

Алгебры на индикаторах К-булеанов множеств

Баранович А.Е.

Исследуется изоморфизм алгебр на k -булеанах множеств в аксиоматике ZFU и соответствующего им k -гиперпространства индикаторов над $GF[2]$. Оценивается сложность решения задач поиска в k -булеанах множеств. Полученные результаты проецируются на модель k -гиперпространства семиотико-хроматических гипертопографов в аксиоматической системе $[G]^1$. Последняя положена в основу вычислительной архитектуры ёмкостного паракомпьютера управления знаниями интеллектуальной системы.

Ключевые слова: алгебр морфизмы, алгоритмов сложность ёмкостная, алгоритмов сложность операционная, гипертопографы семиотико-хроматические, графов теории обобщения, графов теории однообъектная парадигма, знаниями управление, множеств индикаторы, множеств (- носителей) k -топологизация, множеств k -булеан, множеств k -булеанов индикаторы, паракомпьютер ёмкостной, поиск на множествах, системы интеллектуальные, топологии дискретные с конечным носителем, k -гиперпространство булево

В работе [6] обоснован изоморфизм алгебр множеств $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}[1,X]}$: $\langle \mathfrak{B}[1, X], \{\Omega_{\mathbb{F}}^{\mathfrak{B}[1,X]} : \cup, \cap, \setminus, -, \Delta\} \rangle$ и алгебры индикаторов $\mathfrak{A}_{I^{\mathfrak{B}[1,X]}}$: $\langle I^{\mathfrak{B}[1,X]}, \{\Omega_{\mathbb{F}}^{I[1]} : \omega_{\cup}^{I[1]}, \omega_{\cap}^{I[1]}, \omega_{\setminus}^{I[1]}, \omega_{-}^{I[1]}, \omega_{\Delta}^{I[1]}\} \rangle$ специального вида. Показана возможность решения задачи поиска произвольных элементов в упорядоченных булеанах $\mathfrak{B}[0, X] - \mathfrak{B}[1, X]$ за $O(const)$ условных операций (на вполне определенной векторной модели вычислений) при соответствующих значениях параметра ёмкостной сложности. Вследствие реальных ограничений на исследуемые системы, нас в максимальной степени будут интересовать алгебры на конечных множествах (точнее, ZFU

[9]). И, в частности, алгебра множеств $\langle \mathfrak{B}[1, X], \{\Omega_F^M : \cup, \cap, \setminus\} \rangle$, где $\mathfrak{B}[1, X]$ есть булеан 1-го порядка конечного множества-носителя X^1 , что априори предполагает вхождение (принадлежность) \emptyset и X в $\mathfrak{B}[1, X]$. Для любого конечного множества X , $|X| = n$ с отношением строго порядка (перенумерованного) может быть определен *упорядоченный* массив (множество) *индикаторов* $I^{\mathfrak{B}[1, X]}$ из $[GF(2)]^{|\mathfrak{B}[0, X]|}$ мощности $|I^{\mathfrak{B}[1, X]}| = 2^{|\mathfrak{B}[0, X]|}$, включая \emptyset -множество, биективно соответствующий булеану множества X первого уровня топологизации² $\mathfrak{B}[1, X]$ [6-8]³. Из определения индикатора следует, что множество индикаторов $I^{\mathfrak{B}[1, X]}$ есть полное конечное булево пространство $[GF(2)]^{|\mathfrak{B}[0, X]|}$.

На множестве $I^{\mathfrak{B}[1, X]}$: $\{\vec{x}_i\}, \vec{x}_i \in [GF(2)]^n$, $i = \overline{1, 2^n}$, индикаторов $\mathfrak{B}[1, X]$ ($I^{\mathfrak{B}[1, X]} \leftrightarrow \mathfrak{B}[1, X]$) определены, в частности, алгебраические операции \wedge, \vee ,

\neg, \oplus , а соответственно, и алгебра индикаторов $\langle I^{\mathfrak{B}[1, X]}, \{\Omega_F^I : \wedge, \vee, \neg, \oplus\} \rangle$ в упомянутой сигнатуре. Из продолжения биективного соответствия $\phi^1 : \mathfrak{B}$

$[1, X] \leftrightarrow I^{\mathfrak{B}[1, X]}$ ($\phi^1 : X_\tau \equiv \vec{x}_\tau$) на морфизм⁴ алгебр $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}[1, X]} : \langle \mathfrak{B}[1, X], \{\Omega_F^{\mathfrak{B}[1, X]} : \cup, \cap, \setminus, -, \Delta\} \rangle$ и $\mathfrak{A}_{I^{\mathfrak{B}[1, X]}} : \langle I^{\mathfrak{B}[1, X]}, \{\Omega_F^{I[1]} : \omega_{\cup}^{I[1]}, \omega_{\cap}^{I[1]}, \omega_{\setminus}^{I[1]}, \omega_{-}^{I[1]}, \omega_{\Delta}^{I[1]}\} \rangle$ вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \omega_{\cup}^{I[1]} \equiv \phi^1(\cup_{i,j}(X_i, X_j)) \equiv \vee_{i,j}(\phi^1(X_i), \phi^1(X_j)) \equiv \vee_{i,j}(\vec{x}_i, \vec{x}_j). \\ 2. \omega_{\cap}^{I[1]} \equiv \phi^1(\cap_{i,j}(X_i, X_j)) \equiv \wedge_{i,j}(\phi^1(X_i), \phi^1(X_j)) \equiv \wedge_{i,j}(\vec{x}_i, \vec{x}_j). \\ 3. \omega_{\setminus}^{I[1]} \equiv \phi^1(\setminus_{i,j}(X_i, X_j)) \equiv \oplus_{i,j}(\vec{x}_i, \wedge_{i,j}(\vec{x}_i, \vec{x}_j)). \\ 4. \omega_{-}^{I[1]} \equiv \phi^1(\overline{X}_i) \equiv \phi^1(\setminus(X, X_i)) \equiv \oplus_i(\vec{1}, \vec{x}_i) \equiv \vec{x}_i. \\ 5. \omega_{\Delta}^{I[1]} \equiv \phi^1(\Delta(X_i, X_j)) \equiv \oplus_{i,j}(\vee_{i,j}(\vec{x}_i, \vec{x}_j), \wedge_{i,j}(\vec{x}_i, \vec{x}_j)), \end{array} \right. \quad (1)$$

¹ Ранее - булеан $\mathfrak{B}[X]$ (простой) конечного множества X , $|\mathfrak{B}[X]| = 2^{|X|}$, как множество всех его подмножеств, включая \emptyset и само X [8].

² Множество X есть по определению булеан нулевого уровня $\mathfrak{B}[0, X]$ и $|X| = |\mathfrak{B}[0, X]|$. Булеан $\mathfrak{B}[1, X]$ есть дискретная топология на X [7].

³ Вследствие тождественности $X \equiv \mathfrak{B}[0, X]$, в качестве подмножества индикаторов $I^{\mathfrak{B}[0, X]}$ элементов X в $\mathfrak{B}[1, X]$ (одноточечных представителей X) выступают единичные вектора из $I^{\mathfrak{B}[1, X]}$ (базис $[GF(2)]^n$, $n = |\mathfrak{B}[0, X]|$).

⁴ При задействовании понятий гомоморфизма и изоморфизма алгебраических систем в настоящей работе используется система определений, введённая в [6].

- следует утверждение 1 (лемма 1) [6].

Лемма 1. *Морфизм алгебр $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}[1,X]} \Leftrightarrow \mathfrak{A}_{I^{\mathfrak{B}[1,X]}}$ вида (1) есть изоморфизм \triangleleft*

По аналогии с вышесказанным (см. п. 2 в [6]) определим для любого конечного булеана k -го уровня $\mathfrak{B}[k, X]$ ($X \equiv \mathfrak{B}[0, X] \subset \mathfrak{B}[1, X] \subset \dots \subset \mathfrak{B}[k, X] \subset \mathfrak{B}[k+1, X]$), с введенным отношением строго порядка (перенумерованного), $|\mathfrak{B}[k, X]| = 2^{\cdot 2^{|X|-1}}$ ($k-1$ экземпляров 2 в показателе), включая \emptyset [6], упорядоченный массив (множество) индикаторов $I^{\mathfrak{B}[k+1,X]}$ размерности $|\mathfrak{B}[k, X]|$ из $[GF(2)]^{|\mathfrak{B}[k,X]|}$ мощности $|I^{\mathfrak{B}[k+1,X]}| = 2^{|\mathfrak{B}[k,X]|}$, биективно соответствующий булеану $\mathfrak{B}[k+1, X]$ и сохраняющий порядок множества индикаторов $I^{\mathfrak{B}[1,X]}$. В результате получим соответствие $\phi^{k+1} : I^{\mathfrak{B}[k+1,X]} \leftrightarrow \mathfrak{B}[k+1, X]$ как продолжение соответствия $\phi^1 : I^{\mathfrak{B}[1,X]} \leftrightarrow \mathfrak{B}[1, X]$. На множестве $I^{\mathfrak{B}[k+1,X]} : \{\vec{x}_i\}, \vec{x}_i \in [GF(2)]^{|\mathfrak{B}[k,X]|}, i = 1, 2^{|\mathfrak{B}[k,X]|}$, индикаторов $\mathfrak{B}[k+1, X]$ определены алгебраические операции $\wedge, \vee, \neg, \oplus$, а соответственно, и алгебра индикаторов $\langle I^{\mathfrak{B}[k+1,X]}, \{\Omega_{\mathbb{F}}^I : \wedge, \vee, \neg, \oplus\} \rangle$ в упомянутой сигнатуре.

Используем биективное соответствие $\phi^{k+1} : \mathfrak{B}[k+1, X] \leftrightarrow I^{\mathfrak{B}[k+1,X]}$ в целях его продолжения на морфизм алгебр $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}[k+1,X]} :$
 $\langle \mathfrak{B}[k+1, X], \{\Omega_{\mathbb{F}}^{\mathfrak{B}[k+1,X]} : \cup, \cap, \setminus, -, \Delta\} \rangle$ в $\mathfrak{A}_{I^{\mathfrak{B}[k+1,X]}} : \langle I^{\mathfrak{B}[k+1,X]}, \{\Omega_{\mathbb{F}}^{I[k+1]} : \omega_{\cup}^{I[k+1]}, \omega_{\cap}^{I[k+1]}, \omega_{\setminus}^{I[k+1]}, \omega_{-}^{I[k+1]}, \omega_{\Delta}^{I[k+1]}\} \rangle$ следующего вида

(1-5):

$$\left\{ \begin{array}{l}
 1. \omega_{\bigcup}^{I[k+1]} \equiv \phi^{k+1}(\bigcup_{i,j}(b_i[k+1], b_j[k+1])) \equiv \\
 \equiv \vee_{i,j}(\phi^{k+1}(b_i[k+1], \phi^{k+1}(b_j[k+1])) \equiv \vee_{i,j}(\vec{b}_i[k+1], \vec{b}_j[k+1]). \\
 2. \omega_{\bigcap}^{I[k+1]} \equiv \phi^{k+1}(\bigcap_{i,j}(b_i[k+1], b_j[k+1])) \equiv \\
 \equiv \wedge_{i,j}(\phi^{k+1}(b_i[k+1]), \phi^{k+1}(b_j[k+1])) \equiv \wedge_{i,j}(\vec{b}_i[k+1], \vec{b}_j[k+1]). \\
 3. \omega_{\setminus}^{I[k+1]} \equiv \phi^{k+1}(\setminus_{i,j}(b_i[k+1], b_j[k+1])) \equiv \quad (2) \\
 \equiv \oplus_{i,j}(\vec{b}_i[k+1], \wedge_{i,j}(\vec{b}_i[k+1], \vec{b}_j[k+1])). \\
 4. \omega_{\overline{}}^{I[k+1]} \equiv \phi^{k+1}(\overline{b_i[k+1]}) \equiv \phi^{k+1}(\setminus_i(\mathfrak{B}[k, X], b_i[k+1])) \equiv \overline{\vec{b}_i[k+1]}. \\
 5. \omega_{\Delta}^{I[k+1]} \equiv \phi^{k+1}(\Delta_{i,j}(b_i[k+1], b_j[k+1])) \equiv \\
 \equiv \oplus_{i,j}(\vee_{i,j}(\vec{b}_i[k+1], \vec{b}_j[k+1]), \wedge_{i,j}(\vec{b}_i[k+1], \vec{b}_j[k+1])),
 \end{array} \right.$$

где $b_i[k+1], b_j[k+1] \in \mathfrak{B}[k+1, X]$ (собственные подмножества $\mathfrak{B}[k, X]$), $\vec{b}_i[k+1], \vec{b}_j[k+1] \in I^{\mathfrak{B}[k+1, X]}$ и $\overline{\vec{b}_i[k+1]}$ - инвертированный вектор $\vec{b}_i[k+1]$.

Естественным продолжением леммы 1 является утверждение 1.

Утверждение (теорема) 1. *Морфизм алгебр $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}[k+1, X]} \rightleftarrows \mathfrak{A}_{I^{\mathfrak{B}[k+1, X]}}$ вида (2) для произвольного конечного $k \in \mathbb{N}_0$ есть изоморфизм*

Доказательство.

1. $\phi^{k+1}(\bigcup_{i,j}(b_i[k+1], b_j[k+1])) \leftrightarrow \vee_{i,j}(\vec{b}_i[k+1], \vec{b}_j[k+1])$, где $b_i[k+1], b_j[k+1] \in \mathfrak{B}[k+1, X]$ и $\vec{b}_i[k+1], \vec{b}_j[k+1] \in I^{\mathfrak{B}[k+1, X]}$. Операции \bigcup и $\omega_{\bigcup}^{I[k+1]}$ коммутативны. Доказательство очевидно.

2. $\phi^{k+1}(\bigcap_{i,j}(b_i[k+1], b_j[k+1])) \leftrightarrow \wedge_{i,j}(\vec{b}_i[k+1], \vec{b}_j[k+1])$, где $b_i[k+1], b_j[k+1] \in \mathfrak{B}[k+1, X]$ и $\vec{b}_i[k+1], \vec{b}_j[k+1] \in I^{\mathfrak{B}[k+1, X]}$. Операции \bigcap и $\omega_{\bigcap}^{I[k+1]}$ коммутативны. Доказательство очевидно.

3. Для исключения из любого множества $b_i[k+1] \in \mathfrak{B}[k+1, X]$, $b_i[k+1] \subseteq \mathfrak{B}[k, X]$, которому биективно соответствует индикатор

$\vec{b}_i[k+1] \in I^{\mathfrak{B}[k+1, X]}$, $|\vec{b}_i[k+1]| = |\mathfrak{B}[k, X]|$, собственного подмножества $b_i[k+1]^* \subseteq b_i[k+1]$, $b_i[k+1]^* \subseteq \mathfrak{B}[k, X]$, из него необходимо удалить все элементы $b_i[k+1]$, входящие в $b_i[k+1]^*$. Относительно индикатора $\vec{b}_i[k+1]$ данная операция эквивалентна «обнулению» всех единичных скаляров индикатора, идентифицирующих элементы $b_i[k+1]^*$ в $b_i[k+1]$. «Обнуление» же единичных скаляров в булевом индикаторе $\vec{b}_i[k+1]$ биективно соответствующих элементам $b_i[k+1]^*$ в $b_i[k+1]$ равносильно операции его сложения по $mod 2$ с индикатором $\vec{b}_i[k+1]^*$ множества $b_i[k+1]^*$, $|\vec{b}_i[k+1]^*| = |\vec{b}_i[k+1]|$, а именно выполнению операции $\vec{b}_i[k+1] \oplus \vec{b}_i[k+1]^*$. Таким образом, относительно любого собственного подмножества $b_i[k+1]^*$ множества $b_i[k+1]$ выполняется $\phi^{k+1}(\setminus_{i,j}(b_i[k+1], b_i[k+1]^*)) \equiv \oplus_{i,j}(\vec{b}_i[k+1], \vec{b}_i[k+1]^*)$. В свою очередь, $b_i[k+1] \setminus b_j[k+1] \equiv b_i[k+1] \setminus (b_i[k+1] \cap b_j[k+1])$ и, согласно п. 2, $\phi^{k+1}(\cap_{i,j}(b_i[k+1], b_j[k+1])) \leftrightarrow \wedge_{i,j}(\vec{b}_i[k+1], \vec{b}_j[k+1])$. Соответственно, вследствие очевидности условия $b_i[k+1] \cap b_j[k+1] \subseteq b_i[k+1]$, и для произвольных $b_i[k+1], b_j[k+1] \in \mathfrak{B}[k+1, X]$ выполняется $\phi^{k+1}(\setminus_{i,j}(b_i[k+1], b_j[k+1])) \equiv \phi^{k+1}(\setminus_{i,j}(b_i[k+1], (b_i[k+1] \cap b_j[k+1]))) \equiv \oplus_{i,j}(\vec{b}_i[k+1], \wedge_{i,j}(\vec{b}_i[k+1], \vec{b}_j[k+1]))$. Операции \setminus и $\omega_{\setminus}^{I[k+1]}$ не коммутативны. Что и требовалось показать.

$$4. \phi^{k+1}(\overline{b_i[k+1]}) \equiv \phi^{k+1}(\setminus_i(\mathfrak{B}[k, X], b_i[k+1])) \equiv \oplus_i(\vec{1}, \wedge_i(\vec{1}, \vec{b}_i[k+1])) \equiv \oplus_i(\vec{1}, \vec{b}_i[k+1]) \equiv \overline{\vec{b}_i[k+1]}.$$

5. Для любых $b_i[k+1], b_j[k+1] \in \mathfrak{B}[k+1, X]$ выполняется $b_i[k+1] \Delta b_j[k+1] \equiv b_j[k+1] \Delta b_i[k+1] \equiv (b_i[k+1] \setminus b_j[k+1]) \cup (b_j[k+1] \setminus b_i[k+1]) \equiv (b_i[k+1] \cup b_j[k+1]) \setminus (b_j[k+1] \cap b_i[k+1])$. $b_j[k+1] \cap b_i[k+1]$ есть собственное подмножество $b_i[k+1] \cup b_j[k+1]$ и для него биективный морфизм есть $\phi^{k+1}(\setminus_{i,j}(b_i[k+1], b_i[k+1]^*)) \equiv \oplus_{i,j}(\vec{b}_i[k+1], \vec{b}_i[k+1]^*)$. Соответственно, с учетом пп. 1-2 $\phi^{k+1}(\Delta_{i,j}(b_i[k+1], b_j[k+1])) \equiv \phi^{k+1}(\setminus_{i,j}(b_i[k+1] \cup b_j[k+1], b_j[k+1] \cap b_i[k+1])) \equiv \oplus_{i,j}(\phi^{k+1}(b_i[k+1] \cup b_j[k+1]), \phi^{k+1}(b_i[k+1] \cap b_j[k+1])) \equiv \oplus_{i,j}(\vee_{i,j}(\vec{b}_i[k+1], \vec{b}_j[k+1]), \wedge_{i,j}(\vec{b}_i[k+1], \vec{b}_j[k+1]))$.

Операции Δ и $\omega_{\Delta}^{I[k+1]}$ коммутативны. Что и требовалось показать \ll

В качестве опорной модели вычислений определим модель конечного булево векторного вычислителя из [6], где в качестве базовых опера-

$l = \overline{1, 2^{|\mathfrak{B}[k-1, X] \setminus \emptyset|} - 1}$ булеана $\mathfrak{B}[k, X]$ есть *непустое* собственное подмножество $\mathfrak{B}_l[k-1, X]$ множества $\mathfrak{B}[k-1, X]$. Пустое же подмножество (\emptyset) априори принадлежит $\mathfrak{B}[k-1, X] \triangleleft \triangleleft$

Вполне определенные ограничения, налагаемые на объём настоящих трудов, не позволяют более подробно раскрыть в предлагаемой работе взаимосвязь полученных результатов с алгебрами на семиотико-хроматических гипертопографах (в аксиоматической системе $[G]^1$) и, далее, с архитектурой вычислений перспективного «мкостного» паракомпьютера управления знаниями [1-5]. Особенности морфизмов перечисленных моделей и аспекты их реализации на практике предполагается изложить отдельным образом.

Автор выражает искреннюю благодарность коллективу кафедры МАТИС мех.-матем. факультета МГУ им. М.В.Ломоносова и лично В.Б. Кудрявцеву и Э.Э. Гасанову за ценные рекомендации и содействие в подготовке работы.

Список литературы

- [1] Баранович А.Е. К-гиперпространство семиотико-хроматических гипертопографов как универсальная модель представления фактографических знаний / Матер. IX междунар. конф. «Интеллект. сист. и компьют. науки». Т. 1. Ч. 1. - М., Изд. мех.-мат. фак-та МГУ, 2006. С. 53-55.
- [2] Баранович А.Е. Многоосновные СХ-гипертопографы - однообъектная парадигма / Тр. Конгресса по интеллект. системам и информ. технол. «IS&IT'11». Науч. изд. в 4-х т. - М., Физматлит, 2011. Т. 1. С. 377-385.
- [3] Баранович А.Е. Однообъектная парадигма в обобщениях графов / Тр. XI междунар. Колмогоровских чт.: сб. ст. - Ярославль, Изд-во ЯГПУ, 2013. С. 57-62.
- [4] Баранович А.Е., Соловьев И.П. Алгебраизация гипертопографов: особенности аксиоматической реализации / Тр. XII междунар. Колмогоровских чт.: сб. ст. - Ярославль, Изд-во ЯГПУ, 2014. С. 45-51.
- [5] Баранович А.Е., Соловьев И.П. О некоторых предельных схемах кодирования гипертопографов / Тр. Конгресса по интеллект. сист.

- и информ. технол. «IS&IT'14». Науч. изд. в 4-х т. - М., Физматлит, 2014. Т. 2. С. 53-60.
- [6] Баранович А.Е. Алгебры на индикаторах множеств / Тр. Конгресса по интелект. сист. и информ. технол. «IS&IT'14». Науч. изд. в 4-х т. - М., Физматлит, 2014. Т. 1. С. 204-211.
- [7] Баранович А.Е. Семиотико-хроматические гипертопографы. Введение в аксиоматическую теорию: информационный аспект. 2-е изд., испр. и доп. - М., Центр САММ, 2015.
- [8] Сачков В.Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. - М.: Наука, Главн. ред. физ.-матем. лит., 1982.
- [9] Barwise J. Admissible sets and structures. - Berlin, Springer et al., 1975.