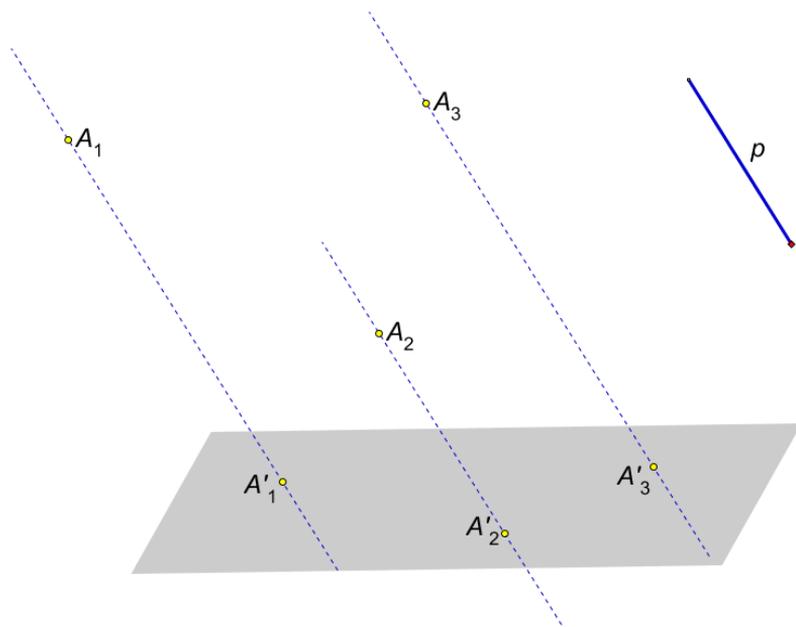


Рис. 2. Проекция на плоскость

### 3. Восстановление трехмерного тела с точностью до аффинной эквивалентности.

Несложно показать, что для двух произвольных плоских изображений задача 1 не всегда имеет решение.

**Пример 4.** Рассмотрим точки с координатами  $A'_1 = A''_1 = (0, 0)$ ,  $A'_2 = A''_2 = (1, 0)$ ,  $A'_3 = A''_3 = (0, 1)$ ,  $A'_4 = (1, 1)$ ,  $A''_4 = (2, 1)$ ,  $A'_5 = (3, 2)$ ,  $A''_5 = (2, 4)$ . Допустим задача 1 имеет решение для данных плоских изображений. Тогда точки  $A_1, A_2, A_3, A_4$  не могут быть расположены в одной плоскости, т.к. иначе их проекции были бы аффинно эквивалентны. Следовательно, векторы  $e_1 = A_1A_2$ ,  $e_2 = A_1A_3$  и  $e_3 = A_1A_4$  образуют базис в трехмерном пространстве. Разложим вектор  $A_1A_5$  по этому базису:  $A_1A_5 = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ . Поскольку проекция на плоскость сохраняет линейную комбинацию векторов, то это же соотношение выполнено для проекций, откуда получаем систему линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Эта система, очевидно, не имеет решений, поскольку ранг расширенной матрицы равен 4.

Вообще говоря, в случае  $n$  точек получается  $3(n - 4)$  переменных и  $4(n - 4)$  уравнений, т.е. решение существует далеко не для любых наборов проекций. Ниже приводится необходимое и достаточное условие существования решения.

**Определение 5. Условие коллинеарности двух проекций.** Пусть заданы изображения  $\mathcal{A}' = (A'_1, \dots, A'_n)$  и  $\mathcal{A}'' = (A''_1, \dots, A''_n)$ . Пусть в изображениях  $\mathcal{A}'$  и  $\mathcal{A}''$  точки  $A'_{i_1}, A'_{i_2}, A'_{i_3}$  не лежат на одной прямой и  $A''_{i_1}, A''_{i_2}, A''_{i_3}$  не лежат на одной прямой. Рассмотрим аффинное отображение  $\mathcal{T}$ , которое переводит  $\mathcal{T} : A'_{i_1} \mapsto A''_{i_1}$ ,  $\mathcal{T} : A'_{i_2} \mapsto A''_{i_2}$ ,  $\mathcal{T} : A'_{i_3} \mapsto A''_{i_3}$ . Будем говорить, что изображения  $\mathcal{A}'$  и  $\mathcal{A}''$  **коллинеарны** относительно точек  $i_1, i_2, i_3$ , если все векторы  $\mathcal{T}(A'_i)A''_i$  попарно взаимно коллинеарны (нулевой вектор коллинеарен любому). Будем это обозначать как  $\mathcal{A}' \parallel_{i_1, i_2, i_3} \mathcal{A}''$ .

**Теорема 6.** Даны изображения  $\mathcal{A}' = (A'_1, \dots, A'_n)$  и  $\mathcal{A}'' = (A''_1, \dots, A''_n)$ . Пусть в изображениях  $\mathcal{A}'$  и  $\mathcal{A}''$  выбраны по 4 соответствующие

точки (не ограничивая общности можно считать, что их индексы 1, 2, 3, 4), обладающие следующими свойствами: а) Первые три  $A'_1, A'_2, A'_3$  не лежат на одной прямой и  $A''_1, A''_2, A''_3$  не лежат на одной прямой. б) Изображения  $A'_1 A'_2 A'_3 A'_4$  и  $A''_1 A''_2 A''_3 A''_4$  не являются аффинно-эквивалентными. Тогда необходимым и достаточным условием существования решения Задачи 1 (восстановления с точностью до аффинной эквивалентности) является условие коллинеарности изображений  $\mathcal{A}'$  и  $\mathcal{A}''$  относительно тройки  $A_1, A_2, A_3$ .

**Замечание:** Если изображения  $\mathcal{A}'$  и  $\mathcal{A}''$  аффинно эквивалентны, то задача 1 допускает тривиальное решение — любое из изображений можно взять в качестве исходного и спроектировать по произвольному направлению — результат будет аффинно-эквивалентен.

Докажем теорему 6.

Выберем какие-либо четыре точки изображения, не лежащие в одной плоскости. В дальнейшем будем называть эти точки опорными. Не ограничивая общности, можно считать, что это точки  $A_1, A_2, A_3, A_4$ . Введем трехмерный базис  $\vec{e}_1 = A_1 A_2$ ,  $\vec{e}_2 = A_1 A_3$  и  $\vec{e}_3 = A_1 A_4$ , начало координат поместим в  $A_1$  (см. рис. 3), будем называть этот базис **опорным**. Тогда любую точку  $A_i$  можно задать координатами в опорном базисе  $(x_i, y_i, z_i)$ , где  $\overrightarrow{A_1 A_i} = x_i \cdot \vec{e}_1 + y_i \cdot \vec{e}_2 + z_i \cdot \vec{e}_3$ . Заметим, что при проектировании на плоскость линейные комбинации векторов сохраняются, т.е.  $P(\overrightarrow{A_1 A_i}) = x_i \cdot P(\vec{e}_1) + y_i \cdot P(\vec{e}_2) + z_i \cdot P(\vec{e}_3)$ . То же верно и для аффинных преобразований, следовательно,  $\overrightarrow{A'_1 A'_i} = x'_i \cdot \vec{e}_1 + y'_i \cdot \vec{e}_2 + z'_i \cdot \vec{e}_3$ . Таким образом, если взять произвольную проекцию тела  $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_n)$  а потом произвести невырожденные аффинные преобразования, то указанные соотношения будут выполняться.

Пусть есть две проекции  $(A'_1, \dots, A'_n)$  и  $(A''_1, \dots, A''_n)$ . Построим аффинные преобразования  $\mathcal{T}'$  и  $\mathcal{T}''$ , переводящие  $A'_1$  и  $A''_2$  в точку  $(0, 0)$ ,  $A'_2$  и  $A''_2$  в точку  $(1, 0)$ ,  $A'_3$  и  $A''_3$  в точку  $(0, 1)$ , соответственно.

Допустим, что при таких преобразованиях точка  $A'_4$  переходит в точку с координатами  $\mathcal{T}'(A'_4) = B'_4(x'_4, y'_4)$ , а точка  $A''_4$  — в точку с координатами  $\mathcal{T}''(A''_4) = B''_4(x''_4, y''_4)$ . Допустим, что исходная точка  $A_i$  имела аффинные координаты  $(x_i, y_i, z_i)$ . Тогда, спроектировав и применив аффинные отображения  $\mathcal{T}'$  и  $\mathcal{T}''$ , получим, что координаты (двумерные) будут равны  $\mathcal{T}'(A'_i) = B'_i(x_i + x'_4 z_i, y_i + y'_4 z_i)$  и  $\mathcal{T}''(A''_i) = B''_i(x_i + x''_4 z_i, y_i + y''_4 z_i)$ . Несложно заметить, что вектор  $\overrightarrow{B'_i B''_i}$  имеет координаты  $\overrightarrow{B'_i B''_i} = z_i \cdot (x''_4 - x'_4, y''_4 - y'_4)$ . Таким образом, получаем, что все эти векторы коллинеарны

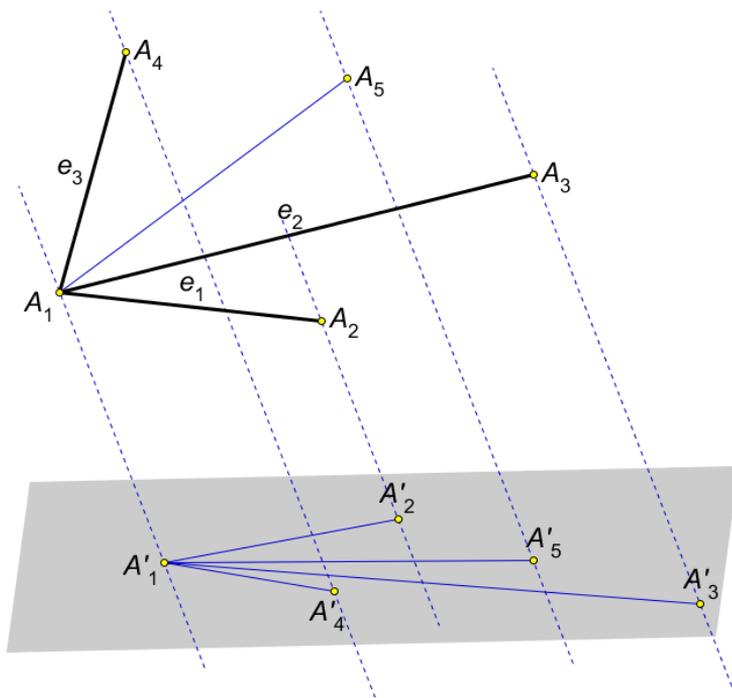


Рис. 3. К доказательству теоремы 6.

вектору  $\overrightarrow{B'_4 B''_4}$ , а их длины пропорциональны величине  $z_i$ . Это доказывает необходимость условия коллинеарности изображений.

Покажем, что это же условие коллинеарности является и достаточным для существования решения. Пусть  $\mathcal{A}' \parallel_{1,2,3} \mathcal{A}''$ , т.е. изображения  $\mathcal{A}'$  и  $\mathcal{A}''$  коллинеарны относительно  $A_1, A_2, A_3$ ,  $\mathcal{T}$  — аффинное отображение, переводящее  $A'_i \mapsto A''_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Обозначим  $C_i = \mathcal{T}(A'_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Выберем евклидову систему координат и построим точки  $\tilde{A}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  с координатами  $x'_i, y'_i, \tilde{z}_i$ , где  $\tilde{z}_i$  выбрано из условия

$$\overrightarrow{C_i A''_i} = \tilde{z}_i \cdot \overrightarrow{C_4 A''_4}. \quad (1)$$

Рассмотрим тело, состоящее из точек  $\tilde{A}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Выберем плоскость  $z = 0$  и направление  $p_1(0, 0, 1)$ . Очевидно, проекции точек в указанном направлении  $\tilde{A}_i$  будут иметь координаты  $(x'_i, y'_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Рассмотрим теперь вектор  $\overrightarrow{p_2}(x''_4 - x'_4, y''_4 - y'_4, -1)$  в качестве направления проектирования (на ту же плоскость). Точки  $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3$  лежат в указанной плоскости, поэтому их проекции совпадут с исходными точками. Точка  $\tilde{A}_4(0, 0, 1)$  будет спроектирована в точку  $P(\tilde{A}_4) = A''_4(x''_4, y''_4)$ , поскольку вектор  $\overrightarrow{p_2} \parallel A_4 A''_4$ .

Покажем, что остальные точки  $\tilde{A}_i$ , тоже будут проектироваться в точки  $A''_i(x''_i, y''_i)$ ,  $i = 5, \dots, n$ . Отложим вектор  $\tilde{z}_i \cdot \overrightarrow{p_2}$  от точки  $\tilde{A}_i(x_i, y_i, z_i)$ . Тогда конец вектора попадет в точку с координатами  $(x'_i, y'_i) + z_i \cdot (x''_4 - x'_4, y''_4 - y'_4, 0)$ , которая и будет проекцией  $\tilde{A}_i$  на плоскость  $z = 0$  по направлению  $\overrightarrow{p_2}$ . Поскольку  $z_i$  выбрано из условия 1, то указанная проекция совпадет с  $A''_4$ .

**Следствие 7.** *Поскольку существование трехмерного тела не зависит от выбора опорных точек, то условие коллинеарности также не зависит от выбора четырех исходных точек (не лежащих в одной плоскости). Поэтому в дальнейшем будем говорить просто про условие коллинеарности изображений и обозначать  $\mathcal{A}' \parallel \mathcal{A}''$ .*

## 4. Восстановление трехмерного тела с точностью до метрической эквивалентности проекций

### 4.1. Некоторые свойства проекции двумерного изображения на прямую

Пусть заданы точки  $A_1, \dots, A_n$ , прямая  $L$  и  $\overrightarrow{p}$  — допустимое направление проекции. Будем обозначать  $a_i$  прямые, проходящие через  $A_i$  параллель-

но  $\vec{p}$ . Будем обозначать  $A'_i$  — проекции точек  $A_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Пусть на прямой  $L$  введена система координат — начало координат  $O$  и единичный вектор  $\vec{e}_1$ . Рассмотрим  $F_{L,p}(\mathcal{A}) = (X(A'_1), \dots, X(A'_n))$  — отпечаток изображения  $\mathcal{A}$ .

**Лемма 8.** Пусть  $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$  — угол между нормалью к прямой  $l$  и вектором  $\vec{p}$ . Тогда расстояние между прямыми  $a_i$  и  $a_j$  равно  $|(X(A'_i) - X(A'_j)) \cdot \cos \varphi|$ .

*Доказательство.* Очевидно следует из определения косинуса. (см. рис. 4)

Рассмотрим  $\rho(a_i, a_j)$  — ориентированное расстояние между прямыми  $a_i$  и  $a_j$ , которое положительно, если прямая  $a_j$  лежит в положительной полуплоскости по отношению к  $a_i$  (т.е. в той полуплоскости, куда направлен вектор нормали  $\vec{n}_i$ ), и отрицательно в противном случае.

**Лемма 9.** Пусть  $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$  — угол между нормалью к прямой  $L$  и вектором  $\vec{p}$ . Пусть нормали к прямым  $a_i$  выбраны так, что образуют острый угол с  $\vec{e}_1$  — положительным направлением прямой  $L$ . Тогда ориентированное расстояние равно

$$\rho(a_i, a_j) = (X(A'_j) - X(A'_i)) \cdot \cos \varphi.$$

*Доказательство.* Очевидно следует из леммы 8 и сохранения порядка точек при проектировании.

**Лемма 10.** Пусть  $T_{\vec{v}}$  — параллельный перенос на вектор  $\vec{v}$ , Пусть  $L_1 = T_{\vec{v}}(L)$  — образ прямой  $L$ . Тогда между координатами проекций на прямые  $L$  и  $L_1$  выполнено соотношение

$$X_{L_1}(A_i) = X_L(A_i) + C,$$

где  $C = C(\vec{v}, \vec{p}, \vec{e})$ . Таким образом, при параллельном переносе прямой  $L$  координаты отпечатка  $F_{L,p}$  изменяются на одну и ту же величину.

*Доказательство.* Пусть точка  $O_1 = T_{\vec{v}}(O)$ , а  $O'_1$  — ее проекция (см. рис. 5). Тогда  $X_{L_1}(A''_i) = X_L(A'_i) - X_L(O'_1)$ .  $\square$

**Лемма 11.** Пусть  $T_{\vec{v}}$  — параллельный перенос на вектор  $\vec{v}$ , точки  $B_i = T_{\vec{v}}(A_i)$  — образы точек исходного изображения. Тогда между координатами проекций выполнено соотношение

$$X(B'_i) = X(A'_i) + C,$$

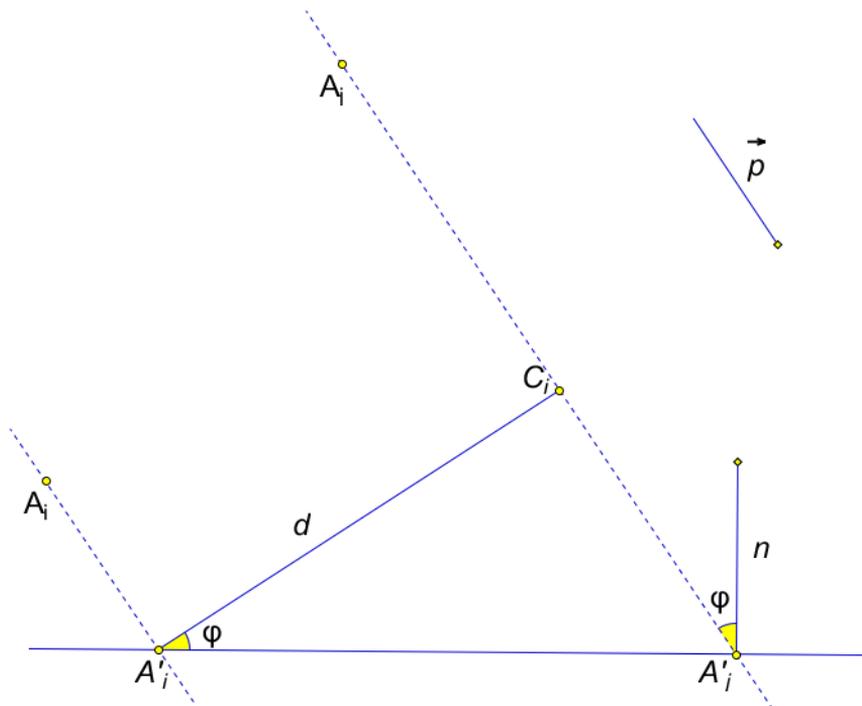


Рис. 4. К лемме 8

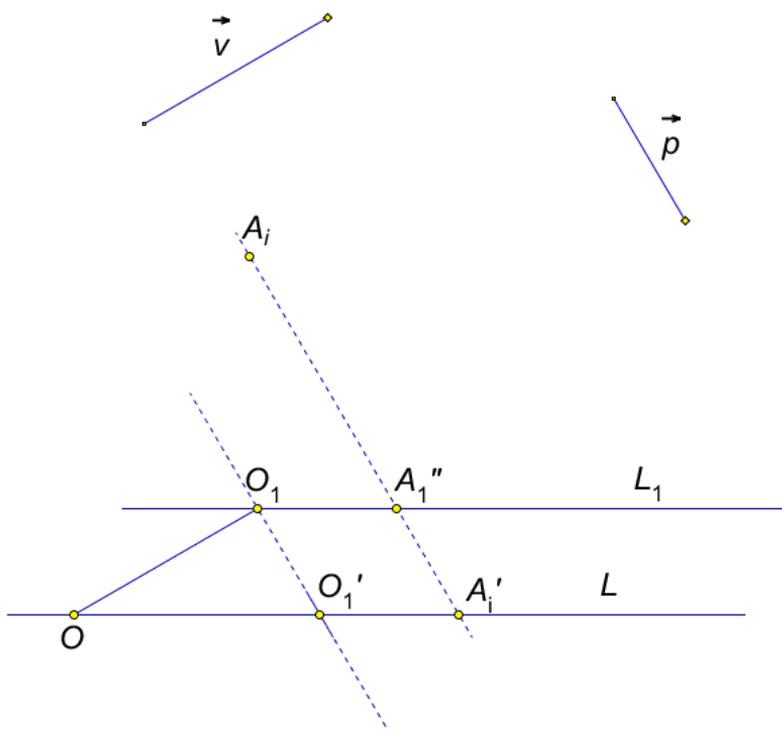


Рис. 5. К лемме 10

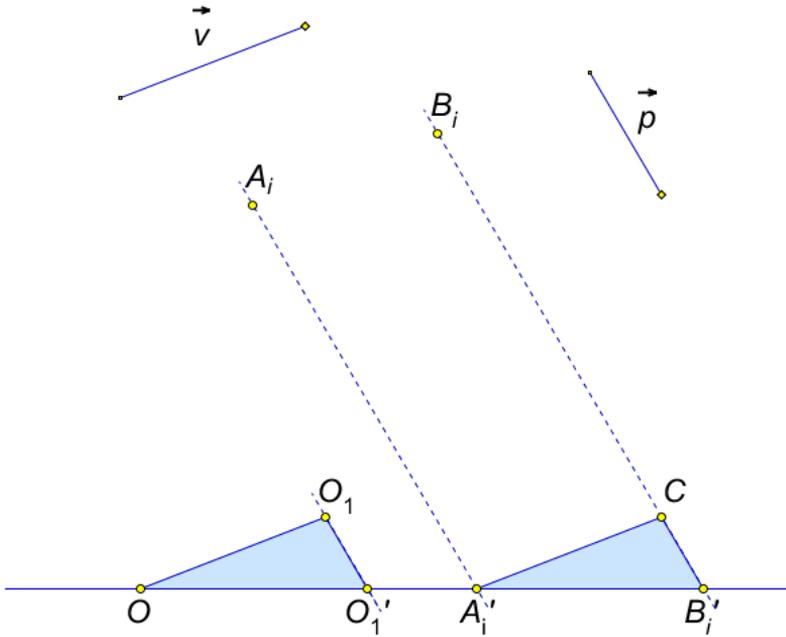


Рис. 6. К лемме 11

где  $C = C(\vec{v}, \vec{p}, \vec{e})$ . Таким образом, при параллельном переносе изображения координаты отпечатка изображения  $X(A'_1), \dots, X(A'_n)$  изменяются на одну и ту же величину.

*Доказательство.* Пусть точка  $O_1 = T_{\vec{v}}(O)$ , а  $O'_1$  — ее проекция (см. рис. 6). Тогда из равенства треугольников  $\triangle OO_1O'_1$  и  $\triangle A'_iC_iB'_i$  следует, что  $X(B'_i) = X(A'_i) + X(O'_1)$ .  $\square$

Выделим некоторую точку изображения. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что выделена точка  $A_1$ . Параллельным переносом получим из прямой  $L$  прямую  $L_1$ , проходящую через точку  $A_1$ . Пусть точки  $A_1, \dots, A_n$  проектируются в точки  $A'_1, \dots, A'_n$ , расположенные на прямой  $L_1$ . На прямой зададим систему координат: выберем  $A'_1 = A_1$  в качестве начала координат и направление  $A'_1A'_2$  в качестве

положительного (если проекции  $A'_1$  и  $A'_2$  совпали, то выберем вместо  $A_2$  какую-то другую точку). Верна следующая

**Лемма 12.** Пусть задана прямая  $L_1$ , проходящая через точку  $A_1$ ,  $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$  — угол между нормалью к прямой  $L_1$  и вектором  $\vec{p}$ . Пусть задан угол  $\theta \in [0; 2\pi)$ , такой, что  $\varphi + \theta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Рассмотрим поворот  $R_{A_1}^\theta$  относительно  $A_1$ , обозначим  $B_i = R_{A_1}^\theta(A_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  — образы точек при этом повороте. Рассмотрим проекцию изображения  $\mathcal{B} = (B_1, \dots, B_n)$  на ту же прямую  $L_1$  (не повернутую) по направлению  $\vec{p}' = R_{A_1}^\theta(\vec{p})$ . Тогда верны следующие соотношения ( $i = 1, \dots, n$ ):

$$X(B'_i) \cdot \cos(\varphi + \theta) = X(A'_i) \cdot \cos(\varphi).$$

*Доказательство.* Применим лемму 8 к исходному изображению  $\rho(a_1, a_i) = X(A'_i) \cdot \cos \varphi$  и к повернутому изображению:  $\rho(b_1, b_i) = X(B'_i) \cdot \cos(\varphi + \theta)$ . Заметим, что расстояние между прямыми не меняется при повороте, откуда и вытекает утверждение леммы.

Таким образом, из леммы 12 вытекает, что при повороте исходного изображения координаты его отпечатка остаются пропорциональными друг другу.

**Определение 13.** Будем считать эквивалентными отпечатки  $X(A'_1), \dots, X(A'_n)$  и  $X(B'_1), \dots, X(B'_n)$  и обозначать  $X(A'_1), \dots, X(A'_n) \equiv X(B'_1), \dots, X(B'_n)$ , если существует  $\lambda \neq 0$ , такое, что  $X(A'_i) = \lambda X(B'_i)$ . Класс эквивалентности будем называть проективными координатами пучка прямых  $(a_1, \dots, a_n)$ . Видно, что при повороте изображения как целого (или, соответственно, при повороте прямой  $L$ ) эти координаты не меняются.

Зафиксируем теперь изображение и прямую  $l$  и будем менять только направление проектирования  $\vec{p}$ . Следующая лемма описывает, как при этом меняются проективные координаты пучка прямых.

**Лемма 14.** Введем полярную систему координат следующим образом: полюс разместим в точке  $A_1$ , луч  $(A_1 A_2[$  выберем в качестве полярной оси. Тогда каждая точка изображения  $A_i$  будет обладать полярными координатами  $(r_i, \varphi_i)$  ( $i = 2, \dots, n$ ). Пусть направление проектирования образует угол  $\psi$  с полярной осью, а проектирование производится на прямую  $A_1 A_2$ . Тогда координаты проекции точки  $A_i$  будут равны  $X_\psi(A'_i) = r_i \cos \varphi_i - r_i \sin \varphi_i \operatorname{ctg} \psi$ .

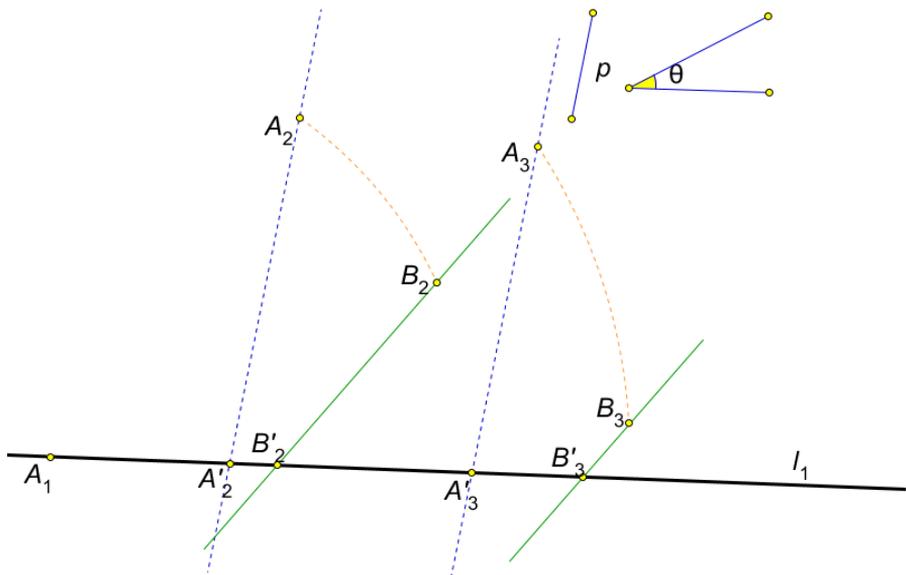


Рис. 7. Поворот изображения

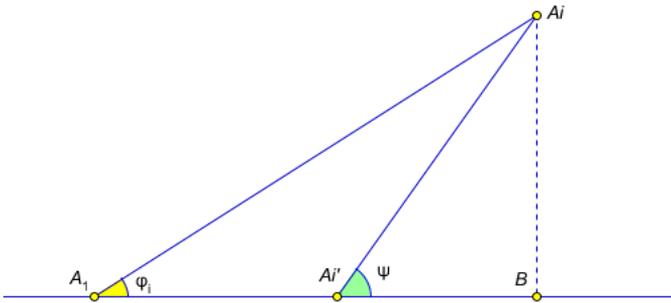


Рис. 8. К лемме 14.

*Доказательство.* Очевидно,  $A_1B = r_i \cos \varphi_i$ , откуда получаем равенство  $A_i'B = A_iB \cdot \operatorname{ctg} \psi = r_i \sin \varphi_i \operatorname{ctg} \psi$  (см. рис. 8).

**Следствие 15.** *Заметим, что  $t = \operatorname{ctg} \psi$  пробегает все значения из  $\mathbb{R}$ . Таким образом, в лемме 14 в параметрическом виде задана прямая в  $n-1$  мерном пространстве. Если же искусственно добавить бесконечно удаленную точку, соответствующую  $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = \infty$ , то получим прямую в соответствующем проективном пространстве.*

## 4.2. Совмещение двух изображений при проекции на прямую

**Теорема 16.** *Пусть заданы два изображения, состоящие из 4 точек  $\mathcal{A} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$  и  $\mathcal{B} = (B_1, B_2, B_3, B_4)$ . Можно разместить эти изображения, прямую  $L$  и выбрать направления проекций таким образом, что  $F_{p_1, L}(\mathcal{A}) = F_{p_2, L}(\mathcal{B})$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим изображения  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  и поставим в соответствие прямые на проективной плоскости (как в Следствии 15). На проективной плоскости прямые пересекаются в одной точке  $\Xi$  с координатами  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  (если прямые совпадают, то возьмем произвольную точку, принадлежащую им).

Этой точке соответствуют значения углов  $\psi_a$  и  $\psi_b$ , при которых

$$F_{\psi_a, l}(A_1, A_2, A_3) \sim (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

$$F_{\psi_b, l}(B_1, B_2, B_3) \sim (\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Рассмотрим соответствующие направления проектирования  $p_a$  и  $p_b$ . Расположим изображения  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  на плоскости таким образом, чтобы точки  $A_1$  и  $B_1$  совпали, а прямые  $L_1$  и  $L_2$  выберем перпендикулярно направлениям  $p_1$  и  $p_2$  и проходящими через  $A_1 = B_1$ . Тогда проекцией точек  $A_1 = B_1$  будет начало координат а отпечатки  $(X(A'_1), X(A'_2), X(A'_3), X(A'_4)) \sim X(B'_1), X(B'_2), X(B'_3), X(B'_4))$ , — пропорциональны, т.к.  $X(A'_1) = X(B'_1) = 0$ , а  $(X(A'_2), X(A'_3), X(A'_4)) \sim (X(B'_2), X(B'_3), X(B'_4))$ , как соответствующие одной и той же точке  $\Xi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  на проективной плоскости. Пусть  $\lambda \neq 0$  — коэффициент пропорциональности, т.е.

$$(X(A'_2), X(A'_3), X(A'_4)) = \lambda(X(B'_2), X(B'_3), X(B'_4)).$$

Можно считать, что  $\lambda < 1$  не ограничивая общности рассуждений (в противном случае поменяем изображения  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  местами). Повернем первое изображение вместе с направлением  $p_1$  так, чтобы угол между  $L_1$  и  $L_2$  стал равен  $\gamma = \arcsin \lambda$  (см. рис 9). Очевидно, при этом проекции точек  $A_i$  совпадут с проекциями соответствующих точек  $B_i$  ( $i = 2, 3, 4$ ).

### 4.3. Восстановление трехмерного изображения

Докажем теорему 6. Рассмотрим две произвольные плоскости  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ , пересекающиеся по прямой  $L$ . Расположим изображение  $\mathcal{A}$  в плоскости  $\Pi_1$ , а  $\mathcal{B}$  в плоскости  $\Pi_2$ , выберем направления проектирования  $p_1$  и  $p_2$  таким образом, чтобы проекции точек изображений  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  на прямую  $L$  по соответствующим направлениям совпали. Согласно теореме 16 это можно сделать. Выберем произвольное  $i = 1, \dots, n$  и проведем плоскость (см. рис. 10) через точку  $C_i = F_{L, p_1}(A_i) = F_{L, p_2}(B_i)$  параллельно направлениям  $p_1$  и  $p_2$ . Такая плоскость существует и единственна, т.к.  $p_1 \parallel p_2$ . Построим в этой плоскости прямые  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  следующим образом:

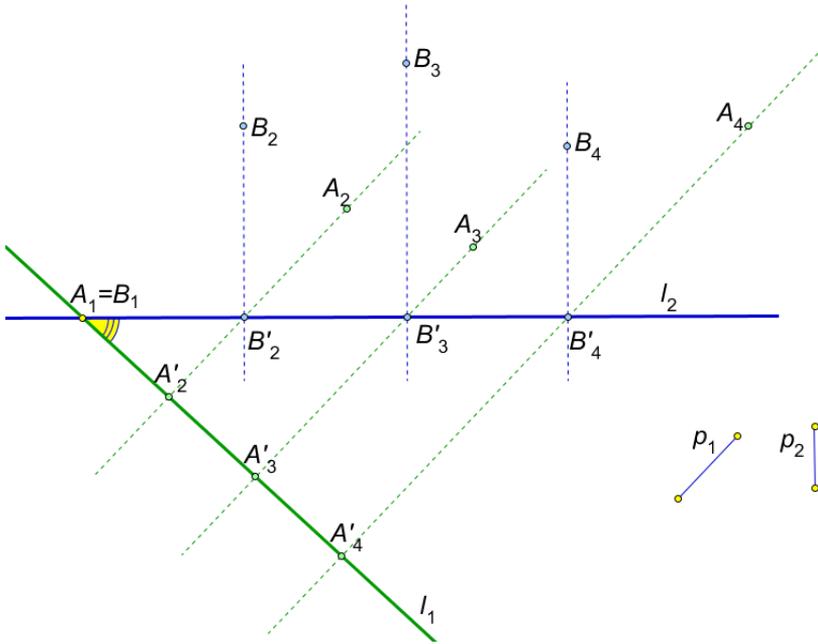


Рис. 9. К лемме 16.

$\alpha_i$  проходит через точку  $A_i$  параллельно  $p_2$ ,  $\beta_i$  — через  $B_i$  параллельно  $p_1$ . Прямые пересекаются в некоторой точке  $X_i$  (параллельны они быть не могут). Тогда, очевидно, точка  $A_i$  является проекцией  $X_i$  на плоскость  $\Pi_1$  по направлению  $p_2$  и  $B_i$  — проекция  $X_i$  на плоскость  $\Pi_2$  по направлению  $p_1$ . Таким образом, построен тетраэдр  $X_1X_2X_3X_4$ , проекции которого на две плоскости в точности совпадают с изображениями  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  (см. рис. 11). Теорема доказана.

Рассмотрим теперь тетраэдр, построенный в главе 3. Существует единственное аффинное преобразование  $F$  трехмерного пространства, переводящее этот тетраэдр в  $X_1X_2X_3X_4$ . Тогда выберем  $X_i = F(A_i)$ ,  $i = 5, \dots, n$ . Итак, образами точек  $X_1, X_2, X_3, X_4$  при указанных проекциях будут точки  $A'_1, A'_2, A'_3, A'_4$  и  $A''_1, A''_2, A''_3, A''_4$ . Поскольку линейные комбинации векторов сохраняются, то и для образов оставшихся точек  $X_i$  ( $i = 5, \dots, n$ ) будут выполнены условия  $\overrightarrow{X'_1X'_i} = x_i \cdot \overrightarrow{X'_1X'_2} + y_i \cdot \overrightarrow{X'_1X'_3} + z_i \cdot \overrightarrow{X'_1X'_4}$  и  $\overrightarrow{X''_1X''_i} = x_i \cdot \overrightarrow{X''_1X''_2} + y_i \cdot \overrightarrow{X''_1X''_3} + z_i \cdot \overrightarrow{X''_1X''_4}$ . Следовательно,  $X'_i$  будут совпадать с точками  $A'_i$ , а  $X''_i$  — с  $A''_i$ .

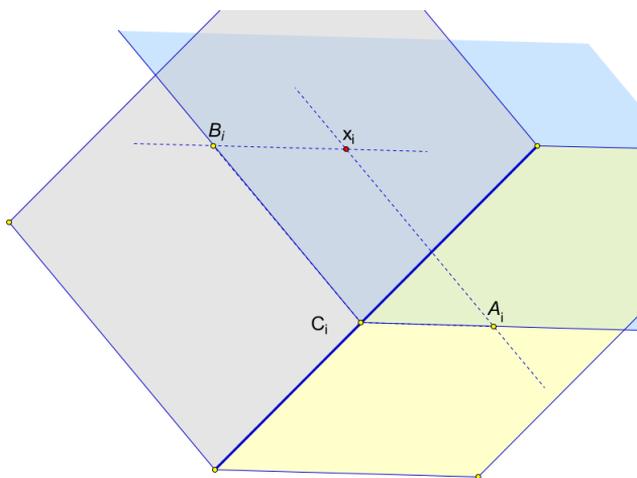


Рис. 10. Восстановление точки по проекциям

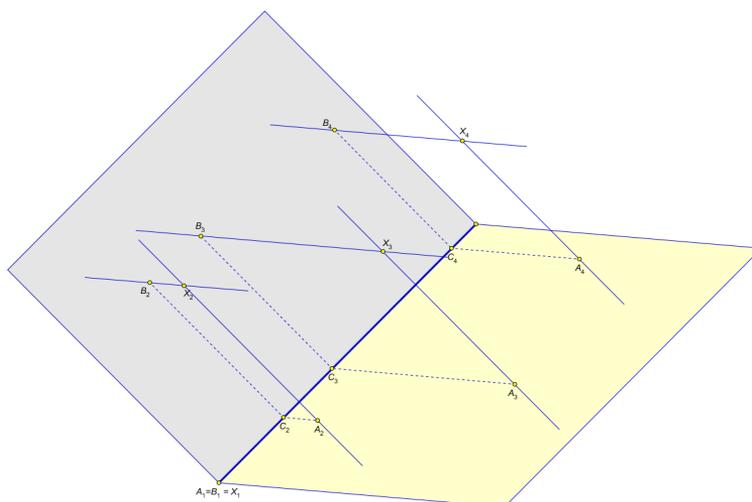


Рис. 11. Восстановление тетраэдра

## 5. Выводы

Доказанные теоремы дают необходимое и достаточное условие восстановления исходного изображения по плоским проекциям. С алгоритмической точки зрения это позволяет проверять возможность восстановления за  $\underline{O}(n)$  (где  $n$  — число точек). Во многих практических задачах машинного зрения взаимное соответствие точек заранее неизвестно (или известно неточно). Таким образом, вообще говоря, задача требует перебора  $n!$  вариантов соответствия, что делает задачу неразрешимой на практике при  $n > 20$ .

Но для проверки коллинеарности изображений достаточно выбрать по 4 точки на одном и другом изображении. Это дает алгоритмическую сложность  $\underline{O}(n^9)$ , что все еще не позволяет использовать такой алгоритм на практике. Если же заранее известно, что некоторые 4 точки не лежат в одной плоскости, то перебор точек на другом изображении дает  $C_n^4$  вариантов, т.е. проверку условия за  $\underline{O}(n^5)$ , что позволяет решать задачи 1-2 при достаточно больших значениях  $n$  ( $n \sim 100$ ).

Также в некоторых задачах распознавания соответствие точек частично известно. Например, известны некоторые дескрипторы точек двух изображений, например, SIFT ([10]), SURF ([11]) или HOG ([12]). Тогда соответствие точек возможно только при условии близости их дескрипторов, что может существенно сократить перебор вариантов.

## Список литературы

- [1] Александров П.С., Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учебник. 2-е изд., стер., СПб.: изд-во «Лань», 2009, 512 стр.
- [2] Алексеев Д.В., Использование метода В.Н. Козлова в образовательном процессе на кафедре МаТИС // Интеллектуальные системы, т. 17, № 1-4, с. 16-20
- [3] Алексеев Д.В., К вопросу о восстановлении тела по плоским проекциям // Интеллектуальные системы. Теория и приложения, т. 18, № 3, с. 47-60, 2014.
- [4] Козлов В.Н., Элементы математической теории зрительного восприятия, М.: Изд-во ЦПИ при мех.-мат. ф-те МГУ, 2001, 128 стр.

- [5] Козлов В.Н., Доказательность и эвристика при распознавании визуальных образов // Интеллектуальные системы, т. 14, № 1-4, 2010 г., с. 35-52
- [6] Kozlov V.N., Image Coding and Recognition and Some Problems of Stereovision // Pattern Recognition and Image Analysis, Vol.7, No. 4, 1997, pp. 448 - 466.
- [7] Kozlov V., Mathematical model of reconstructing a three-dimensional image from plane projections // Pattern Recognition and Image Analysis. — 2011. — Vol. 2. — P. 279-282.
- [8] Kozlov V., Conclusiveness and heuristics in visual recognition // Pattern Recognition and Image Analysis. — 2014. — Vol. 24, no. 4. — P. 1-7.
- [9] Кудрявцев В.Б., Гасанов Э.Э., Подколзин А.С. Введение в теорию интеллектуальных систем. М.: Изд-во ф-та ВМиК МГУ, 2006, 208 с.
- [10] Lowe D. G., Object recognition from local scale-invariant features // Proceedings of the International Conference on Computer Vision 2., 1999, pp. 1150-1157.
- [11] Bay H., Ess A., Tuytelaars T., Van Gool L. // SURF: Speeded Up Robust Features, Computer Vision and Image Understanding (CVIU), Vol. 110, No. 3, pp. 346-359, 2008
- [12] Dalal N., Triggs B., Histograms of oriented gradients for human detection // IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, vol. 1, pp.886-893, 2005.

**On a 3-dimensional body reconstruction using its planar  
projections  
Alexeev D.V.**

This article is devoted to the problem of 3D image reconstruction from its planar projections up to affine and metric equivalence.

The necessary and sufficient conditions for the existence of solution are found.

*Keywords:* affine transformation, congruent transformation, isometry, image recognition, stereo reconstruction, stereovision.