Формальная постановка Тезиса М

Куриленко Н.В.

Рассматривается Тезис М и освещаются основные проблемы с формальным доказательством корректности или ложности данного тезиса. Предложена математическая постановка вопроса и рассмотрены простейшие свойства введённой модели. Описан пример одномерной непрерывной однородной стриктуры, в которой может быть реализована машина с оракулом.

Ключевые слова: тезис Тьюринга-Чёрча, Тезис М, клеточные автоматы, непрерывные однородные структуры.

1. Введение

Каковы пределы возможностей вычислительных машин, и какие задачи мы можем решить с их помощью? Поиски ответов на эти вопросы десятилетиями влияли на направление научно-технического прогресса, начиная с изобретения простейших механических машин и заканчивая производством интегральных схем и устройством современных квантовых компьютеров. За почти столетнюю историю существования этого вопроса было получено много результатов, направленных на понимание этих пределов. К примеру, для роста производительности вычислительных систем были получены такие ограничения как закон Мура [1], асимптотическая сложность схем функциональных элементов [2] и свойства классов вычислительной сложности [3]. В данной статье мы рассмотрим первое и самое фундаментальное ограничение, устанавливающее границы для вычислительных устройств, – введённый в 1936 году тезис Тьюринга-Чёрча[4], [5]. В сильно упрощённой форме тезис гласит:

What is effectively calculable is computable (англ.).

Это утверждение посвящено тому, на какие умственные достижения способен человек, вооружённый только ручкой и бумагой («with pen and paper») и внимательно следующий заранее оговорённым инструкциям.

Очевидно, тезис не ставит фундаментальные ограничения на возможности человека, поскольку ручка и бумага – лишь простейшие механические инструменты, не претендующие на использование полного потенциала известных физических законов. Дабы обобщить тезис на произвольные инструменты, которые способен сконструировать человек, Робин Ганди[6] в 1980 году ввёл понятие «Тезиса М». Обобщение формулируется следующим образом:

What can be calculated by a machine is computable (англ.).

Оно посвящено фундаментальным возможностям человека, которые ограничены только физическими законами нашей вселенной.

Стоит сразу оговориться, что вероятнее всего данное утверждение нельзя ни доказать, ни опровергнуть. Если утверждение корректно, это будет означать, что человеку не под силу сконструировать прибор, способный выполнять вычисления, невоспроизводимые с помощью механических устройств. Полное доказательство корректности подразумевает точное понимания принципов работы физических законов вселенной (то есть достижения, так называемой окончательной теории[7]), что в свою очередь является недостижимой задачей: даже если физическая модель реальности, корректно объясняющая все когда-либо проведённые эксперименты, будет найдена, она всё равно не будет считаться окончательной – мы всё равно не сможем быть уверены, что провели все возможные эксперименты, и что поняли природу реальности как с бесконечно малой погрешностью, так и в бесконечно большом масштабе. Если же данное утверждение ложно, значит такой прибор может быть построен (хотя бы теоретически), однако достоверно убедиться в правильности его работы мы не сможем. Причиной этого является тот факт, что подобное устройство хотя бы в какой-то его части будет недискретно (иначе его работа может быть симулирована на компьютере), а поскольку сознание людей дискретно (подробнее это утверждение будет рассмотрено в §3), мы не сможем верифицировать исправную работу прибора, даже при помощи специальных устройств. Из-за этого в научной литературе вычисления за пределами класса вычислимых по тьюрингу функций часто именуют мифом [8].

Тем не менее, несмотря на недоказуемость данных утверждений, мы всё ещё можем рассмотреть вопрос о том, возможны ли в принципе сверхтьюринговые вычисления при тех или иных физических законах (пусть даже мы и не сможем сконструировать соответствующий прибор). В данной статье мы рассмотрим математическую постановку этой задачи и разберём несколько примеров её решения.

2. Математическая модель

Как будет показано в §3, природа тезиса носит метафизический характер, и поэтому при анализе подобного утверждения проще определить близкую к нему формальную математическую задачу. Прежде всего, необходимо выбрать математическую модель, подходящую для описания физической среды и процесса вычислений в ней. Если мы возьмём все когда-либо серьёзно рассматриваемые физические модели, то обнаружим, что большинство из них обладает общими свойствами, такими как:

- конечное число измерений пространства и одно выделенное измерение времени
- непрерывность пространства и времени
- непрерывность или дискретность значений в каждой из точек пространства
- однородность физических законов

Такими свойствами, к примеру, обладает классическая и квантовая теория поля и общая теория относительности. Математическую модель, описывающую среды с подобными свойствами, называют моделью однородных структур. Нас будут интересовать её частные случаи, такие как клеточные автоматы и непрерывные однородные структуры, и условия, при которых внутри данных структур могут быть произведены сверхтьюринговые вычисления. Очевидно, что в дискретной однородной структуре невозможны сверхтьюринговые вычисления, поскольку любая такая среда моделируется с помощью тьюринговой машины. Но как только мы добавляем непрерывность в какой-либо части модели, вопрос тут же усложняется. Чтобы проиллюстрировать это на примере, рассмотрим непрерывную однородную структуру, в которой такие вычисления возможны.

2.1. Пример гипервычислений в непрерывной среде

Приведём теоретический аналог тезиса М для более простой среды. Для этого будем использовать модель однородных структур, поскольку данная модель хорошо изучена и изначально была создана именно как общая упрощенная модель физических сред [9]. В частности, будем рассматривать дискретную среду с непрерывными значениями в каждой точке. Модель носит название continuous cellular automata (англ.) и наглядно рассмотрена в книге Стивена Вольфрама «A new kind of science»[10].

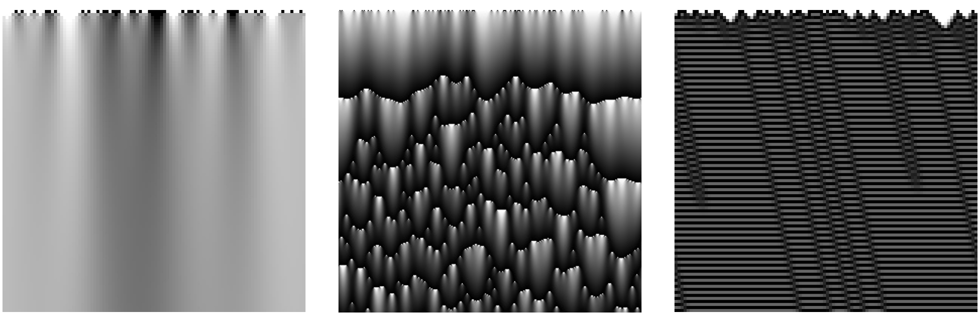
Одномерной непрерывной однородной структурой с окрестностью величины 2 называют счётное множество $\{c_i, i \in \mathbb{Z}\}$ элементов обладающее следующими свойствами:

1) В момент времени t_0 каждому элементу соответствует действительное число $c_i(t_0)$ (состояние элемента), заданное на отрезке $\mathbb{R}[0,1]$

2) В момент времени $t_0 + n$, $(n \in \mathbb{N})$ состояние элемента $c_i(t_0 + n)$ определено по правилу $c_i(t_0+n) = f(c_i(t_0+n-1), c_{i-1}(t_0+n-1))$, где $f : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ – функция, фиксированная для данной структуры

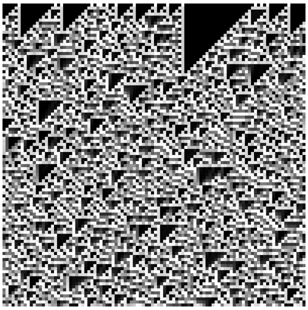
Элементы однородных структур часто называют клетками, а функции f - эволюционными правилами или законами изменения.

Поскольку f двуместна, её легко можно визуализировать в виде графика или тепловой карты (рис. 2b), а «участок» структуры за произвольный период [t, t + n] удобно визуализировать в виде окрашенного поля (рис. 2a). Примеры непрерывных однородных структур с окрестностью 3 изображены на рис. 1. Пример непрерывной однородной структуры с окрестностью 2 изображен на рисунке 2.

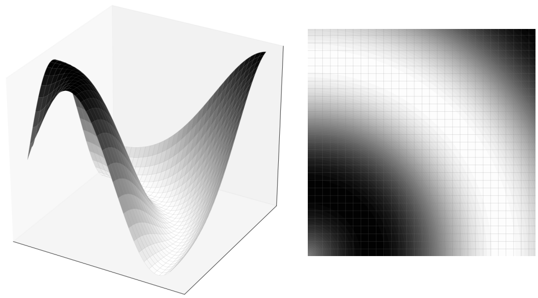


1a. $(x+y+z)/3$ 1b. $\{(x+y+z)/3+.01\}$ 1c. $\sin(x+y+z/2)$

Рис. 1. Примеры структур с трёхместными функциями изменения.



2a. Поведение



2b. График функции изменения

Рис. 2. Структура с функцией изменения $f(x,y) \equiv \frac{1+\sin(5.5\|(x,y)\|_2)}{2}$.

В зависимости от шаблона соседства (окрестности) и законов изменения однородные структуры могут быть использованы для проведения тех же вычислений, на которые способна универсальная тьюринговая машина. Это утверждение очевидно, потому что саму универсальную машину тьюринга можно рассматривать как динамическую дискретную однородную структуру. Также очевидно, что и непрерывные однородные структуры могут быть полны по тьюрингу: для этого достаточно доопределить произвольным образом функцию изменения дискретной однородной структуры до функции изменения непрерывной однородной структуры. Построим пример структуры, обладающей свойством полноты по тьюрингу:

Рассмотрим дискретную однородную структуру, функция изменения которой выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{llll} f(0,0,0)=0, & f(0,0,1)=1, & f(0,1,0)=1, & f(0,1,1)=1, \\ f(1,0,0)=0, & f(1,0,1)=1, & f(1,1,0)=1, & f(1,1,1)=0. \end{array}$$

Эта структура известна под именем Rule 110. В 2000 году Мэтью Кук показал, что данная однородная структура способна симулировать внутри себя машину тьюринга [11]. Для начала мы хотим, чтобы дискретная однородная структура с окрестностью 2 симулировала Rule 110. Для этого нам надо подобрать 4 дополнительных состояния (помимо 0 и 1) – a, b,

c и d:

$$\begin{array}{llll} f(0,0)=a, & f(0,1)=b, & f(1,0)=c, & f(1,1)=d, \\ f(a,a)=0, & f(a,b)=1, & f(b,c)=1, & f(b,d)=1, \\ f(c,a)=0, & f(c,b)=1, & f(d,c)=1, & f(d,d)=0. \end{array} \qquad (1)$$

	0	a	b	c	d	1
0	a	0	0	0	0	c
a	0	0	0	0	0	0
b	0	1	0	1	0	0
c	0	0	1	0	1	0
d	0	0	1	0	0	0
1	b	0	0	0	0	d

Таблица 1.

Легко показать, что обе структуры полны по тьюрингу, а значит эквиваленты.

Теперь рассмотрим функцию, изображённую на рис. 3. Данная функ-

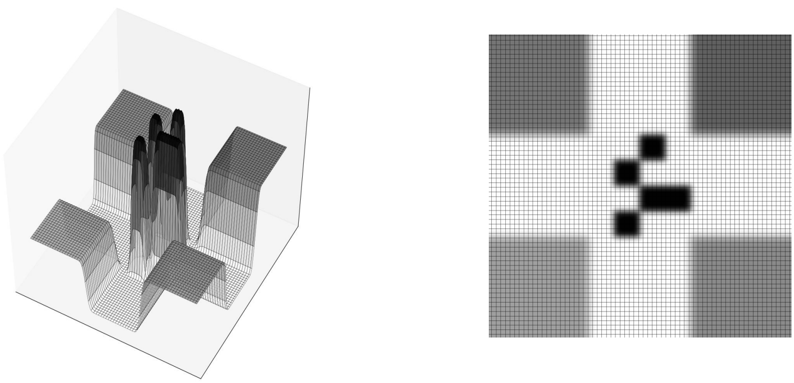


Рис. 3. Аналог Rule 110 в непрерывной среде.

ция изменения непрерывной среды построена на основе формул (1) при $a = \frac{9}{24}$, $b = \frac{11}{24}$, $c = \frac{13}{24}$, $d = \frac{15}{24}$. Предположим мы захотим использовать эту среду для проведения вычислений. В §3 будет показано, что нам стоит придерживаться сценария, в котором восприятие человека, также как и любые его действия в физическом смысле обладают некоторой неточностью. То есть мы можем записывать и считывать значения только с некоторой погрешностью ϵ (погрешностью в данном случае является диаметр окрестности, в которую всегда попадает точка при записи или считывании). Если ϵ меньше, к примеру, 1/8, то из рисунка видно, что мы можем устанавлить в произвольной ячейке состояние 0 или 1, и лишь с некоторой вероятностью – состояния a, b, c и d. Поскольку (как показано на рис. 3) состояний 0 и 1 достаточно, чтобы симулировать Rule 110 в данной среде, это означает, что устройству записи и считывания, работающему с погрешностью 1/8 будет доступен весь класс вычислимых по тьюрингу функций.

Далее мы хотим, используя схожий приём, выйти за класс тьюринговых вычислений. Это будет означать возможность симуляции хотя бы одной невычислимой функции, к примеру, фукнции, связанной с известной проблемы остановки [4]. Проблема остановки сводится к вычислению функции из $\mathbb{N}$ в $\{0,1\}$, поведение которой формируется с помощью понятия универсальной тьринговой машины [12]. Обозначим функцию через H. В сущности, мы хотим симулировать функцию H и Rule 110 в одной и той же среде. Как и в примере ранее, введём дополнительные состояния $\{a_i, i \in N\}$ и соответствующие правила вида $f(b_i, b_j) = b_k$ для $b_i, b_j, b_k \in \{0,1,2,3\} \cup \{a_i : i \in N\}$. Будем использовать следующие формулы:

$$1) \quad \begin{array}{llll} f(0,0) = a_1 & f(0,1) = a_2 & f(1,0) = a_3 & f(1,1) = a_4 \\ f(a_1,a_1) = 0 & f(a_1,a_2) = 1 & f(a_2,a_3) = 1 & f(a_2,a_4) = 1 \\ f(a_3,a_1) = 0 & f(a_3,a_2) = 1 & f(a_4,a_3) = 1 & f(a_4,a_4) = 0 \end{array}$$

2) для слова на входе из $\{2,3\}^*$ на выходе получаем один из двух специальных символом a' и a'', соответствующих остановке или бесконечной работе машины

3) $\forall a \in \{0,1\} : f(a,a') = f(a',a) = 0, f(a,a'') = f(a'',a) = 1$

4) $\forall a \in \{0,1\}, b \in \{2,3\} : f(a,b) = f(b,a) = a$

Здесь под "словом на входе"подразумевается записанное в некоторой области среды слово, а под "словом на выходе"подразумеваем значение в ячейке $c_i(t+n)$, если считать, что слово было записано в ячейках с $_i(t)$ по $c_{i+n}(t)$. Полученный закон изменения среды можно записать в матричном виде по аналогии с таблицей 1 (при этом в отличие от таблицы 1 новая таблица будет бесконечно большой):

	0	1	2	3	a_1	a_2	...
0	a_1	a_3	0	0	0	0	...
1	a_2	a_4	1	1	0	0	...
2	0	1	a_4	a_6	0	0	...
3	0	1	a_5	a_7	0	0	...
a_1	0	0	0	0	0	0	...
a_2	0	0	0	0	1	0	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Для того, чтобы превратить таблицу в график непрерывной функции $f : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, необходимо, так же как и на рис. 3, сделать ширину столбцов и строк, соответствующую основным символам – 1, 2, 3, 4 – достаточно большой ($\geq 2\epsilon$), а ширину всех остальных строк и столбцов – достаточно маленькой, чтобы таблица уместилась в таблицу в отрезок $[0,1]$.

Легко заметить, что правил (1), (2), (3) и (4) достаточно, чтобы симулировать в полученнной непрерывной среде Rule 110 (а значит и любое механическое устройство) и работу функции H: с помощью символов 2 и 3 мы записываем на ленту слова, которые хотим направить в функцию H, а с помощью символов 0 и 1 обрабатываем полученные результаты. Аналогиченым образом манипулируя функцией изменения среды, мы можем, взяв реализацию тьюринговой машины в структуре, превратить её в машину с оракулом.

2.2. Формальная постановка вопроса

В общем виде задачу проверки возможности проведения гипервычислений внутри той или иной однородной структуры можно сформулировать в виде поиска значений двуместной функции $F(.,.)$, которая принимает на вход параметры среды и закон её изменения и на выходе выдаёт наличие или отсутствие сверхтьюринговых вычислений. Рассмотрим более подробно, что представляют из себя аргументы F.

Первый аргумент отводится на параметры однородной структуры, такие как дискретность или непрерывность пространства и времени. Как было отмечено в начале раздела, мы придерживаемся только физических сред, обладающих фиксированным набором свойств. Ещё раз перечислим эти свойства:

- непрерывность и конечномерность пространства
- непрерывность и однонаправленность времени

- непрерывность и конечномерность значений в каждой точке

Кроме того, мы рассматриваем среды со стандартной топологией действивильной оси $\mathbb{R}$ в непрерывном случае или топологией $\mathbb{Z}$ – в дискретном случае. В результате, описание типов сред, которые мы можем рассматривать всего лишь 5 кардинальных чисел:

- ω_1 и ω_2 – количество и размерность элентов пространства
- ω_3 – количество моментов времени
- ω_4 и ω_5 – количество и размерность значений в каждой точке

Отметим также, что все структуры, которые мы можем рассматривать, обладают бесконечным пространством и временем, иначе даже тьюринговые вычисления не будут возможны. Таким образом, ω_1 и ω_3 принадлежат $\{\aleph_0, \aleph_1\}$, ω_2 и ω_5 конечны, ω_4 конечно или принадлежит $\{\aleph_0, \aleph_1\}$. Второй аргумент функции F являет собой произвольную функцию изменения среды (вместе с механизмом действия фукнции в окрестности каждой точки), определённой с помощью ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 и ω_5. В итоге функция принимает на вход 5 кардинальных числе и функцию f построенную в соответствие с данными числами.

Дальнейшей работой над этой задачей является выделение различных свойств функции F (данная работа выходит за рамки статьи). К примеру,

$$F(\aleph_0, 1, \aleph_0, 2, 1, f') = 1,$$

где f' – функция изменения для Rule 110. В §2.1 было показано, что

$$\exists f : F(\aleph_0, 1, \aleph_0, \aleph_1, 1, f) = 1.$$

Также легко показывается, что

$$\forall f, \omega', \omega'', \omega''', \omega'''' : F(\omega', \omega'', \aleph_0, \omega''', \omega'''', f) = F(\omega', \omega'', \aleph_1, \omega''', \omega'''', f).$$

3. Недискретные вычислительные машины

До этого момента мы рассматривали достижение сверхтьюринговых вычислений только через некоторое гипотетическое устройство, имеющее дискретный вход и выход и использующее недискретность среды для вычислений, не доступных тьюринговым машинам. Мы сознательно ввели понятие погрешности вычислений, чтобы избежать моделей с недискретным входом и/или выходом. В этой главе мы попытаемся ответить на вопрос, почему данное понятие столь необходимо для рассматриваемой нами задачи.

Устройства с действительным входом или выходом является предметом споров в научном сообществе. Причина заключается в том, что при попытке спроектировать подобное устройство мы рано или поздно сталкиваемся с вопросом о том, (1) как устроены физические законы нашего мира, и (2) как работает человеческое сознания, и как уже было замечено в §1, абсолютно точный ответ на вопрос (1) получить невозможно. В результате, все рассуждения по данной тематике спекулятивный характер.

Покажем, каким образом понятие погрешности связано с вопросами (1) и (2).

Пускай мы создали устройство с действительным выходом, которое выдало результат – некоторое действительное число. Теперь нужно считать выход и узнать, какое же это число. Но каким образом в принципе возможно считать действительное число? По определению это число занимает счётный объём бит информации, и не может быть сохранено на переносной носитель. По той же причине (а также потому что человеческая жизнь конечна) это число не может быть проиграно в виде аудио или видео записи. Рассуждая дальше, заметим, что человеческие органы восприятия неточны по своей природе, и не смогли бы пропустить через себя это число за конечное время без искажений. Единственным выходом из данной ситуации является использование самого сознания в качестве устройства для гипервычислений и надеяться, что сознание (через интуицию или каким-либо другим пока непознанным образом) сможет воспринять это число. Существуют работы, которых, к примеру, приведены аргументы в пользу того, что люди при общении производят сверхтьюринговые вычисления [13], однако, несмотря на наличие подобных статей, самой разумной на сегодняшний день точкой зрения является дискретность сознания. Пока в вопросе о природе сознания не будет достигнут какой-либо сущесвтенный прогресс, существование устройства с дейсвтиельным выходом не может быть доказано в рамках формальной теории. Дополнительные аргументы в пользу описанного выше параграфа можно найти, к примеру, в [8] и [14].

Пусть мы создали устройство с действительным входом, и нам необходимо записать ан входе какое-либо действительное число. Каким образом мы может этого достичь? Вероятно, последовательности действий, приводящей к такому результату, попросту не существует. Прежде всего человек не может это совершить без специального устройства, поскольку, очевидно, человеческий организм не способен на бесконечно точные действия. Значит, нужно построить устройство, действующее с бесконечной точностью. Здесь мы сталкиваемся с фундаментальным утверждением, согласно которому неточные действия приводят к неточному результату. В отличие от рассуждений о природе сознания при известных физических законах данное утверждение является формально доказуемым. Это свойство физических систем хорошо изучено в теории хаоса; здесь мы приведём идею доказательства, основываясь на задаче трёх тел.

В задаче трёх тел (в одной из её форм) мы рассматриваем динамическую систему из трёх точек, меняющуюся по правилу:

$$\begin{gathered}
\ddot{r_1} = -Gm_2 \tfrac{r_1 - r_2}{\|r_1 - r_2\|^3} - Gm_3 \tfrac{r_1 - r_3}{\|r_1 - r_3\|^3} \\
\ddot{r_2} = -Gm_3 \tfrac{r_2 - r_3}{\|r_2 - r_3\|^3} - Gm_1 \tfrac{r_2 - r_1}{\|r_2 - r_1\|^3} \\
\ddot{r_3} = -Gm_1 \tfrac{r_3 - r_1}{\|r_3 - r_1\|^3} - Gm_2 \tfrac{r_3 - r_2}{\|r_3 - r_2\|^3}
\end{gathered}$$

где r_i – радиус-векторы в двумерной системе координат, m_i – массы тел, G – гравитационная постоянная. Предположим, мы можем устанавливать систему в произвольное начальное положение с некоторой точностью. В результате неточности мы не знаем, в каком конкретно положении будут находиться точки после установки, но тем не менее хотим, чтобы спустя некоторое фиксированное время две (к примеру) из трёх точек всегда (несмотря на неточность установки в начальное положение)описывали одну и ту же траекторию. Сразу становится ясно, что траектории двух точек в каждом отдельном случае всё равно будут разные, из-за стороннего влияния третьей точки, поэтому стоит рассматривать задачу не для двух, а сразу для всех точек. Отбрасывая тривиальные случаи, когда, к примеру, все три точки сталкиваются, мы понимаем, что обеспечить такую гарантию не представляется возможным: состояние системы описывается 18 числами (координатами, скоростью и ускорением по оси OX и OY для каждого из трёх тел), а функция изменения этих чисел вне области частных случаев является бесконечно гладкой. То есть существуют два состояния системы, которые переходят в одно и тоже состояние спустя некоторое время, то разность этих состояний будет вектором из нулей, изменяющимся с помощью функции, являющейся тождественным нулём. Это означает, что если система при любом из двух состояний спустя какое-либо время переходит в одно и то же состояние, то два начальных состояния также являются одинаковыми состояниями.

Большинство физических теорий, описывающих нашу реальность, как и в задаче трёх тел, имеют дело только с бесконечно гладкими функциями, и поэтому утверждение о том, что неточные действия приводят к неточному результату, можно распространить и на них. Однако до тех пор, пока нам не известны в точности все физические законы вселенной, это утверждение остаётся всё равно недоказанной гипотезой. Отметим также, что в дискретных однородных структура утверждение неверно: к примеру, в среде Game of Life [15] существуют различные конфигурации, которые спустя несколько итераций становятся неотличимыми.

Таким образом, пока не описаны физические законы вселенной и природа сознания, возможность конструирования устройств, более точных нежели дискретные, фундаментально недосказываема, и, более того, согласно текущему пониманию этих вопросов, это скорее всего невозможно.

Список литературы

[1] Moore G., Cramming more components onto integrated circuits // Electronics — 1965. — Vol. 38, No. 8. — P. 114–117.

[2] Лупанов О. Б. О синтезе некоторых классов управляющих систем // Проблемы кибернетики, М., Физматгиз — 1963. — Вып. 10. — С. 63–97.

[3] Sanjeev A., Boaz B, Computational Complexity: A Modern Approach. — Cambridge University, 2009.

[4] Turing A., On computable numbers with an application to the Entscheidungsproblem //Proceedings of the London Mathematic Society — 1937. — Series 2, Vol. 42. — P. 230–265.

[5] Church A., An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory //American Journal of Mathematics — 1936. — Vol. 58. — P. 345–363.

[6] Gandy R., Church's Thesis and Principles for Mechanisms //The Kleene Symposium — North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1980. — P. 123–148.

[7] Weinberg S., Dreams of a Final Theory. —New York: Pantheon Books, 1992.

[8] Davis M., The myth of hypercomputation //Alan Turing: Life and Legacy of a Great Thinker — Springer, Berlin, 2004. — P. 195-–212.

[9] Toffoli T., Margolus N., Cellular Automata Machines: A New Environment for Modeling — MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1987.

[10] Wolfram S., A New Kind of Science — Wolfram Media Inc., Champaign, 2002.

[11] Cook M., Universality in Elementary Cellular Automata // Complex Systems — 2004. — Vol. 15 — P. 1–40.

[12] Davis M., The Universal Computer: The Road from Leibniz to Turing — W.W. Norton, New York, London, 2000.

[13] Spivey M., Grosjean M., Knoblich G., Continuous attraction toward phonological competitors // Proceedings of the National Academy of Sciences — 2005. — Vol. 102 — P. 10393–10398.

[14] Davis M., Why there is no such discipline as hypercomputation // Applied Mathematics and Computation — 2006. — Vol. 178 — P. 4–7.

[15] Gardner M., The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game "life" // Scientific American — 1970. — Vol. 223 — P. 120-–123.

Formal definition of Thesis M

Kurilenko N.V.

Thesis M is introduced and described in terms of its basic problems with confirming or disproving it. A mathematical formulation of the problem is proposed and the simplest properties of the model are discovered. An example of a one-dimensional continuous cellular stricture in which an oracle machine can be implemented is constructed.

Keywords: Church-Turing thesis, Thesis M, cellular automata, continuous cellular automata.