

О решетке вложения прогрессивных множеств сложности два

П. С. Дергач

В статье приводится результат об описании структуры непосредственного вложения для семейства \mathbb{P}_2 прогрессивных множеств сложности не выше 2. Приводится полная избыточная классификация ребер структуры. При этом возникают 12 типов классификации, для описания которых вводятся понятия согласованности, асинхронности, слабой и сильной синхронности пар арифметических прогрессий в натуральных рядах. Такая постановка задачи является новой и ранее никем не исследовалась.

Ключевые слова: прогрессивное множество, арифметическая прогрессия, структура непосредственного вложения.

Введение

Под прогрессивным множеством в рамках данной работы подразумевается произвольное периодическое подмножество натурального ряда, а под его сложностью — минимальное количество попарно непересекающихся арифметических прогрессий, дающих в объединении это множество. Элементы семейства \mathbb{P}_2 состоят из всех таких подмножеств натурального ряда, которые представимы объединением не более чем двух непересекающихся прогрессий. Поскольку прогрессивные множества сложности 1, в свою очередь, могут быть представлены объединением двух непересекающихся арифметических прогрессий, то семейство \mathbb{P}_2 можно рассматривать как множество всех подмножеств натуральных чисел, представимых в виде объединения ровно двух непересекающихся арифметических прогрессий. Для семейства \mathbb{P}_1 прогрессивных множеств сложности 1

структура вложения строится тривиально. Но уже для \mathbb{P}_2 описание соответствующей структуры является нетривиальной задачей. О решении похожих задач можно прочитать в статьях [1-6]. О других интересных аспектах исследований авторов и других ученых в смежных областях к тематике данной работы можно прочитать в [7-18].

Основные определения

Множество натуральных чисел обозначаем через \mathbb{N} .

Если два множества A и B попарно не пересекаются, то их объединение обозначаем через $A \sqcup B$. Если далее в тексте встречается это обозначение, то это по умолчанию означает, что множества A и B попарно не пересекаются.

Множество целых неотрицательных чисел обозначаем через \mathbb{N}_0 .

Пусть $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}_0$. Тогда *обобщенной арифметической прогрессией с началом a и шагом b* называется множество

$$(a, b) := \{a + ib \mid i \in \mathbb{N}_0\}.$$

Множество всех обобщенных арифметических прогрессий обозначаем через \mathbb{P} .

Множество всех обобщенных арифметических прогрессий (a, b) , у которых $b \neq 0$, обозначаем через \mathbb{P}^+ .

Множество всех подмножеств натуральных чисел, представимых в виде объединения ровно двух непересекающихся арифметических прогрессий, обозначаем через \mathbb{P}_2 . Тогда *структурой вложения G* называем ориентированный граф, вершинами которого являются элементы из \mathbb{P}_2 , а направленное ребро (P_1, P_2) для пары $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$ проводится если и только если выполнены следующие два условия

- 1) $P_1 \subsetneq P_2$;
- 2) не существует $P_3 \in \mathbb{P}_2$ такого, что $P_1 \subsetneq P_3 \subsetneq P_2$.

Пусть $(a, b) \in \mathbb{P}^+$. Обозначим через $(a, b)^+$ множество $\{x \in \mathbb{N} \mid b \mid (x - a)\}$.

Непересекающиеся последовательности $(a, b), (c, d) \in \mathbb{P}^+$ называем *согласованными*, если оба числа b, d четны и

$$(a, b) \cap (c + \frac{d}{2}, d)^+ \neq \emptyset \text{ и } (c, d) \cap (a + \frac{b}{2}, b)^+ \neq \emptyset.$$

Иначе называем эти последовательности *не согласованными*. Говорим, что согласованные последовательности *асинхронны*, если

$$(a, b) \not\subset (c + \frac{d}{2}, d)^+ \text{ и } (c, d) \not\subset (a + \frac{b}{2}, b)^+.$$

Если выполнено только одно из этих условий, то называем эти согласованные последовательности *слабо синхронными*. Если же оба условия не выполнены, то такие согласованные последовательности *сильно синхронны*. Для лучшего понимания этих определений приведем примеры. Последовательности (1, 2) и (2, 4), хоть у них и четные шаги, не согласованные. Последовательности (3, 6) и (6, 10) асинхронны, (1, 2) и (2, 6) — слабо синхронны, (1, 2) и (4, 2) — сильно синхронны.

Говорим, что множество $P_2 \in \mathbb{P}_2$ получено преобразованием подобия с коэффициентами m, n из множества $P_1 \in \mathbb{P}_2$ и пишем $P_1 \vdash_{m,n} P_2$, если $m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}$ и выполнено

$$P_2 = \{nx + m \mid x \in P_1\}.$$

Пусть $k, x \in \mathbb{N}, k \geq 6$ — четное число, $3 \leq x \leq k - 3$ — нечетное число. Тогда вводим обозначения:

$$\mathbf{A}(x, k) := \{n \in \mathbb{N} \mid n - \text{нечетно}; n > k - x;$$

$$\text{НОД}(n, x - 1, k - 1) = 1; \text{НОД}(n, k - 1) \nmid x - 1;$$

\forall собственного делителя t числа n выполнено

$$t < k - x \text{ или } \text{НОД}(t, k - 1) \mid x - 1;$$

$$\mathbf{B}(x, k) := \{n \in \mathbb{N} \mid n - \text{нечетно}; n > k - 1;$$

$$\text{НОД}(n, k - x, k - 1) = 1; \text{НОД}(n, k - x) \nmid x - 1;$$

\forall собственного делителя t числа n выполнено

$$t < k - 1 \text{ или } \text{НОД}(t, k - x) \mid x - 1.$$

Теорема 1. Пусть $P'_1, P'_2 \in \mathbb{P}_2$. Тогда граф G содержит ориентированное ребро (P'_2, P'_1) если и только если это ребро можно преобразованием подобия привести к одному из ребер (P_2, P_1) следующих 12 типов:

- 1) $P_1 = (1, 2) \sqcup (2, 2)$ и **полоса**
- a) $P_2 = (1, 2) \sqcup (4, 2)$,
- b) $P_2 = (3, 2) \sqcup (2, 2)$,
- c) $P_2 = (1, 2) \sqcup (2, 2p)$, p – простое,
- d) $P_2 = (1, 2p) \sqcup (2, 2)$, p – простое,
- e) $P_2 = (1, p) \sqcup (2, p)$, $p > 2$, p – простое;
- 2) $P_1 = (1, 0) \sqcup (3, 1)$ и **точка и полоса отступа 2**
- a) $P_2 = (1, 0) \sqcup (4, 1)$,
- b) $P_2 = (3, 0) \sqcup (4, 1)$,
- c) $P_2 = (1, 2) \sqcup (6, 1)$,
- d) $P_2 = (1, 3) \sqcup (3, 3)$,
- e) $P_2 = (1, 2) \sqcup (4, 2p)$, p – простое;
- 3) $P_1 = (1, 0) \sqcup (k + 1, 1)$, $k > 2$ и **точка и полоса отступа > 2**
- a) $P_2 = (1, 0) \sqcup (k + 2, 1)$,
- b) $P_2 = (k + 1, 0) \sqcup (k + 2, 1)$,
- c) $P_2 = (1, k) \sqcup (k + x + 1, p)$, p – простое, $0 < x < p$, $p|k$,
- d) $P_2 = (1, pm) \sqcup (k + 1, p)$, p – простое, $p \nmid k$, $pm \geq k$ и для всех $m_1|m$ из $m_1 \neq m$ следует $pm_1 < k$,
- e) $P_2 = (1, 0) \sqcup (k + 1, p)$, p – простое, $p|k$, $k \neq p$, $k \neq 2p$;
- 4) $P_1 = (a, 0) \sqcup (b, k)$, $k \nmid (a - b)$ и **точка и внешняя полоса**
- a) $P_2 = (a, 0) \sqcup (b + k, k)$,
- b) $P_2 = (b, 0) \sqcup (b + k, k)$,
- c) $P_2 = (a, 0) \sqcup (b, pk)$, p – простое;
- 5) $P_1 = (a, x) \sqcup (b, y)$, **две несогласованные**
 $(a, x), (b, y)$ не согласованные и **ПОЛОСЫ**
- a) $P_2 = (a + x, x) \sqcup (b, y)$,
- b) $P_2 = (a, x) \sqcup (b + y, y)$,
- c) $P_2 = (a, px) \sqcup (b, y)$, p – простое,
- d) $P_2 = (a, x) \sqcup (b, py)$, p – простое;
- 6) $P_1 = (a, x) \sqcup (b, y)$, **две асинхронные**
 $(a, x), (b, y)$ асинхронные и **ПОЛОСЫ**
- a) $P_2 = (a + x, x) \sqcup (b, y)$,
- b) $P_2 = (a, x) \sqcup (b + y, y)$,

- c) $P_2 = (a, px) \sqcup (b, y)$, p – простое,
d) $P_2 = (a, x) \sqcup (b, py)$, p – простое;
- 7) $P_1 = (1, 2) \sqcup (n + 1, 2n)$, **две слабо синхронные**
 $n > 1$ - нечетно и **полосы, случай 1**
- a) $P_2 = (3, 2) \sqcup (n + 1, 2n)$,
b) $P_2 = (1, 2) \sqcup (3n + 1, 2n)$,
c) $P_2 = (1, 2p) \sqcup (n + 1, 2n)$, p – простое, $p \neq n$,
d) $P_2 = (1, 2) \sqcup (n + 1, 2np)$, p – простое,
e) $P_2 = (1, n) \sqcup (2x + 1, 2p)$, p – простое, $0 < x < p$, $p|n$;
- 8) $P_1 = (1, 2) \sqcup (k, 2n)$, **две слабо синхронные**
 $n > 1$ - нечетно, $k \neq n + 1$ - четно и **полосы, случаи 2,3**
- a) $P_2 = (3, 2) \sqcup (k, 2n)$,
b) $P_2 = (1, 2) \sqcup (k + 2n, 2n)$,
c) $P_2 = (1, 2p) \sqcup (k, 2n)$, p – простое, $p \nmid n$ или $p \mid k - 1$,
d) $P_2 = (1, 2) \sqcup (k, 2np)$, p – простое,
e) $P_2 = (1, 2p) \sqcup (\hat{k}, n)$, p – простое, $p|n$, $p \nmid k - 1$,
 $\hat{k} = k$ при $k < n + 1$ и $\hat{k} = k - n$ при $k > n + 1$;
- 9) $P_1 = (1, 2n) \sqcup (n + 1, 2)$, **две слабо синхронные**
 $n > 1$ - нечетно и **полосы, случай 4**
- a) $P_2 = (1 + 2n, 2n) \sqcup (n + 1, 2)$,
b) $P_2 = (1, 2n) \sqcup (n + 3, 2)$,
c) $P_2 = (1, 2np) \sqcup (n + 1, 2)$, p – простое,
d) $P_2 = (1, 2n) \sqcup (n + 1, 2p)$, p – простое, $p \neq n$,
e) $P_2 = (1, n) \sqcup (2x + n + 1, 2p)$, p – простое, $0 < x < p$, $p|n$;
- 10) $P_1 = (1, 2n) \sqcup (k, 2)$, **две слабо синхронные**
 $n > 1$ - нечетно, $k < n + 1$ - четно и **полосы, случай 5**
- a) $P_2 = (1 + 2n, 2n) \sqcup (k, 2)$,
b) $P_2 = (1, 2n) \sqcup (k + 2, 2)$,
c) $P_2 = (1, 2np) \sqcup (k, 2)$, p – простое,
d) $P_2 = (1, 2n) \sqcup (k, 2p)$, p – простое, $p \nmid n$ или $p \mid k - 1$,
e) $P_2 = (1, n) \sqcup (k, 2p)$, p – простое, $p|n$, $p \nmid k - 1$;
- 11) $P_1 = (1, 2n) \sqcup (k, 2)$, **две слабо синхронные**
 $n > 1$ - нечетно, $k > n + 1$ - четно и **полосы, случай 6**

- a) $P_2 = (1 + 2n, 2n) \sqcup (k, 2)$,
- b) $P_2 = (1, 2n) \sqcup (k + 2, 2)$,
- c) $P_2 = (1, 2np) \sqcup (k, 2)$, p – простое,
- d) $P_2 = (1, 2n) \sqcup (k, 2p)$, p – простое;
- 12) $P_1 = (1, 2) \sqcup (k, 2)$, **две сильно синхронные**
 $k \geq 6$ - *четно и* **полосы**
- a) $P_2 = (3, 2) \sqcup (k, 2)$,
- b) $P_2 = (1, 2) \sqcup (k + 2, 2)$,
- c) $P_2 = (1, 2p) \sqcup (k, 2)$, p – простое, $2p < k - 2$,
- d) $P_2 = (1, 2) \sqcup (k, 2p)$, p – простое,
- e) $P_2 = (1, 0) \sqcup (k - 1, 1)$,
- f) $P_2 = (1, k-1) \sqcup (x, n)$, $3 \leq x \leq k-3$ – нечетное, $n \in A(x, k)$,
- g) $P_2 = (1, n) \sqcup (x, k-x)$, $3 \leq x \leq k-3$ – нечетное, $n \in B(x, k)$.

Доказательство утверждений

Лемма 1. Критерий пересечения. Для любых $a, c \in \mathbb{N}_0$ и $b, d \in \mathbb{N}$ верно

$$(a, b) \cap (c, d) \neq \emptyset \iff a \equiv c \pmod{\text{НОД}(b, d)}.$$

Доказательство леммы см. в [1].

Лемма 2. О подобии. Пусть $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}_2$ и $P_1 \vdash_{m,n} P_3$, $P_2 \vdash_{m,n} P_4$. Тогда ребро (P_1, P_2) проводится в графе G тогда и только тогда, когда ребро (P_3, P_4) проводится в графе G .

Доказательство.

Нам известно, что

$$P_3 = \{nx + m \mid x \in P_1\}, \quad (1)$$

$$P_4 = \{nx + m \mid x \in P_2\}. \quad (2)$$

Пусть ребро (P_1, P_2) проводится в графе G , то есть

1) $P_1 \subsetneq P_2$;

2) не существует $P \in \mathbb{P}_2$ такого, что $P_1 \subsetneq P \subsetneq P_2$.

Из (1), (2) тогда тривиально следует, что $P_3 \subsetneq P_4$. Пусть, тем не менее, существует множество

$$P_5 := (a, b) \sqcup (c, d) \in \mathbb{P}_2, \quad (3)$$

для которого

$$P_3 \subsetneq P_5 \subsetneq P_4. \quad (4)$$

Из (2), (3) и (4) тривиально получаем $(a, b), (c, d) \subset (m, n)$ и значит можно рассмотреть множество

$$P_6 := \left(\frac{a-m}{n}, \frac{b}{n} \right) \sqcup \left(\frac{c-m}{n}, \frac{d}{n} \right). \quad (5)$$

Из (1), (2), (4) и (5) получаем тогда, что $P_1 \subsetneq P_6 \subsetneq P_2$, но этого быть не может. Значит в графе G есть ребро (P_3, P_4) .

Обратно утверждение доказывается еще проще. Пусть ребро (P_3, P_4) проводится в графе G , то есть

1) $P_3 \subsetneq P_4$;

2) не существует $P \in \mathbb{P}_2$ такого, что $P_3 \subsetneq P \subsetneq P_4$.

Из (1), (2) тривиально следует, что $P_1 \subsetneq P_2$. Пусть, тем не менее, существует множество

$$P_7 := (a, b) \sqcup (c, d) \in \mathbb{P}_2, \quad (6)$$

для которого

$$P_1 \subsetneq P_7 \subsetneq P_2. \quad (7)$$

Тогда рассмотрим множество

$$P_8 := (an + m, bn) \sqcup (cn + m, dn). \quad (8)$$

Из (1), (2), (7) и (8) получаем $P_3 \subsetneq P_8 \subsetneq P_4$, а этого быть не может. Значит в графе G есть ребро (P_1, P_2) .

■

Замечание. Эта лемма позволяет нам при описании ребер графа G вместо ребер произвольного вида исследовать лишь ребра «простого» вида, эквивалентные им с точностью до подобия. Это позволяет заметно упростить производимые выкладки.

Лемма 3. О типах вложения. Пусть $(e, f) \subset (a, b) \sqcup (c, d)$, где $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}$. Тогда имеет место одно из следующих утверждений:

- $(e, f) \subset (a, b)$;
- $(e, f) \subset (c, d)$;
- $(e, 2f) \subset (a, b)$ и $(e + f, 2f) \subset (c, d)$;
- $(e + f, 2f) \subset (a, b)$ и $(e, 2f) \subset (c, d)$.

Доказательство.

Возможны 4 случая:

$$a)e \in (a, b), e + f \in (a, b); \quad b)e \in (a, b), e + f \in (c, d);$$

$$c)e \in (c, d), e + f \in (a, b); \quad d)e \in (c, d), e + f \in (c, d).$$

В случае $a)$, очевидно, имеет место первое утверждение.

В случае $b)$ посмотрим на число $e + 2f$. Предположим,

$$e + 2f \in (c, d).$$

Тогда $e + fb \in (a, b)$ и $e + fb \in (c, d)$. Это противоречит попарному непересечению (a, b) и (c, d) . Значит, $e + 2f \in (a, b)$, т.е. $(e, 2f) \subset (a, b)$. Посмотрим теперь на число $e + 3f$. Допустим, что

$$e + 3f \in (a, b).$$

Тогда $e + f + fd \in (a, b)$ и $e + f + fd \in (c, d)$. Это противоречит попарному непересечению (a, b) и (c, d) . Значит, $e + 3f \in (c, d)$, т.е. $(e + f, 2f) \subset (c, d)$. Поэтому верно третье утверждение.

Случаи c, d реализуют соответственно четвертое и второе утверждения и рассматриваются аналогично. ■

Лемма 4. О зигзаге. Пусть $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}$ и

$$(e, 2f) \subset (a, b), (e + f, 2f) \subset (c, d), (a, b) \cap (c, d) = \emptyset.$$

Тогда числа b, d четны и

$$(e, f) \subseteq \left((a, b) \cap \left(c + \frac{d}{2}, d \right)^+ \right) \sqcup \left((c, d) \cap \left(a + \frac{b}{2}, b \right)^+ \right).$$

Доказательство.

Прежде всего заметим, что прогрессии

$$(a, b) \cap \left(c + \frac{d}{2}, d \right)^+ \text{ и } (c, d) \cap \left(a + \frac{b}{2}, b \right)^+$$

попарно не пересекаются, так как $(a, b) \cap (c, d) = \emptyset$. Кроме того,

$$2f = bx = dy$$

для некоторых $x, y \in \mathbb{N}$. Допустим, что x четно. Тогда $f = b\frac{x}{2}$ и значит $e + f \in (a, b)$, ведь $e \in (a, b)$. Но это противоречит тому, что

$$(a, b) \cap (c, d) = \emptyset.$$

Значит x нечетно. Аналогично, y нечетно. Поэтому b и d обязательно будут четны. Докажем, что

$$e + 2f \in \left(c + \frac{d}{2}, d \right)^+.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} e + 2f - c - \frac{d}{2} &= (e + f - c) + (f - \frac{d}{2}) = (e + f - c) + (\frac{d}{2}y - \frac{d}{2}) = \\ &= (e + f - c) + \frac{d}{2}(y - 1). \end{aligned}$$

Первое слагаемое делится на d , так как $e + f \in (c, d)$. Второе слагаемое делится на d , так как y нечетно. Поэтому $e + 2f \in (c + \frac{d}{2}, d)^+$. Отсюда и из делимости $2f$ на d получаем

$$(e, 2f) \subseteq (a, b) \cap (c + \frac{d}{2}, d)^+.$$

Аналогично доказывается, что

$$(e + f, 2f) \subseteq (c, d) \cap (a + \frac{b}{2}, b)^+.$$

Доказательство леммы завершает очевидное равенство

$$(e, f) = (e, 2f) \sqcup (e + f, 2f).$$

■

Лемма 5. Об общем виде слабой синхронизации. Пусть есть множества

$$(a, x), (b, y) \in \mathbb{P}^+$$

и они слабо синхронны. Тогда

$$(a, x) \sqcup (b, y)$$

можно преобразованием подобия перевести в одно из множеств

$$(1, 2) \sqcup (k, 2n), \quad (1, 2n) \sqcup (k, 2),$$

где $k, n \in \mathbb{N}$, k — четно, $n > 1$ — нечетно.

Доказательство.

Слабая синхронность последовательностей $(a, x), (b, y)$ означает, во-первых, что они не пересекаются. Во-вторых, что числа x и y четны. В-третьих, должно быть выполнено

$$(a, x) \cap (b + \frac{y}{2}, y)^+ \neq \emptyset \quad \text{и} \quad (b, y) \cap (a + \frac{x}{2}, x)^+ \neq \emptyset.$$

В-четвертых, одно из условий

$$(a, x) \not\subset (b + \frac{y}{2}, y)^+ \text{ и } (b, y) \not\subset (a + \frac{x}{2}, x)^+$$

верно, а второе — нет. Пусть, без ограничения общности,

$$(a, x) \not\subset (b + \frac{y}{2}, y)^+ \text{ и } (b, y) \subset (a + \frac{x}{2}, x)^+.$$

Отсюда следует, что b представимо в виде $a + \frac{x}{2} + mx$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}$. И что y кратно x , т.е. $y = cx$ для некоторого $c \in \mathbb{N}$. Покажем, что c нечетно. Пусть это не так и $c = 2l, l \in \mathbb{N}$. Тогда

$$(a, x) \cap (b + \frac{y}{2}, y)^+ = (a, x) \cap (a + \frac{x}{2} + mx + lx, cx) = \emptyset,$$

а этого быть не может. Далее, c не может быть равно 1, так как в этом случае получили бы

$$(b + \frac{y}{2}, y)^+ = (a + \frac{x}{2} + mx + \frac{x}{2}, x)^+ = (a + x + mx, x)^+ \supset (a, x).$$

Значит

$$(a, x) \sqcup (b, y) = (a, x) \sqcup (a + \frac{x}{2} + mx, cx) \quad (*).$$

Если $m \geq 0$, то параллельным переносом сдвигаем множество $(*)$ в

$$(\frac{x}{2}, x) \sqcup (x + mx, cx).$$

Осталось только сжать конструкцию в $\frac{x}{2}$ раз и получить $(1, 2) \sqcup (2 + 2m, 2c)$. Если же $m < 0$, то параллельным переносом нужно сдвинуть множество $(*)$ в

$$(-mx, x) \sqcup (\frac{x}{2}, cx).$$

Теперь сжимаем конструкцию в $\frac{x}{2}$ раз и получаем $(1, 2c) \sqcup (-2m, 2)$. ■

Лемма 6. Об общем виде сильной синхронизации. Пусть есть множества

$$(a, x), (b, y) \in \mathbb{P}^+$$

и они сильно синхронны. Тогда

$$(a, x) \sqcup (b, y)$$

можно преобразованием подобия перевести в множество вида

$$(1, 2) \sqcup (k, 2),$$

где $k \in \mathbb{N}$ и k — чётно.

Доказательство.

Сильная синхронность последовательностей $(a, x), (b, y)$ означает, во-первых, что они не пересекаются. Во-вторых, что числа x и y чётны. В-третьих, должно быть выполнено

$$(a, x) \subset (b + \frac{y}{2}, y)^+ \quad \text{и} \quad (b, y) \subset (a + \frac{x}{2}, x)^+.$$

Тогда y кратно x и x кратно y , т.е. $y = x$. Кроме того, b представимо в виде $a + \frac{x}{2} + tx$ для некоторого $t \in \mathbb{Z}$. Если $t \geq 0$, то параллельным переносом сдвигаем множество

$$(a, x) \sqcup (b, y) = (a, x) \sqcup (a + \frac{x}{2} + tx, x) \quad (**)$$

в

$$(\frac{x}{2}, x) \sqcup (x + tx, x)$$

и, сжимая конструкцию в $\frac{x}{2}$ раз, окончательно получаем $(1, 2) \sqcup (2 + 2t, 2)$. Если же $t < 0$, то параллельным переносом нужно сдвинуть множество $(**)$ в

$$(-tx, x) \sqcup (\frac{x}{2}, x)$$

и, сжав конструкцию в $\frac{x}{2}$ раз, получить $(1, 2) \sqcup (-2t, 2)$.

■

Лемма 7. О полосе. Пусть $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$ и $P_1 = \mathbb{N} = (1, 2) \sqcup (2, 2)$. Тогда ребро от P_2 к P_1 в графе G проводится тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- 1) $P_2 = (1, 2) \sqcup (4, 2)$;
- 2) $P_2 = (3, 2) \sqcup (2, 2)$;
- 3) $P_2 = (1, 2) \sqcup (2, 2p)$, p — простое;
- 4) $P_2 = (1, 2p) \sqcup (2, 2)$, p — простое;
- 5) $P_2 = (1, p) \sqcup (2, p)$, $p > 2$, p — простое.

Доказательство.

Ясно, что P_1 в графе G соединено ребрами с множествами

$$X := (1, 2) \sqcup (4, 2) \text{ и } Y := (3, 2) \sqcup (2, 2),$$

потому что они получаются из P_1 удалением одного элемента. Эти ребра дают нам **кандидатов (1) и (2)**. Допустим теперь, что в G есть ребро от P_1 к

$$P_2 = (c, x) \sqcup (d, y)$$

и $P_2 \neq X, Y$. Тогда обязательно $c = 1, d = 2$ или $c = 2, d = 1$, так как иначе между P_1 и P_2 обязательно находилось бы одно из множеств X, Y . Очевидно, что $x > 0$ и $y > 0$ (иначе между P_1 и P_2 можно было бы вставить $(c, 2y) \sqcup (d, y)$ или $(c, x) \sqcup (d, 2x)$). Обозначим через z наибольший общий делитель чисел x и y . Из леммы 1 и попарного непересечения прогрессий (c, x) и (d, y) следует, что $z > 1$. Пусть

$$x := zx_1, \quad y := zy_2.$$

Разберем **два случая**: $z = 2$ и $z > 2$. **В первом случае**, - когда $z = 2$, обязательно выполнено $x_1 > 1$ или $y_1 > 1$, иначе $P_1 = P_2$. Допустим, что $x_1 > 1$. Тогда

$$P_2 \subset (1, 2x_1) \sqcup (2, 2) \subsetneq P_1.$$

Значит $P_2 = (1, 2x_1) \sqcup (2, 2)$, т.е. $y_1 = 1$. Также очевидно, что x_1 - простое число, так как иначе для любого собственного делителя $x_2 > 1$ числа x_1 имели бы

$$P_2 \subsetneq (1, 2x_2) \sqcup (2, 2) \subsetneq P_1.$$

Получили **кандидата (4)**. Если же $y_1 > 1$, то аналогично получаем **кандидата (3)**. **Во втором случае**, - когда $z > 2$, получаем

$$P_2 = (1, zx_1) \sqcup (2, zy_1) \subset (1, z) \sqcup (2, z) \subsetneq P_1.$$

Значит $x_1 = y_1 = 1$. Осталось заметить, что z - простое число, так как иначе для любого собственного делителя $z_1 > 1$ числа z имели бы

$$P_2 \subsetneq (1, z_1) \sqcup (2, z_1) \subsetneq P_1.$$

Получили **кандидата (5)**.

Осталось проверить, что все P_2 из **серий (1 – 5)** попарно невложимы друг в друга. Для **серий (1 – 2)** это очевидно. Так как в P_2 из **серий (3 – 5)** есть числа 1 и 2, то они не вкладываются в P_2 из **серии (1 – 2)**. Далее, **серия (3)** не вкладывается в **серию (4)**, так как в первой есть 3, а во второй нет. Аналогично, из-за числа 4 **серия (4)** не вкладывается в **серию (3)**. **Серия (3)** не вкладывается в **серию (5)** из-за числа 3. Аналогично, **серия (5)** не вкладывается в **серию (3)** из-за числа $1+p$. **Серия (4)** не вкладывается в **серию (5)**, так как в первой есть 4 и 6, а во второй хотя бы одного из этих чисел нет. **Серия (5)** не вкладывается в **серию (4)**, так как в первой, в отличие от второй, есть $2+p$. Разные P_2 из **серии (3)** не вкладываются друг в друга, так как иначе

$$(1, 2) \sqcup (2, 2p_1) \subset (1, 2) \sqcup (2, 2p_2),$$

т.е. p_1 делится на p_2 и, из их простоты, $p_1 = p_2$. Точно так же показывается попарная невложимость P_2 из **серий (4 – 5)**.

■

Лемма 8. О точке и полосе отступа 2. Пусть $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$ и $P_1 = (1, 0) \sqcup (3, 1)$. Тогда ребро от P_2 к P_1 в графе G проводится тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- 1) $P_2 = (1, 0) \sqcup (4, 1)$;
- 2) $P_2 = (3, 0) \sqcup (4, 1)$;
- 3) $P_2 = (1, 2) \sqcup (6, 1)$;
- 4) $P_2 = (1, 3) \sqcup (3, 3)$;
- 5) $P_2 = (1, 2) \sqcup (4, 2p)$, p – простое.

Доказательство.

Ясно, что P_1 в графе G соединено ребром с множествами

$$X := (1, 0) \sqcup (4, 1), \quad Y := (3, 0) \sqcup (4, 1), \quad Z := (1, 2) \sqcup (6, 1),$$

так как они получаются из P_1 удалением одного элемента. Получили **кандидатов (1 – 3)**. Рассмотрим теперь в решетке G какое-нибудь ребро $P_2 \rightarrow P_1$ другого типа. Пусть в этом ребре

$$P_2 = (c, d) \sqcup (e, f).$$

Так как в G есть ребра из **серий (1 – 3)**, то $1, 3, 4 \in P_2$. **Возможны два случая. В первом из них $c = 1$ и $d = 2$.** Тогда обязательно $e = 4$. Ясно, что $f \neq 0$, так как, например, верно

$$P_2 = (1, 2) \sqcup (4, 0) \subsetneq (1, 2) \sqcup (4, 4) \subsetneq P_1.$$

Ясно, что f делится на 2, так как прогрессии $(1, 2)$ и $(4, f)$ не пересекаются. Обозначим через p произвольный простой делитель числа $\frac{f}{2}$. Так как

$$P_2 = (1, 2) \sqcup (4, f) \subset (1, 2) \sqcup (4, 2p) \subsetneq P_1,$$

то $f = 2p$ для некоторого простого числа p . Получили **кандидата (5)**. Рассмотрим теперь **второй возможный случай**, в котором $c = 1$ и $d = 3$. Тогда обязательно $e = 3$. Ясно, что $f \neq 0$, так как, например, верно

$$P_2 = (1, 3) \sqcup (3, 0) \subsetneq (1, 3) \sqcup (3, 3) \subsetneq P_1.$$

Ясно, что f делится нацело на 3, так как прогрессии $(1, 3)$ и $(3, f)$ не пересекаются. Тогда

$$P_2 = (1, 3) \sqcup (3, f) \subset (1, 3) \sqcup (3, 3) \subsetneq P_1.$$

Значит $f = 3$. Получили **кандидата (4)**.

Осталось проверить, что все P_2 из **(1 – 5)** попарно невлжимы друг в друга. Для **(1 – 3)** это очевидно. Так как в P_2 из **(4 – 5)** есть числа 1, 3 и 4, то они не вкладываются в P_2 из **(1 – 3)**. **Представитель (4)** не вкладывается в **представителя (5)**, так как иначе

$$(1, 3) \sqcup (3, 3) \subset (1, 2) \sqcup (4, 2p),$$

чего быть не может из-за числа 6. **Представитель (5)** не вкладывается в **представителя (4)**, так как иначе было бы

$$(1, 2) \sqcup (4, 2p) \subset (1, 3) \sqcup (3, 3),$$

чего быть не может из-за числа 5. Наконец, **представитель (5)** не вкладывается в другого **представителя (5)**, так как иначе было бы

$$(1, 2) \sqcup (4, 2p_1) \subset (1, 2) \sqcup (4, 2p_2),$$

что, в силу простоты и различия чисел p_1 и p_2 , невозможно.



Лемма 9. О точке и полосе отступа больше 2. Пусть $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$ и

$$P_1 = (1, 0) \sqcup (k + 1, 1), \quad k > 2.$$

Тогда ребро от P_2 к P_1 в графе G проводится тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- 1) $P_2 = (1, 0) \sqcup (k + 2, 1)$;
- 2) $P_2 = (k + 1, 0) \sqcup (k + 2, 1)$;
- 3) $P_2 = (1, k) \sqcup (k + x + 1, p)$, p – простое, $0 < x < p$, $p|k$;
- 4) $P_2 = (1, pt) \sqcup (k + 1, p)$, p – простое, $p \nmid k$, $pt \geq k$ и для всех $m_1|t$ из $m_1 \neq t$ следует $pt_1 < k$;
- 5) $P_2 = (1, 0) \sqcup (k + 1, p)$, p – простое, $p|k$, $k \neq p$, $k \neq 2p$.

Доказательство.

Ясно, что P_1 в графе G соединено ребром с множествами

$$X := (1, 0) \sqcup (k + 2, 1), \quad Y := (k + 1, 0) \sqcup (k + 2, 1),$$

так как они получаются из P_1 удалением одного элемента. Получили **кандидатов (1 – 2)**. Рассмотрим теперь в решетке G какое-нибудь ребро $P_2 \rightarrow P_1$ другого типа. Пусть в этом ребре

$$P_2 = (c, d) \sqcup (e, f).$$

Так как в G есть ребра типов (1 – 2), то $1, k + 1 \in P_2$. **Разбираем случаи. В первом из них** $d = f = 0$. Тогда

$$P_2 \subsetneq (1, 0) \sqcup (k + 1, 2) \subsetneq P_1,$$

чего быть не может. **Во втором случае** одно из чисел d, f равно 0, а второе – не равно. Без ограничения общности, $d = 0, f > 0$. Здесь возникает **пара вариантов. В первом из них** $c = 1$ и $e = k + 1$, т.е.

$$P_2 = (1, 0) \sqcup (k + 1, f).$$

Здесь число f будет простым, так как в противном случае

$$P_2 \subsetneq (1, 0) \sqcup (k + 1, f_1) \subsetneq P_1$$

для любого собственного делителя f_1 числа f . Значит $f = p$. Покажем, что $k \neq p$ и $k \neq 2p$. Первое верно, так как при $p = k > 2$ получаем

$$P_2 = (1, 0) \sqcup (p + 1, p) \subsetneq (1, p) \sqcup (p + 2, p).$$

Второе верно, так как при $k = 2p$ мы имели бы

$$P_2 = (1, 0) \sqcup (2p + 1, p) = (1, 2p) \sqcup (3p + 1, 2p),$$

а этот кандидат уже учтен в серии (3). Теперь это уже точно кандидат из серии (5). Второй вариант $c = k + 1$ и $e = 1$, когда

$$P_2 = (k + 1, 0) \sqcup (1, f),$$

невозможен, так как

$$P_2 \subsetneq (k + 1, 2f) \sqcup (1, f) \subsetneq P_1.$$

В третьем случае $d > 0, f > 0$ снова возможны два варианта: или $c = 1, d = k$, или $c = 1, e = k + 1$. **В первом из них**

$$P_2 = (1, k) \sqcup (e, f).$$

Из попарного непересечения $(1, k)$ и (e, f) и из леммы 1 следует, что $e - 1$ не делится на $\text{НОД}(f, k)$, т.е. у чисел f и k существует некоторый общий простой делитель p , не делящий $e - 1$. Но тогда

$$P_2 \subseteq (1, k) \sqcup (e, p) \subsetneq P_1.$$

По лемме 1 прогрессии здесь не пересекаются, так как $\text{НОД}(k, p) = p$ и $e - 1$ не делится на p . И $(1, k) \sqcup (e, p) \subsetneq P_1$, так как $k > 2$. Значит

$$P_2 = (1, k) \sqcup (e, p)$$

и $e - 1$ не делится на p , т.е. e представимо в виде $k + x + 1$, где x не делится на p . Но $x < p$, так как иначе

$$P_2 \subsetneq (1, k) \sqcup (e - p, p) \subsetneq P_1.$$

Получили кандидата (3). Разбираем теперь второй вариант, где $c = 1, e = k + 1$, т.е.

$$P_2 = (1, d) \sqcup (k + 1, f).$$

Из попарного непересечения этих прогрессий и леммы 1 следует, что k не делится на $\text{НОД}(d, f)$, т.е. у чисел d и f существует некоторый общий простой делитель p , не делящий k . Но тогда

$$P_2 \subseteq (1, d) \sqcup (k + 1, p) \subsetneq P_1.$$

По лемме 1 прогрессии здесь не пересекаются, так как $\text{НОД}(d, p) = p$ и k не делится на p . Кроме того,

$$(1, d) \sqcup (k + 1, p) \subsetneq P_1,$$

так как $d > k > 2$. Значит

$$P_2 = (1, pm) \sqcup (k + 1, p).$$

Очевидно, $pm \geq k$. Осталось заметить, что ни для какого собственного делителя m_1 числа m не может быть выполнено $pm_1 \geq k$, ведь иначе было бы

$$P_2 \subsetneq (1, pm_1) \sqcup (k + 1, p) \subsetneq P_1.$$

Почили кандидата (4).

Проверим теперь, что все P_2 из серий (1 – 5) попарно невложимы друг в друга. Очевидно, для (1 – 2) это верно. Так как в P_2 из серий (3 – 5) есть числа 1 и $k + 1$, то они не вкладываются в P_2 из серий (1 – 2). Представитель (3) не может вкладываться в другого представителя (3), так как иначе было бы

$$(1, k) \sqcup (k + x_1 + 1, p_1) \subset (1, k) \sqcup (k + x_2 + 1, p_2).$$

Тогда p_1 делилось бы нацело на p_2 , т.е., из простоты p_1 и p_2 , $p_1 = p_2$. В свою очередь, $x_1 - x_2$ делилось бы нацело на $p_1 = p_2$, чего не может быть в силу ограничений

$$0 < x_1, x_2 < p_1 = p_2.$$

Представитель (3) не может вкладываться в представителя (4), так как иначе было бы

$$(1, k) \sqcup (k + x + 1, p_1) \subset (1, p_2 m) \sqcup (k + 1, p_2).$$

Здесь k делится на p_1 и не делится на p_2 . Значит $p_1 \neq p_2$. Так как прогрессии $(1, k)$ и $(k + 1, p_2)$ пересекаются в точке $k + 1$, то тогда

по лемме 3 число $2k$ делилось бы нацело на p_2 . Но k не делится на p_2 , поэтому обязательно было бы $p_2 = 2$. Получаем

$$(1, k) \sqcup (k + x + 1, p_1) \subsetneq (1, 2m) \sqcup (k + 1, 2).$$

Так как $p_1 \neq p_2 = 2$, то $p_1 > 2$ и $(k + x + 1, p_1) \not\subset (k + 1, 2)$. Значит по лемме 3 число $2p_1$ делится на $2m$. Но $2m > k > 2$, т.е. $m \neq 1$. Значит $m = p_1$. Но k делится на p_1 и значит числа из $(k + x + 1, p_1)$ несравнимы по модулю p_1 с числами из $(1, 2m)$. Получили противоречие с условием

$$(k + x + 1, p_1) \subset (1, 2m) \sqcup (k + 1, 2).$$

Представитель (3) не может вкладываться в **представителя (5)**, так как иначе было бы

$$(1, k) \sqcup (k + x + 1, p_1) \subset (k + 1, p_2) \sqcup (1, 0).$$

Тогда p_1 делится на p_2 , т.е., из простоты p_1 и p_2 , $p_1 = p_2$. Но это означает, что числа из прогрессий $(k + x + 1, p_1)$ и $(k + 1, p_2)$ дают разные остатки по модулю $p_1 = p_2$, чего быть не может. **Представитель (4)** не может вкладываться в **представителя (3)**, так как иначе было бы

$$(1, p_2m) \sqcup (k + 1, p_2) \subset (1, k) \sqcup (k + x + 1, p_1).$$

Так как прогрессии $(k + 1, p_2)$ и $(1, k)$ пересекаются в точке $k + 1$, то по лемме 3 тогда получили бы, что $2p_2$ делится нацело на k , чего быть не может, ведь k не делится на p_2 и $k > 2$. **Представитель (4)** не может вкладываться в **представителя (4)**, так как иначе было бы

$$(1, p_1m_1) \sqcup (k + 1, p_1) \subset (1, p_2m_2) \sqcup (k + 1, p_2).$$

Ясно, что прогрессии $(k + 1, p_1)$ и $(k + 1, p_2)$ пересекаются в точке $k + 1$, то есть по лемме 3 число $2p_1$ делится на p_2 . Если бы p_2 было равно 2, то по лемме 3 получилось бы, что число $2p_1$ делится на $2m_2$. Но $2m_2 > k > 2$, т.е. $m_2 > 1$ и $m_2 = p_1$. А это противоречит тому, что

$$1 + k + p_1 \in (1, p_2m_2) = (1, 2m_2) = (1, 2p_1),$$

ведь k не делится на p_1 . Значит $p_1 = p_2$. Но тогда элементы множеств $(1, p_1 m_1)$ и $(k + 1, p_2)$ дают разные остатки по модулю p_1 . Значит

$$(1, p_1 m_1) \subset (1, p_2 m_2) = (1, p_1 m_2),$$

т.е. m_2 является собственным делителем m_1 , что, в силу наложенных на (d) ограничений, невозможно. **Представитель (4)** не может вкладываться в **представителя (5)**, так как иначе имели бы

$$(1, p_1 m) \sqcup (k + 1, p_1) \subset (k + 1, p_2) \sqcup (1, 0)$$

и $p_1 m$ делилось бы на p_2 , т.е., из простоты p_1 и p_2 , получаем $p_1 = p_2$. А это невозможно, ведь k не делится на p_1 и элементы из $(1, p_1 m)$ и $(k + 1, p_2) = (k + 1, p_1)$ дают разные остатки по модулю p_1 , т.е. множества не пересекаются. **Представитель (5)** не может вкладываться в **представителя (3)**, так как иначе имели бы

$$(1, 0) \sqcup (k + 1, p_1) \subset (1, k) \sqcup (k + x + 1, p_2).$$

Прогрессии $(k + 1, p_1)$ и $(1, k)$ пересекаются в точке $k + 1$ и тогда по лемме 3 число $2p_1$ делилось бы нацело на k , но этого быть не может, ведь $k \neq p_1$ и $k \neq 2p_1$. **Представитель (5)** не может вкладываться в **представителя (4)**, так как иначе имели бы

$$(1, 0) \sqcup (k + 1, p_1) \subset (k + 1, p_2) \sqcup (1, p_2 m).$$

Прогрессии $(k + 1, p_1)$ и $(k + 1, p_2)$ пересекаются в точке $k + 1$ и по лемме 3 число $2p_1$ делится нацело на p_2 . Но k делится на p_1 и не делится на p_2 , т.е. $p_1 \neq p_2$ и поэтому $p_2 = 2$. Тогда

$$(k + 1 + p_1, 2p_1) \subset (1, 2m)$$

и поэтому $m = p_1$. Но, в силу ограничений на (e) , это невозможно, ведь $2p_1 = p_2 m \geq k$. Наконец, **представитель (5)** не может вкладываться в другого **представителя (5)**, так как иначе имели бы

$$(a, 0) \sqcup (a + kb, p_1 b) \subset (a, 0) \sqcup (a + kb, p_2 b),$$

т.е., в силу простоты p_1 и p_2 , $p_1 = p_2$, чего быть не может.

■

Лемма 10. О точке и внешней полосе. Пусть $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$ и

$$P_1 = (a, 0) \sqcup (b, k), \quad k \nmid (a - b).$$

Тогда ребро от P_2 к P_1 в графе G проводится тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- 1) $P_2 = (a, 0) \sqcup (b + k, k)$;
- 2) $P_2 = (b, 0) \sqcup (b + k, k)$;
- 3) $P_2 = (a, 0) \sqcup (b, pk)$, p — простое.

Доказательство.

Ясно, что P_1 в графе G соединено ребром с множествами

$$X := (a, 0) \sqcup (b + k, k), \quad Y := (b, 0) \sqcup (b, k),$$

так как они получаются из P_1 удалением одного элемента. Получили **кандидатов (1 – 2)**. Рассмотрим теперь в решетке G какое-нибудь ребро $P_2 \rightarrow P_1$ другого типа. Пусть в этом ребре

$$P_2 = (c, d) \sqcup (e, f).$$

Ясно, что $a, b \in P_2$. Пусть, без ограничения общности, $a \in (c, d)$. И пусть для некоторого $x \in (b, k)$ верно $x \in (c, d)$. Но тогда (c, d) лежит в (b, k) и значит d делится нацело на k . С другой стороны, $a, x \in (c, d)$, т.е. $x - a$ делится нацело на d , а значит и на k . Но $x \in (b, k)$ и из-за этого по модулю k дает такой же остаток, как и b . Поэтому $b - a$ тоже делится на k , что неверно. Итак, в последовательности (c, d) нет других элементов кроме a , т.е. $c = a$, $d = 0$. Значит $b \in (e, f)$, поэтому $e = b$. При этом, $f \neq 0$, так как иначе

$$P_2 = (a, 0) \sqcup (b, 0) \subsetneq (a, 0) \sqcup (b, 2k) \subsetneq P_1.$$

Ясно, что f делится нацело на k , то есть $f = kf_1$. Рассмотрим произвольный простой делитель p числа f_1 . Так как выполнено

$$P_2 = (a, 0) \sqcup (b, kf_1) \subseteq (a, 0) \sqcup (b, kp) \subsetneq P_1,$$

то $f_1 = p$. Получили **кандидата (3)**.

Осталось проверить, что все P_2 из **серий (1 – 3)** попарно невлости друг в друга. Для **серий (1 – 2)** это очевидно. Так как в P_2 из **серии (3)** есть числа a и b , то они не вкладываются в P_2 из

серий (1 – 2). А представитель (3) не может вкладываться в другого представителя (3), так как иначе мы получили бы

$$(a, 0) \sqcup (b, p_1 k) \subset (a, 0) \sqcup (b, p_2 k),$$

т.е., из простоты p_1 и p_2 , $p_1 = p_2$, что невозможно. ■

Лемма 11. О двух несогласованных полосах. Пусть $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$,

$$P_1 = (a, x) \sqcup (b, y)$$

и последовательности $(a, x), (b, y)$ не согласованные. Тогда ребро от P_2 к P_1 в графе G проводится тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- 1) $P_2 = (a + x, x) \sqcup (b, y)$;
- 2) $P_2 = (a, x) \sqcup (b + y, y)$;
- 3) $P_2 = (a, px) \sqcup (b, y)$, p – простое;
- 4) $P_2 = (a, x) \sqcup (b, py)$, p – простое.

Доказательство.

Ясно, что P_1 в графе G соединено ребром с множествами

$$X := (a, x) \sqcup (b + y, y), Y := (a + x, x) \sqcup (b, y),$$

так как они получаются из P_1 удалением одного элемента. Получили **кандидатов (1 – 2)**. Рассмотрим теперь в решетке G какое-нибудь ребро $P_1 \rightarrow P_2$ другого типа. Пусть в этом ребре

$$P_2 = (c, d) \sqcup (e, f).$$

Очевидно, $a, b \in P_2$. Из леммы 4 следует, что (c, d) или целиком лежит в (a, x) или целиком лежит в (b, y) . То же самое можно сказать и про (e, f) . Тогда, без ограничения общности, $c = a$, $e = b$. При этом, $d \neq 0$, так как иначе выполнено

$$P_2 = (a, 0) \sqcup (b, f) \subsetneq (a, 2x) \sqcup (b, f) \subsetneq P_1.$$

Аналогично, $f \neq 0$. Очевидно, что d делится нацело на x , т.е. $d = xd_1$. Аналогично, $f = yf_1$. Так как $P_2 \neq P_1$, то обязательно или $d_1 >$

1, или $f_1 > 1$. Пусть, без ограничения общности, это выполнено для d_1 . Обозначим через p произвольный простой делитель числа d_1 . Так как выполнено

$$P_2 = (a, xd_1) \sqcup (b, yf_1) \subseteq (a, xp) \sqcup (b, y) \subsetneq P_1,$$

то получили **кандидата (3)**. А если $d_1 = 1$ и f_1 — простое число, то получаем **кандидата (4)**.

Осталось проверить, что все P_2 из **серий (1 – 4)** попарно невлости друг в друга. Для **серий (1 – 2)** это очевидно. Так как в P_2 из **серий (3 – 4)** есть числа a и b , то они не вкладываются в P_2 из **серий (1 – 2)**. **Представитель (3)** не может вкладываться в другого **представителя (3)**, так как иначе мы получили бы

$$(a, p_1x) \sqcup (b, y) \subset (a, p_2x) \sqcup (b, y),$$

т.е., из простоты p_1 и p_2 , $p_1 = p_2$, а это невозможно. Аналогично доказывается, что **представитель (4)** не может вкладываться в другого **представителя (4)**. **Представитель (3)** не может вкладываться в **представителя (4)**, так как иначе было бы

$$(a, p_1x) \sqcup (b, y) \subset (a, x) \sqcup (b, p_2y),$$

а это невозможно, так как в левой части есть число $b+y$, а в правой части его нет. Аналогично доказывается, что **представитель (4)** не может вкладываться в **представителя (3)**. ■

Лемма 12. О двух асинхронных полосах. Пусть $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$,

$$P_1 = (a, x) \sqcup (b, y)$$

и последовательности $(a, x), (b, y)$ асинхронные. Тогда ребро от P_2 к P_1 в графе G проводится тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- 1) $P_2 = (a + x, x) \sqcup (b, y)$;
- 2) $P_2 = (a, x) \sqcup (b + y, y)$;
- 3) $P_2 = (a, px) \sqcup (b, y)$, p — простое;
- 4) $P_2 = (a, x) \sqcup (b, py)$, p — простое.

Доказательство.

Ясно, что P_1 в графе G соединено ребром с множествами

$$X := (a, x) \sqcup (b + y, y), Y := (a + x, x) \sqcup (b, y),$$

так как они получаются из P_1 удалением одного элемента. Получили **кандидатов (1 – 2)**. Рассмотрим теперь в решетке G какое-нибудь ребро $P_2 \rightarrow P_1$ другого типа. Пусть в этом ребре

$$P_2 = (c, d) \sqcup (e, f).$$

Ясно, что $a, b \in P_2$. Далее возможны **варианты**. В первом из них $d = 0, f = 0$. Тогда

$$\{c, e\} = \{a, b\},$$

а этого быть не может, так как иначе

$$P_2 = (a, 0) \sqcup (b, 0) \subsetneq (a, x) \sqcup (b, 0) \subsetneq P_1.$$

Во втором варианте $d = 0, f \neq 0$. Тогда $c = a, e = b$. И здесь, по лемме 3, возможны **два случая** – $(b, f) \subset (b, y)$ или же $(b, 2f) \subset (b, y), (b + f, 2f) \subset (a, x)$. **Первый случай** невозможен, так как

$$P_2 = (a, 0) \sqcup (b, f) \subsetneq (a, 2x) \sqcup (b, f) \subsetneq P_1.$$

Второй случай невозможен, так как

$$P_2 = (a, 0) \sqcup (b, f) \subsetneq (a, x) \cup (b, f) = (a, x) \sqcup (b, 2f) \subsetneq P_1;$$

здесь левая часть вложения строгая, так как иначе по лемме 4 для зигзага получили бы

$$(a + x, x) = (b + f, 2f), \quad \text{т.е. по лемме 4 } (a, x) \subset (b + \frac{y}{2}, y)^+;$$

аналогично доказывается и строгость правой части вложения. **Третий вариант** $d \neq 0, f = 0$, разбирается точно так же. Разберем теперь **четвертый вариант**, когда $d \neq 0, f \neq 0$. Здесь возможны **три исхода**. В первом из них

$$(c, d) \subset (a, x), \quad (e, f) \subset (b, y),$$

т.е. (c, d) и (e, f) - полосы. Тогда

$$c = a, \quad e = b, \quad d = xd_1, \quad f = yf_1.$$

Так как $P_2 \neq P_1$, то обязательно $d_1 > 1$ или $f_1 > 1$. Пусть $d_1 > 1$. Обозначим через p произвольный простой делитель числа d_1 . Тогда

$$P_2 = (a, xd_1) \sqcup (b, yf_1) \subseteq (a, xp) \sqcup (b, y) \subsetneq P_1,$$

т.е. $d_1 = p$ и $f_1 = 1$. Также мог произойти аналогичный случай, когда $d_1 = 1$ и f_1 - простое число. Получили **кандидатов (3 – 4)**.
Во втором исходе

$$(c, d) \subset (a, x), \quad (e, f) \not\subset (b, y).$$

Ясно, что $(e, f) \cap (b, y) \neq \emptyset$, так как в противном случае было бы

$$P_2 = (c, d) \sqcup (e, f) \subsetneq (a, x) \sqcup (b, 0) \subsetneq P_1.$$

Поэтому (c, d) - полоса, а (e, f) - зигзаг. Значит

$$P_2 = (c, d) \sqcup (e, f) \subset (a, x) \sqcup ((e, f) \cap (b, y)) \subsetneq P_1;$$

здесь правая часть вложения строгая, иначе получили бы

$$(b, y) \subset (e, f), \quad \text{т.е. по лемме 4 } (b, y) \subset (a + \frac{x}{2}, x)^+.$$

Поэтому все такие P_2 были уже получены нами в **первом исходе**.
Наконец, в **третьем исходе**

$$(c, d) \not\subset (b, y), \quad (e, f) \not\subset (b, y).$$

Тогда из лемм 3 и 4 заключаем:

$$P_2 = (c, d) \sqcup (e, f) \subset ((a, x) \cap (b + \frac{y}{2}, y)^+) \sqcup ((b, y) \cap (a + \frac{x}{2}, x)^+) \subsetneq P_1.$$

Значит P_2 равно $((a, x) \cap (b + \frac{y}{2}, y)^+) \sqcup ((b, y) \cap (a + \frac{x}{2}, x)^+)$, т.е. оно уже было учтено нами в **первом исходе**.

Проверка попарной невложимости **кандидатов (1 – 4)** друг в друга полностью повторяет аналогичные рассуждения из леммы 11.

■

Лемма 13. О слабой синхронизации первого типа. Пусть $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$,

$$P_1 = (1, 2) \sqcup (n + 1, 2n),$$

где $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ и n нечетно. Тогда ребро от P_2 к P_1 в графе G проводится тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- 1) $P_2 = (3, 2) \sqcup (n + 1, 2n)$;
- 2) $P_2 = (1, 2) \sqcup (3n + 1, 2n)$;
- 3) $P_2 = (1, 2p) \sqcup (n + 1, 2n)$, p — простое, $p \neq n$;
- 4) $P_2 = (1, 2) \sqcup (n + 1, 2np)$, p — простое;
- 5) $P_2 = (1, n) \sqcup (2x + 1, 2p)$, p — простое, $0 < x < p$, $p|n$.

Доказательство.

Ясно, что P_1 в графе G соединено ребром с множествами

$$X := (3, 2) \sqcup (n + 1, 2n), Y := (1, 2) \sqcup (3n + 1, 2n),$$

так как они получаются из P_1 удалением одного элемента. Получили **кандидатов (1 – 2)**. Рассмотрим теперь в решетке G какое-нибудь ребро $P_2 \rightarrow P_1$ другого типа. Пусть в этом ребре

$$P_2 = (c, d) \sqcup (e, f).$$

Ясно, что $1, n + 1 \in P_2$. Дальше возможны **варианты. В первом из них** $d = 0, f = 0$. Тогда $c = 1, e = n + 1$, а этого быть не может, так как иначе

$$P_2 = (1, 0) \sqcup (n + 1, 0) \subsetneq (1, 2) \sqcup (n + 1, 0) \subsetneq P_1.$$

Во втором варианте $d = 0, f \neq 0$ или $d \neq 0, f = 0$. Без ограничения общности, считаем, что $d = 0, f \neq 0$. Здесь нужно рассмотреть **три случая**. В **первом** из них $1, n + 1 \in (e, f)$. Это возможно только если $e = 1, f = n$. Но тогда $c \in (1, 2)$ и

$$P_2 = (c, 0) \sqcup (1, n) \subsetneq (c, 2n) \sqcup (1, n) \subsetneq P_1,$$

а этого быть не может. Правая часть вложения здесь строгая, так как в $(c, 2n) \sqcup (1, n)$ при нечетных $n > 1$ не могут одновременно лежать числа 3 и 5. **Во втором случае** $1 \in (c, 0), n + 1 \in (e, f)$.

Это возможно только если $c = 1, e = n + 1$. Но тогда f обязательно кратно n и

$$P_2 = (1, 0) \sqcup (n + 1, f) \subsetneq (1, n) \sqcup (3, 0) \subsetneq P_1,$$

что невозможно. **В третьем случае** $n + 1 \in (c, 0), 1 \in (e, f)$. Это возможно только когда выполнено $c = n + 1, e = 1$. Но тогда f обязательно кратно n , ведь иначе f было бы четно и

$$P_2 = (n + 1, 0) \sqcup (1, f) \subsetneq (1, 2) \sqcup (n + 1, 4n) \subsetneq P_1,$$

чего быть не может. А если f кратно n , то

$$P_2 = (n + 1, 0) \sqcup (1, f) \subsetneq (1, n) \sqcup (3, 0) \subsetneq P_1,$$

и это снова невозможно. Наконец, **в третьем варианте** $d \neq 0, f \neq 0$. И здесь тоже возникают **два исхода**. **В первом из них** одно из чисел $1, n + 1$ лежит в (c, d) , а второе - в (e, f) . Пусть, без ограничения общности,

$$1 \in (c, d), \quad n + 1 \in (e, f).$$

Тогда $c = 1, e = n + 1$ и f кратно n . Если $d = 2$, то f кратно $2n$, т.е. $f = 2nx$, причем $x > 1$. Тогда для любого простого делителя p числа x имеем

$$P_2 = (1, 2) \sqcup (n + 1, 2nx) \subset (1, 2) \sqcup (n + 1, 2np) \subsetneq P_1.$$

Получили **кандидата (4)**. Если d нечетно, то оно обязательно кратно n и

$$P_2 = (1, d) \sqcup (n + 1, f) \subsetneq (1, n) \sqcup (3, 0) \subsetneq P_1,$$

что невозможно. Пусть теперь d четно, т.е. $d = 2d_1$ и $d_1 > 1$. Тогда

$$P_2 = (1, 2d_1) \sqcup (n + 1, f).$$

Здесь возможны **три подслучая**. **В одном из них** $f = n$. Тогда НОД($2d_1, f$) будет делителем числа n и по лемме 1 прогрессии $(1, 2d_1), (n + 1, f)$ пересекаются. **Во втором подслучае** $f = 2n$. Тогда для любого простого делителя p числа d_1 имеем

$$P_2 = (1, 2d_1) \sqcup (n + 1, 2n) \subset (1, 2p) \sqcup (n + 1, 2n) \subsetneq P_1.$$

Значит $d_1 = p$. И $p \neq n$, так как иначе

$$P_2 = (1, 2n) \sqcup (n + 1, 2n) \subsetneq (1, n) \sqcup (3, 0) \subsetneq P_1.$$

Получили **кандидата (3)**. В третьем подслучае $f > 2n$. Тогда

$$P_2 = (1, 2d_1) \sqcup (n + 1, f) \subset (1, 2) \sqcup ((n + 1, f) \cap (n + 1, 2n)) \subsetneq P_1,$$

т.е. такое P_2 или вовсе не соединено ребром с P_1 , или совпадает с одним из **кандидатов (4)**. Во втором исходе числа $1, n + 1$ одновременно лежат в одной из прогрессий (c, d) , (e, f) . Без ограничения общности, это (c, d) . Это означает, что $c = 1$, $d = n$, т.е.

$$P_2 = (1, n) \sqcup (e, f).$$

Здесь $e - 1$ четно и не кратно n , f четно. Пусть $e = 1 + 2x$. Из леммы 1 следует, что у n и f есть простой общий делитель p , которому не кратно $2x$. Так как n четно, то $p \neq 2$ и x не кратно p . В частности, $x \neq 0$, $x \neq p$. Тогда

$$P_2 \subset (1, n) \sqcup (1 + 2x, 2p) \subsetneq P_1.$$

Поэтому $f = 2p$. Осталось заметить, что при $x > p$ было бы

$$P_2 \subsetneq (1, n) \sqcup (1 + 2(x - p), 2p) \subsetneq P_1,$$

что невозможно. Значит $0 < x < p$. Получили **кандидата (5)**.

Осталось проверить, что все P_2 из **серий (1 – 5)** попарно невлости друг в друга. Для **серий (1 – 2)** это очевидно. Так как в P_2 из **серий (3 – 5)** есть числа 1 и $n + 1$, то они не вкладываются в P_2 из **серий (1 – 2)**. Представитель (3) не может вкладываться в другого представителя (3), так как иначе мы получили бы

$$(1, 2p_1) \sqcup (n + 1, 2n) \subset (1, 2p_2) \sqcup (n + 1, 2n),$$

т.е., из простоты p_1 и p_2 , $p_1 = p_2$, а это невозможно. Аналогично доказывается, что представитель (4) не может вкладываться в другого представителя (4). Представитель (3) не может вкладываться в представителя (4), так как иначе было бы

$$(1, 2p_1) \sqcup (n + 1, 2n) \subset (1, 2) \sqcup (n + 1, 2np),$$

а это невозможно, так как в левой части есть число $3n + 1$, а в правой части его нет. Аналогично доказывается, что **представитель (4)** не может вкладываться в **представителя (3)**. **Представитель (5)** не может вкладываться в **представителя (3)**, так как иначе было бы

$$(1, n) \sqcup (2x + 1, 2p_1) \subset (1, 2p_2) \sqcup (n + 1, 2n),$$

т.е.

$$(2x + 1, 2p_1) \subset (1, 2p_2).$$

А это невозможно, так как здесь точно $p_1 = p_2$, т.е. при $0 < x < p_1 = p_2$ верно

$$1 < 2x + 1 < 1 + 2p_2.$$

Представитель (5) не может вкладываться в **представителя (4)**, так как иначе было бы

$$(1, n) \sqcup (2x + 1, 2p_1) \subset (1, 2) \sqcup (n + 1, 2np_2),$$

а это невозможно, ведь в левой части, в отличие от правой, есть число $3n + 1$. **Представитель (5)** не может вкладываться в другого **представителя (5)**, так как из условия

$$(1, n) \sqcup (2x_1 + 1, 2p_1) \subset (1, n) \sqcup (2x_2 + 1, 2p_2)$$

следует

$$(2x_1 + 1, 2p_1) \subset (2x_2 + 1, 2p_2),$$

т.е., из простоты p_1 и p_2 , верно $p_1 = p_2$. Но тогда $x_1 - x_2$ обязательно кратно p_1 , т.е., в силу ограничений

$$0 < x_1 < p_1, \quad 0 < x_2 < p_2 = p_1$$

получаем $x_1 = x_2$, чего быть не может. **Представитель (3)** не может вкладываться в **представителя (5)**, так как иначе было бы

$$(1, 2p_1) \sqcup (n + 1, 2n) \subset (1, n) \sqcup (2x + 1, 2p_2),$$

т.е. из леммы 3 число $4p_1$ делилось бы на нечетное n , но $p_1 \neq n$. Наконец, **представитель (4)** не может вкладываться в **представителя (5)**, так как из условия

$$(1, 2) \sqcup (n + 1, 2np_1) \subset (1, n) \sqcup (2x + 1, 2p_2)$$

по лемме 3 получили бы делимость 4 на нечетное n , что невозможно.



Лемма 14. О слабой синхронизации второго типа. Пусть $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$,

$$P_1 = (1, 2) \sqcup (k, 2n),$$

где $k, n \in \mathbb{N}$, $k < n + 1$ - *четно*, $n > 1$ - *нечетно*. Тогда ребро от P_2 к P_1 в графе G проводится тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- 1) $P_2 = (3, 2) \sqcup (k, 2n)$;
- 2) $P_2 = (1, 2) \sqcup (k + 2n, 2n)$;
- 3) $P_2 = (1, 2p) \sqcup (k, 2n)$, p - простое, $p \nmid n$ или $p \mid k - 1$;
- 4) $P_2 = (1, 2) \sqcup (k, 2np)$, p - простое;
- 5) $P_2 = (1, 2p) \sqcup (k, n)$, p - простое, $p \mid n$, $p \nmid k - 1$.

Доказательство.

Ясно, что P_1 в графе G соединено ребром с множествами

$$X := (3, 2) \sqcup (k, 2n), Y := (1, 2) \sqcup (k + 2n, 2n),$$

так как они получаются из P_1 удалением одного элемента. Получили **кандидатов (1 – 2)**. Рассмотрим теперь в решетке G какое-нибудь ребро $P_2 \rightarrow P_1$ другого типа. Пусть в этом ребре

$$P_2 = (c, d) \sqcup (e, f).$$

Ясно, что $1, k \in P_2$. Далее возможны **варианты**. В первом из них $d = 0, f = 0$. Тогда $c = 1, e = k$, а этого быть не может, так как иначе

$$P_2 = (1, 0) \sqcup (k, 0) \subsetneq (1, 2) \sqcup (k, 0) \subsetneq P_1.$$

Во втором варианте $d = 0, f \neq 0$ или $d \neq 0, f = 0$. Без ограничения общности, считаем, что $d = 0, f \neq 0$. Здесь нужно рассмотреть **три случая**. В первом из них $1, k \in (e, f)$. Тогда имеем $1 + 3k \in (e, f)$. Но $k < 1 + 3k < k + 2n$ и $1 + 3k$ нечетно. Случай невозможен. **Во втором случае** $1 \in (c, 0), k \in (e, f)$. Это возможно только если $c = 1, e = k$. Но тогда f обязательно кратно n и

$$P_2 = (1, 0) \sqcup (k, f) \subsetneq (k, n) \sqcup (3, 0) \subsetneq P_1,$$

что невозможно. В третьем случае $k \in (c, 0)$, $1 \in (e, f)$. Это возможно только при $c = k$, $e = 1$. Но тогда f обязательно нечетно, ведь иначе

$$P_2 = (k, 0) \sqcup (1, f) \subsetneq (1, 2) \sqcup (k, 4n) \subsetneq P_1,$$

чего быть не может. А если f нечетно, то $1 + f, 1 + 3f \in (k, 2n)$, т.е. f делится на n . Но

$$(1, n) \cap (k, 2n) = \emptyset,$$

так как $k - 1 < n$. Случай невозможен. В третьем варианте $d \neq 0$, $f \neq 0$. И здесь тоже возникают два исхода. В первом из них числа $1, k$ одновременно лежат в одной из прогрессий (c, d) , (e, f) . Без ограничения общности, это (c, d) . Но тогда $c = 1$, $d = k - 1$ и числа $1 + d, 1 + 3d$ четны и значит обязаны лежать в $(k, 2n)$. Поэтому d делится на n , т.е. $1 + d, 1 + 3d \in (1, n)$. Но прогрессии $(1, n)$ и $(k, 2n)$ не пересекаются, так как $1 < k < n + 1$. Противоречие. Во втором исходе одно из чисел $1, k$ лежит в (c, d) , а второе - в (e, f) . Пусть, без ограничения общности,

$$1 \in (c, d), \quad k \in (e, f).$$

Тогда $c = 1$, $e = k$, f кратно n и

$$P_2 = (1, d) \sqcup (k, f).$$

Если $d = 2$, то f кратно $2n$, т.е. $f = 2nx$, причем $x > 1$. Тогда для любого простого делителя p числа x имеем

$$P_2 = (1, 2) \sqcup (k, 2nx) \subset (1, 2) \sqcup (k, 2np) \subsetneq P_1.$$

Получили кандидата (4). Число d не может быть нечетным, так как иначе числа $1 + d, 1 + 3d$ были бы четны и значит лежали бы в $(k, 2n)$. Тогда бы d делилось на n , т.е. $1 + d, 1 + 3d \in (1, n)$. Но прогрессии $(1, n)$ и $(k, 2n)$ не пересекаются. Пусть теперь d четно и $d \neq 2$, т.е. $d = 2d_1$ и $d_1 > 1$. Тогда

$$P_2 = (1, 2d_1) \sqcup (k, f).$$

Здесь возможны три подслучая. В одном из них $f = n$. Тогда у чисел d_1, n будет общий простой делитель p и для него

$$P_2 \subset (1, 2p) \sqcup (k, n) \subsetneq P_1.$$

Чтобы прогрессии здесь не пересекались, нужно потребовать выполнение дополнительного условия $k - 1 \nmid p$. Получили **кандидата (5)**. Во втором подслучае $f = 2n$. Тогда для любого простого делителя p числа d_1 имеем

$$P_2 = (1, 2d_1) \sqcup (k, 2n) \subset (1, 2p) \sqcup (k, 2n) \subsetneq P_1,$$

т.е. $d_1 = p$. И здесь $p \nmid n$ или $p \mid k - 1$, ведь иначе последовательности $(1, 2p)$ и (k, n) не пересекаются и

$$P_2 = (1, 2p) \sqcup (k, 2n) \subset (1, 2p) \sqcup (k, n) \subsetneq P_1,$$

а это уже **кандидат (5)**. Получили **кандидата (3)**. В третьем подслучае $f > 2n$. Тогда

$$P_2 = (1, 2d_1) \sqcup (k, f) \subset (1, 2) \sqcup ((k, f) \cap (k, 2n)) \subsetneq P_1,$$

т.е. такое P_2 или вовсе не соединено ребром с P_1 , или совпадает с одним из **кандидатов (4)**.

Осталось проверить, что все P_2 из **серий (1 – 5)** попарно не вложимы друг в друга. Для **серий (1 – 2)** это очевидно. Так как в P_2 из **серий (3 – 5)** есть числа 1 и k , то они не вкладываются в P_2 из **серий (1 – 2)**. **Представитель (3)** не может вкладываться в другого **представителя (3)**, так как иначе мы получили бы

$$(1, 2p_1) \sqcup (k, 2n) \subset (1, 2p_2) \sqcup (k, 2n),$$

т.е., из простоты p_1 и p_2 , $p_1 = p_2$, а это невозможно. Аналогично доказывается, что **представитель (4)** не может вкладываться в другого **представителя (4)**. **Представитель (3)** не может вкладываться в **представителя (4)**, так как иначе было бы

$$(1, 2p_1) \sqcup (k, 2n) \subset (1, 2) \sqcup (k, 2np),$$

а это невозможно, так как в левой части есть число $k + 2n$, а в правой части его нет. Аналогично доказывается, что **представитель (4)** не может вкладываться в **представителя (3)**. **Представитель (5)** не может вкладываться в **представителя (3)**, так как иначе было бы

$$(1, 2p_1) \sqcup (k, n) \subset (1, 2p_2) \sqcup (k, 2n),$$

откуда

$$(1, 2p_1) \subset (1, 2p_2),$$

$$(k + n, 2n) \subset (1, 2p_2).$$

А это невозможно, так как из первого условия следует, что $p_1 = p_2$, а из второго - что $k + n - 1$ делится на $p_2 = p_1$. Но $k - 1$, в отличие от n , не делится на p_1 . **Представитель (5)** не может вкладываться в **представителя (4)**, так как иначе было бы

$$(1, 2p_1) \sqcup (k, n) \subset (1, 2) \sqcup (k, 2np_2),$$

а это невозможно, ведь в левой части, в отличие от правой, есть число $k + 2n$. Наконец, **представитель (5)** не может вкладываться в другого **представителя (5)**, так как из условия

$$(1, 2p_1) \sqcup (k, n) \subset (1, 2p_2) \sqcup (k, n)$$

и простоты p_1 и p_2 получаем $p_1 = p_2$. **Представитель (3)** не может вкладываться в **представителя (5)**, так как иначе было бы

$$(1, 2p_1) \sqcup (k, 2n) \subset (1, 2p_2) \sqcup (k, n),$$

т.е. из леммы 3 число $4p_1$ делилось бы на $2p_2$, но $p_2 \mid n$, т.е. $p_2 \neq 2$ и $p_1 = p_2$. А это, в силу наложенных на p ограничений в **(3, 5)**, невозможно. Наконец, **представитель (4)** не может вкладываться в **представителя (5)**, так как из условия

$$(1, 2) \sqcup (k, 2np_1) \subset (1, 2p_2) \sqcup (k, n)$$

по лемме 3 получили бы делимость 4 на $2p_2$, но $p_2 \mid n$, т.е. $p_2 \neq 2$. ■

Лемма 15. О слабой синхронизации третьего типа. Пусть $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$,

$$P_1 = (1, 2) \sqcup (k, 2n),$$

где $k, n \in \mathbb{N}$, $k > n + 1$ - чётно, $n > 1$ - нечётно. Тогда ребро от P_2 к P_1 в графе G проводится тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- 1) $P_2 = (3, 2) \sqcup (k, 2n)$;

- 2) $P_2 = (1, 2) \sqcup (k + 2n, 2n)$;
 3) $P_2 = (1, 2p) \sqcup (k, 2n)$, p – простое, $p \nmid n$ или $p \mid k - 1$;
 4) $P_2 = (1, 2) \sqcup (k, 2np)$, p – простое;
 5) $P_2 = (1, 2p) \sqcup (k - n, n)$, p – простое, $p \mid n$, $p \nmid k - 1$.

Доказательство.

Доказательство леммы похоже на доказательство леммы 14. Поэтому будем излагать его подробно только там, где оно отличается.

Кандидаты (1 – 2) точно соединены ребром с P_1 . В других кандидатах вида

$$P_2 = (c, d) \sqcup (e, f)$$

точно есть 1 и k . Одновременно d и f равны 0 быть не могут. Если $d = 0$, $f > 0$, то возможны **варианты. В первом** $1, k \in (e, f)$. Не при всех k этот вариант вообще возможен. Но в любом случае, если $c \in (1, 2)$, то

$$P_2 \subsetneq (1, 2) \sqcup ((e, f) \cap (k, 2n)) \subsetneq P_1.$$

А если $c \in (k, 2n)$, то

$$P_2 \subsetneq ((1, 2) \cap (e, f)) \sqcup (k, 2n) \subsetneq P_1.$$

Во втором варианте $c = 1$ и $k \in (e, f)$. Если $(k, 2n) \not\subset (e, f)$, то

$$P_2 \subsetneq (1, 2) \sqcup ((e, f) \cap (k, 2n)) \subsetneq P_1.$$

Иначе, $f = n$ или $f = 2n$. Если $f = n$, то тут возможны **два случая**. Или $\text{НОД}(k-1, n) > 1$ и тогда для любого общего простого делителя p чисел $k - 1$ и n будет

$$P_2 = (1, 0) \sqcup (e, n) \subset (1, 2p) \sqcup (k, 2n) \subsetneq P_1.$$

Это **кандидат (3)**. Или же $\text{НОД}(k - 1, n) = 1$ и для любого простого делителя p числа n получим

$$P_2 = (1, 0) \sqcup (e, n) \subsetneq (1, 2p) \sqcup (e, n) \subsetneq P_1.$$

Если же $f = 2n$, то $e = k$ и

$$P_2 = (1, 0) \sqcup (k, 2n) \subsetneq (1, 4) \sqcup (k, 2n) \subsetneq P_1.$$

В третьем варианте $c = k$ и $e = 1$. Если $(1, f)$ - зигзаг, то

$$P_2 = (k, 0) \sqcup (1, f) \subset (1, 0) \sqcup (k - n, n) \subsetneq P_1.$$

А это уже **второй вариант**. Если же $(1, f)$ - полоса, то

$$P_2 = (k, 0) \sqcup (1, f) \subsetneq (1, 2) \sqcup (k, 4n) \subsetneq P_1.$$

Пусть теперь $d > 0$, $f > 0$. Если (c, d) и (e, f) — **полосы**, то, без ограничения общности, $c = 1$, $k = e$ и тогда эти P_2 — **кандидаты (3 – 4)**. Пусть теперь (c, d) и (e, f) — **полоса и зигзаг**. Без ограничения общности, полосой будет (c, d) . Если $(c, d) \subset (1, 2)$, то

$$P_2 \subset (1, 2) \sqcup ((e, f) \cap (k, 2n)) \subset P_1.$$

Тогда или P_2 уже представлен нами как «полоса+полоса», или же $(k, 2n) \subset (e, f)$, т.е. $f = n$ или $f = 2n$. Если $f = n$, то $(e, f) = (k - n, n)$ и $(c, d) = (1, 2d_1)$. Тогда по лемме 1 у n и d_1 есть общий простой делитель p , на который не делится $k - 1$, и

$$P_2 \subset (1, 2p) \sqcup (k - n, n) \subsetneq P_1.$$

Получаем **кандидата (5)**. Если же $f = 2n$, то

$$(e, f) = (k, 2n) \text{ и } (c, d) = (1, 2d_1).$$

Берем любой простой делитель числа d_1 и получаем **кандидата (3)**. Осталось разобрать случай, когда (c, d) и (e, f) — **зигзаги**. По лемме 4 тогда получаем

$$P_2 \subset (k - n, 2n)^+ \sqcup (k, 2n) \subsetneq P_1,$$

а это уже случай «полоса+полоса».

Доказательство попарной невложимости **представителей** из **(1 – 5)** дословно повторяет соответствующую часть доказательства леммы 14, только с заменой (k, n) на $(k - n, n)$.

■

Лемма 16. О слабой синхронизации четвертого типа. Пусть $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$,

$$P_1 = (1, 2n) \sqcup (n + 1, 2),$$

где $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ и n нечетно. Тогда ребро от P_2 к P_1 в графе G проводится тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- 1) $P_2 = (1 + 2n, 2n) \sqcup (n + 1, 2)$;
- 2) $P_2 = (1, 2n) \sqcup (n + 3, 2)$;
- 3) $P_2 = (1, 2np) \sqcup (n + 1, 2)$, p — простое;
- 4) $P_2 = (1, 2n) \sqcup (n + 1, 2p)$, p — простое, $p \neq n$;
- 5) $P_2 = (1, n) \sqcup (2x + n + 1, 2p)$, p — простое, $0 < x < p$, $p|n$.

Доказательство.

Синхронизация четвертого типа очень похожа на синхронизацию первого типа, приводимую аккуратно в лемме 13. Поэтому дадим здесь лишь неформальное сокращенное доказательство.

Пусть в графе G проведено ребро от P_2 к P_1 и

$$P_2 = (c, d) \sqcup (e, f).$$

Вариант, когда в P_2 нет 1 или $n + 1$, дает нам **кандидатов (1 – 2)**. Пусть теперь эти числа есть в P_2 . Разбираем **случай**. Если $d = f = 0$, т.е. P_2 — это «**точка+точка**», то P_2 можно поглотить «полосой+полосой». То же самое верно и в случае, когда P_2 — «**точка+полоса**». Случай, когда P_2 — «**полоса+полоса**» дает нам **кандидатов (3 – 4)**. Только нужно учесть, что $(1, 2n) \sqcup (n + 1, 2n)$ с $p = n$ в (4) нам не подходит, так как поглощается **кандидатом (5)**. Разбираем случай, когда P_2 — «**точка+зигзаг**». Если точка (обозначим ее за x) лежит в $(1, n)$, то по лемме 4 о зигзаге конструкция поглощается $(1, n) \sqcup (n + 3, 0)$. А если точки в $(1, n)$ нет, то конструкция поглощается $(1, n) \sqcup (x, 2n)$. Аналогично, в случае, когда P_2 — «**зигзаг+зигзаг**», конструкция по лемме 4 о зигзаге поглощается $(1, n) \sqcup (n + 3, 0)$. Осталось разобрать только случай «**полоса+зигзаг**». Если полоса лежит в $(1, 2n)$, то конструкция поглощается $(1, n) \sqcup (n + 3, 0)$. Значит полоса лежит в $(n + 1, 2)$. Далее, если зигзаг не покрывает целиком $(1, 2n)$, то конструкция поглощается $(n + 1, 2) \sqcup ((1, 2n) \cap (\text{зигзаг}))$. Значит зигзаг покрывает $(1, 2n)$, т.е. $f = n$ или $f = 2n$. В первом случае получаем **кандидата (5)**, а второй случай невозможен, так как зигзаг превращается в полосу.

Доказательство попарной невложимости **кандидатов (1 – 5)** повторяет аналогичные рассуждения леммы 13.



Лемма 17. О слабой синхронизации пятого типа. Пусть $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$,

$$P_1 = (1, 2n) \sqcup (k, 2),$$

где $k, n \in \mathbb{N}$, $k < n + 1$ — чётно, $n > 1$ — нечётно. Тогда ребро от P_2 к P_1 в графе G проводится тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- 1) $P_2 = (1 + 2n, 2n) \sqcup (k, 2)$;
- 2) $P_2 = (1, 2n) \sqcup (k + 2, 2)$;
- 3) $P_2 = (1, 2np) \sqcup (k, 2)$, p — простое;
- 4) $P_2 = (1, 2n) \sqcup (k, 2p)$, p — простое, $p \nmid n$ или $p \mid k - 1$;
- 5) $P_2 = (1, n) \sqcup (k, 2p)$, p — простое, $p \mid n$, $p \nmid k - 1$.

Доказательство.

Как и в предыдущей лемме, случаи «точка+точка», «точка+полоса», «точка+зигзаг» невозможны, а случаи «полоса+полоса», «зигзаг+зигзаг» дают нам кандидатов (3 — 4). А в случае «полоса+зигзаг» полоса лежит в $(k, 2)$, так как иначе конструкция поглощается $(1, n) \sqcup (k, 0)$. Тогда зигзаг покрывает целиком $(1, 2n)$, так как иначе конструкцию можно поглотить множеством $(k, 2) \sqcup ((1, 2n) \cap (\text{зигзаг}))$. Значит $f = n$ и мы получаем кандидата (5).

Доказательство попарной невложимости кандидатов (1 — 5) повторяет аналогичные рассуждения леммы 14.

■

Лемма 18. О слабой синхронизации шестого типа. Пусть $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$,

$$P_1 = (1, 2n) \sqcup (k, 2),$$

где $k, n \in \mathbb{N}$, $k > n + 1$ — чётно, $n > 1$ — нечётно. Тогда ребро от P_2 к P_1 в графе G проводится тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- 1) $P_2 = (1 + 2n, 2n) \sqcup (k, 2)$;
- 2) $P_2 = (1, 2n) \sqcup (k + 2, 2)$;
- 3) $P_2 = (1, 2np) \sqcup (k, 2)$, p — простое;
- 4) $P_2 = (1, 2n) \sqcup (k, 2p)$, p — простое.

Доказательство.

Этот тип слабой синхронизации еще проще, чем остальные. Отличие возникает только том в случае «**полоса+зигзаг**». Здесь точно так же полоса должна лежать в $(k, 2)$. А зигзаг по лемме 4 лежит в

$$(k - n, 2n)^+ \sqcup (k, 2n).$$

Но если он не содержит в себе все $(1, 2n)$, то конструкцию можно поглотить множеством

$$(k, 2) \sqcup ((1, 2n) \cap (\text{зигзаг})).$$

Ну а если в зигзаге есть $(1, 2n)$, то он равен $(1, n)$; но в P_1 нет числа $n + 1$. Поэтому варианта с **кандидатом** вида (5) из предыдущих лемм не возникает.

Доказательство попарной невложимости **кандидатов (1 – 4)** уже много раз было доказано в других леммах.

■

Лемма 19. О сильной синхронизации. Пусть $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$,

$$P_1 = (1, 2) \sqcup (k, 2),$$

где $k \geq 6$ — *четно*. Тогда ребро от P_2 к P_1 в графе G проводится тогда и только тогда, когда выполнено одно из семи условий:

- 1) $P_2 = (3, 2) \sqcup (k, 2)$;
- 2) $P_2 = (1, 2) \sqcup (k + 2, 2)$;
- 3) $P_2 = (1, 2p) \sqcup (k, 2)$, p — *простое*, $2p < k - 2$;
- 4) $P_2 = (1, 2) \sqcup (k, 2p)$, p — *простое*;
- 5) $P_2 = (1, 0) \sqcup (k - 1, 1)$;
- 6) $P_2 = (1, k - 1) \sqcup (x, n)$, $3 \leq x \leq k - 3$ — *нечетное*, $n \in A(x, k)$;
- 7) $P_2 = (1, n) \sqcup (x, k - x)$, $3 \leq x \leq k - 3$ — *нечетное*, $n \in B(x, k)$.

Доказательство.

Необходимость наличия в списке **условий (1 – 2)** очевидна. Пусть в графе G проведено ребро от P_2 к P_1 и

$$P_2 = (c, d) \sqcup (e, f).$$

Как и ранее, это не могут быть «точка+точка», и «точка+полоса». Вариант «полоса+полоса» дает нам кандидатов (3 – 4). Важно лишь учесть, что серия « $P_2 = (1, 2p) \sqcup (k, 2)$ », p – простое» при $2p \geq k - 2$ пропадает, так как в этом случае

$$(1, 2p) \sqcup (k, 2) \subsetneq (1, 0) \sqcup (k - 1, 1).$$

Рассмотрим вариант «точка+зигзаг». Если зигзаг не накрывает целиком ни одну из прогрессий $(1, 2)$, $(k, 2)$, то конструкцию можно накрыть «полосой+полосой». Поэтому в этом варианте шаг зигзага равен 1, а сам зигзаг, как следствие, равен $(k - 1, 1)$. Но тогда точкой точно будет число 1. Получили кандидата (5). Рассмотрим вариант «полоса+зигзаг». Как и в предыдущем случае, для того, чтобы наша конструкция не накрывалась «полосой+полосой», зигзаг должен иметь шаг 1. Но тогда он точно пересекает нашу полосу, что невозможно. Разберем теперь последний вариант «зигзаг+зигзаг». Чтобы конструкция не накрывалась кандидатами $(1, 2, 5)$, в ней должны быть числа 1, k и хоть одно из чисел $3, 5, \dots, k - 3$. При этом, шаги d, f зигзагов должны быть нечетны, иначе они бы стали полосами. Возможны только два исхода. В первом числа 1, k попадают в один и тот же зигзаг. Тогда это точно $(1, k - 1)$. И начало e второго зигзага должно лежать в $\{1, 3, \dots, k - 3\}$. Получили

$$P_2 = (1, k - 1) \sqcup (x, n), \quad 3 \leq x \leq k - 3 - \text{нечетное}, \quad n - \text{нечетное}.$$

Покажем, что $n \in A(x, k)$, т.е. выполнены условия

$$n > k - x, \quad \text{НОД}(n, k - 1) \nmid x - 1, \quad \text{НОД}(n, x - 1, k - 1) = 1$$

и что для любого собственного делителя t числа n имеет место или условие $t < k - x$, или условие $\text{НОД}(t, k - 1) \mid x - 1$. Условие $n > k - x$ следует из того, что $n + x$ четно, а k – минимальное четное число в P_1 . И $n \neq k - x$ из-за непересечения последовательностей в P_2 . Из этого же непересечения по лемме 1 получаем $\text{НОД}(n, k - 1) \nmid x - 1$. Условие $\text{НОД}(n, x - 1, k - 1) = 1$ выполнено, так как иначе для любого общего простого делителя p чисел $n, x - 1, k - 1$ получаем

$$(1, k - 1) \sqcup (x, n) \subset (1, 2p) \cup (k, 2) \subsetneq P_1.$$

Наконец, если для некоторого собственного делителя t числа n имеет место неравенство $t \geq k - x$ и $\text{НОД}(t, k - 1) \nmid x - 1$, то

$$(1, k - 1) \sqcup (x, n) \subset (1, k - 1) \cup (x, t) \subsetneq P_1.$$

Получили кандидата (6). Во втором исходе числа $1, k$ попадают в разные зигзаги. Тогда зигзаг с 1 проходит мимо чисел $3, 5, \dots, k-3$. И ровно одно из них лежит в зигзаге с k . С этого числа, которое обозначаем за x , зигзаг и начинается. Получили

$$P_2 = (1, n) \sqcup (x, k-x), \quad 3 \leq x \leq k-3 - \text{нечетное}, \quad n - \text{нечетное}.$$

Покажем, что $n \in B(x, k)$, т.е. выполнены условия

$$n > k-1, \quad \text{НОД}(n, k-x) \nmid x-1, \quad \text{НОД}(n, k-x, k-1) = 1$$

и что для любого собственного делителя t числа n имеет место или условие $t < k-1$, или условие $\text{НОД}(t, k-x) \mid x-1$. Условие $n > k-1$ следует из того, что $n+1$ четно, а k — минимальное четное число в P_1 . И $n \neq k-1$ из-за непересечения последовательностей в P_2 . Из этого же непересечения по лемме 1 получаем $\text{НОД}(n, k-x) \nmid x-1$. Условие $\text{НОД}(n, k-x, k-1) = 1$ выполнено, так как иначе для любого общего простого делителя p чисел $n, k-x, k-1$ получаем

$$(1, n) \sqcup (x, k-x) \subset (1, 2p) \cup (k, 2) \subsetneq P_1.$$

Наконец, если для некоторого собственного делителя t числа n имеет место неравенство $t \geq k-1$ и $\text{НОД}(t, k-x) \nmid x-1$, то

$$(1, n) \sqcup (x, k-x) \subset (1, t) \cup (x, k-x) \subsetneq P_1.$$

Получили кандидата (7).

Покажем теперь попарную невозможность кандидатов (1–7). Для (1–2) все очевидно. Также тривиальны сравнения внутри (3–4). Разбираем оставшиеся случаи, в которых задействованы (5–7). Представитель (3) не может вкладываться в представителя (5), так как из условия

$$(1, 2p) \sqcup (k, 2) \subset (1, 0) \sqcup (k-1, 1)$$

следовало бы $1+2p \geq k-1$, т.е. $2p \geq k-2$. Представитель (3) не может вкладываться в представителя (6), так как из условия

$$(1, 2p) \sqcup (k, 2) \subset (1, k-1) \sqcup (x, n)$$

по лемме 4 о зигзаге получили бы $k-1 \mid 4$, но $k-1$ — нечетно и больше 1. Точно также, представитель (3) не может вкладываться в представителя (7), так как из условия

$$(1, 2p) \sqcup (k, 2) \subset (1, n) \sqcup (x, k-x)$$

по лемме 4 о зигзаге получили бы $k-x \mid 4$, но $k-x$ нечетно и больше 1. **Представитель (4)** не может вкладываться в **представителя (5)**, так как в левой части гипотетического вложения

$$(1, 2) \sqcup (k, 2p) \subset (1, 0) \sqcup (k-1, 1)$$

есть число 3, а в правой части его нет. **Представитель (4)** не может вкладываться в **представителей (6 – 7)** по тем же соображениям, что и **(3)**. **Представитель (5)** не может вкладываться в **представителя (3)**, так как из условия

$$(1, 0) \sqcup (k-1, 1) \subset (1, 2p) \sqcup (k, 2)$$

следует $(k-1, 2) \subset (1, 2p)$, что невозможно. **Представитель (5)** не может вкладываться в **представителя (4)**, так как из условия

$$(1, 0) \sqcup (k-1, 1) \subset (1, 2) \sqcup (k, 2p)$$

следует $(k, 2) \subset (k, 2p)$, что невозможно. **Представитель (5)** не может вкладываться в **представителя (6)**, так как из условия

$$(1, 0) \sqcup (k-1, 1) \subset (1, k-1) \sqcup (x, n)$$

по лемме 4 о зигзаге следует $k-1 \mid 2$, но $k \geq 6$. Аналогично, **представитель (5)** не может вкладываться в **представителя (7)**, так как из условия

$$(1, 0) \sqcup (k-1, 1) \subset (1, n) \sqcup (x, k-x)$$

по лемме 4 о зигзаге следует $n \mid 2$, но $n > k-1 \geq 5$. Покажем, что **представитель (6)** не может вкладываться в **представителя (3)**. Иначе было бы

$$(1, k-1) \sqcup (x, n) \subset (1, 2p) \sqcup (k, 2),$$

т.е.

$$(1, 2k-2) \sqcup (x, 2n) \subset (1, 2p).$$

Но тогда числа $k-1$, $x-1$ и n делятся на p , что невозможно из-за ограничения $\text{НОД}(n, x-1, k-1) = 1$. **Представитель (7)** не может вкладываться в **представителя (3)**, иначе было бы

$$(1, n) \sqcup (x, k-x) \subset (1, 2p) \sqcup (k, 2),$$

т.е.

$$(1 + n, 2n) \sqcup (k, 2k - 2x) \subset (1, 2p).$$

В этом случае числа $n, k - 1, k - x$ делятся на p , но

$$\text{НОД}(n, k - x, k - 1) = 1.$$

Представитель (6) не может вкладываться в **представителя (4)**, иначе было бы

$$(1, k - 1) \sqcup (x, n) \subset (1, 2) \sqcup (k, 2p),$$

т.е.

$$(k, 2k - 2) \sqcup (x + n, 2n) \subset (k, 2p).$$

Тогда числа $k - 1, x + n - k, n$ делятся на p . Значит и число $x - 1$ делится на p , а это, как уже было показано выше, невозможно.

Представитель (7) не может вкладываться в **представителя (4)**, иначе было бы

$$(1, n) \sqcup (x, k - x) \subset (1, 2p) \sqcup (k, 2),$$

т.е.

$$(1, 2n) \sqcup (x, 2k - 2x) \subset (1, 2p).$$

Тогда числа $n, x - 1, k - x$ делятся на p . Значит и число $k - 1$ делится на p , а это невозможно. **Представители (6 – 7)** не могут вкладываться в **представителя (5)**, так как в них есть одно из чисел $3, 5, \dots, k - 3$. **Представитель (6)** не может вкладываться в другого **представителя (6)**, так как иначе

$$(1, k - 1) \sqcup (x_1, n_1) \subset (1, k - 1) \sqcup (x_2, n_2),$$

т.е.

$$(x_1, n_1) \subset (x_2, n_2).$$

Тогда $x_1 = x_2$ и n_2 - собственный делитель числа n_1 . Но мы знаем, что для любого собственного делителя t числа n_1 имеет место $t < k - x_1$ или $\text{НОД}(t, k - 1) \mid x_1 - 1$. Получили противоречие, ведь $n_2 \geq k - x_2 = k - x_1$ и $\text{НОД}(n_2, k - 1) \nmid x_2 - 1 = x_1 - 1$. Аналогично, **представитель (7)** не может вкладываться в другого **представителя (7)**, так как иначе

$$(1, n_1) \sqcup (x_1, k - x_1) \subset (1, n_2) \sqcup (x_2, k - x_2).$$

Здесь точно $x_1 = x_2$. Поэтому

$$(1, n_1) \subset (1, n_2)$$

и n_2 - собственный делитель числа n_1 . Далее рассуждения повторяют предыдущий случай. **Представитель (6)** не может вкладываться в **представителя (7)**, так как иначе

$$(1, k - 1) \sqcup (x_1, n_1) \subset (1, n_2) \sqcup (x_2, k - x_2)$$

и по лемме 4 о зигзаге $2(k - 1)$ делится на n_2 . Так как n_2 нечетно, то $k - 1$ делится на n_2 . Но $n_2 > k - 1$. Противоречие. Наконец, **представитель (7)** не может вкладываться в **представителя (6)**, так как иначе

$$(1, n_1) \sqcup (x_1, k - x_1) \subset (1, k - 1) \sqcup (x_2, n_2).$$

Тогда обязательно $x_1 = x_2$. Значит по лемме 4 о зигзаге $2(k - x_1)$ делится на n_2 . Так как n_2 нечетно, то $k - x_1$ делится на n_2 . Но $n_2 > k - x_2 = k - x_1$. Противоречие.

■

Доказательство основной теоремы

Доказательство будет проходить перебором по всем возможным вариантам для P_1 (с учетом замечания к лемме 2.) Пусть

$$P_1 = (a, b) \sqcup (c, d).$$

Если P_1 — объединение двух точек, т.е. $b = d = 0$, то в P_2 вообще не существует собственных подмножеств P_1 . Если P_1 — объединение точки и полосы, т.е., без ограничения общности, $b = 0, d > 0$, то возможны случаи. Если $a \in (c, d)^+$, то P_1 можно преобразованием подобия перевести в $(1, 0) \sqcup (x, 1)$. При $x = 2$ получаем условие 1, описанное в лемме 7. При $x = 3$ получаем условие 2, описанное в лемме 8 о точке и полосе отступа 2. При $x > 3$ получаем условие 3, описанное в лемме 9 о точке и полосе отступа больше 2. Если же $a \notin (c, d)^+$, то получаем условие 4, описанное в лемме 10 о точке и

внешней полосе. Пусть теперь $b > 0, d > 0$. Здесь тоже возможны варианты. Если последовательности (a, b) и (c, d) не согласованные, то получаем условие 5, описанное в лемме 11 о двух несогласованных полосах. Если последовательности (a, b) и (c, d) согласованные, но не синхронные, то получаем условие 6, описанное в лемме 12 о двух асинхронных полосах. Если последовательности (a, b) и (c, d) слабо синхронны, то по лемме 5 об общем виде слабой синхронизации P_1 можно преобразованием подобия перевести в одно из множеств вида

$$(1, 2) \sqcup (k, 2n), \quad (1, 2n) \sqcup (k, 2),$$

где $k, n \in \mathbb{N}$, k — четно, $n > 1$ — нечетно. Если это $(1, 2) \sqcup (k, 2n)$, то при $k = n + 1$ по лемме 13 о слабой синхронизации первого типа получаем условие 7. А при $k \neq n + 1$ из лемм 14, 15 о слабой синхронизации второго и третьего типов выводится условие 8. Если же P_1 подобно множеству $(1, 2n) \sqcup (k, 2)$, то при $k = n + 1$ по лемме 16 о слабой синхронизации четвертого типа получаем условие 9. При $k < n + 1$ из леммы 17 о слабой синхронизации пятого типа выводится условие 10. Наконец, при $k > n + 1$ из леммы 18 о слабой синхронизации шестого типа выводится условие 11. Остался не разобранным последний случай, в котором последовательности (a, b) и (c, d) сильно синхронны. По лемме 6 об общем виде сильной синхронизации P_1 можно преобразованием подобия перевести в множество вида

$$(1, 2) \sqcup (k, 2),$$

где $k \in \mathbb{N}$ и k — четно. Если $k = 2$ или $k = 4$, то эти случаи уже описаны нами в условиях 1 и 2. А если $k \geq 6$, то по лемме 19 о сильной синхронизации получаем условие 12. Все случаи рассмотрены. ■

Список литературы

- [1] П. С. Дергач, Э. С. Айрапетов. *О прогрессивном разбиении некоторых подмножеств натурального ряда*. Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 3, М., Сс. 79-86.

- [2] П. С. Дергач. *О каноническом регулярном представлении S -тонких языков*. Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 1, М., Сс. 211-242.
- [3] П. С. Дергач. *О проблеме вложения допустимых классов*. Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 2, М., Сс. 143-174.
- [4] П. С. Дергач. *О двух размерностях спектров тонких языков*. Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 3, М., Сс. 155-174.
- [5] П. С. Дергач, Э. С. Айрапетов. *О прогрессивном разбиении последовательности натуральных чисел, имеющей пропуск длины 2*. Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 2, М., Сс. 67-86.
- [6] Е. Д. Данилевская, П. С. Дергач. *О покрытиях и разбиениях натуральных чисел, имеющих два последовательных пропуска длины 1*. Интеллектуальные системы, 2017. Т.21, вып. 1, М., Сс.187-230.
- [7] Д. Е. Александров. *Эффективные методы реализации проверки содержания сетевых пакетов регулярными выражениями*. Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 1, М., Сс. 37-60.
- [8] Д. Н. Бабин. *Частотные регулярные языки*. Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 1, М., Сс. 205-210.
- [9] Д. Е. Александров. *Об оценках автоматной сложности распознавания классов регулярных языков*. Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 4, М., Сс. 161-190.
- [10] В. М. Дементьев. *О звездной высоте регулярного языка и циклической сложности минимального автомата*. Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 4, М., Сс. 215-222.
- [11] И. Е. Иванов. *О сохранении периодических последовательностей автоматами с магазинной памятью с однобуквенным магазином*. Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 1, М., Сс. 145-160.
- [12] А. А. Петюшко. *О контекстно-свободных биграммных языках*. Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 2, М., Сс. 187-208.

- [13] И. Е. Иванов. *Нижняя оценка на максимальную длину периода выходной последовательности автономного автомата с магазинной памятью*. Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 3, М., Сс. 175-194.
- [14] В. А. Орлов. *О конечных автоматах с максимальной степенью различимости состояний*. Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 1, М., Сс. 213-222.
- [15] П. С. Дергач. *О проблеме проверки однозначности алфавитного декодирования в классе регулярных языков с полиномиальной функцией роста*. Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 2, М., Сс. 147-202.
- [16] А. М. Миронов. *Основные понятия теории вероятностных автоматов*. Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 2, М., Сс. 283-330.
- [17] А. А. Петюшко, Д. Н. Бабин. *Классификация Хомского для матриц биграммных языков*. Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 2, М., Сс. 331-336.
- [18] С. Б. Родин. *О связи линейно реализуемых автоматов и автоматов с максимальной вариативностью относительно кодирования состояний*. Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 2, М., Сс. 337-348.