

Московский Государственный Университет  
им. М.В. Ломоносова  
Российская Академия Наук  
Академия Технологических Наук России  
Российская Академия Естественных Наук

# Интеллектуальные Системы

Теория и приложения

том **21** выпуск **2 \* 2017**

Москва

**Главный редактор:** д.ф.-м.н., профессор В. Б. Кудрявцев**Редакционная коллегия:**

д.ф.-м.н., проф. А. Е. Андреев (зам. главного редактора)  
 д.ф.-м.н., проф. Э. Э. Гасанов (зам. главного редактора)  
 к.ф.-м.н., доц. А. С. Строгалов (зам. главного редактора)  
 к.ф.-м.н., м.н.с. В. В. Осокин (ответственный секретарь)  
 д.ф.-м.н., проф. В. В. Александров, д.ф.-м.н., проф. С. В. Алешин, д.ф.-м.н., проф.  
 Д. Н. Бабин, д.ф.-м.н., проф. В. А. Бувеч, академик РАН, д.ф.-м.н., проф.  
 Ю. Л. Ершов, академик РАН, д.ф.-м.н., проф. Ю. И. Журавлев, д.ф.-м.н., проф.  
 В. Н. Козлов, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., проф. Л. Н. Королев, д.ф.-м.н., проф.  
 А. В. Михалев, к.ф.-м.н., проф. В. А. Носов, д.ф.-м.н., проф. А. С. Подколзин,  
 д.т.н., проф. Д. А. Поспелов, д.ф.-м.н., проф. Ю. П. Пытьев, академик РАН, д.т.н.,  
 проф. А. С. Сигов, д.э.н., проф. Ю. Н. Черемных, д.ф.-м.н., проф. А. В. Чечкин

**Международный научный совет журнала:**

С. Н. Васильев (Россия), К. Вашик (Германия), В. В. Величенко (Россия),  
 А. И. Галушкин (Россия), И. В. Голубятников (Россия), Я. Деметрович (Венгрия),  
 Л. Заде (США), Г. Килибарда (Сербия), Ж. Кнап (Словения),  
 П. С. Краснощеков (Россия), А. Нозаки (Япония), В. Н. Редько (Украина),  
 И. Розенберг (Канада), А. П. Рыжов (Россия) — ученый секретарь совета,  
 А. Саломая (Финляндия), С. Саксида (Словения), Б. Тальхайм (Германия),  
 Ш. Ушчумлич (Сербия), Фан Дин Зиеу (Вьетнам), А. Шайб (Сирия),  
 Р. Шчепанович (США), Г. Циммерман (Германия)

**Секретарь редакции:** к.ф.-м.н., с.н.с. И. Л. Мазуренко

В журнале «Интеллектуальные системы. Теория и приложения» публикуются научные достижения в области теории и приложений интеллектуальных систем, новых информационных технологий и компьютерных наук.

Издание журнала осуществляется под эгидой МГУ им. М. В. Ломоносова, Научного Совета по комплексной проблеме «Кибернетика» РАН, Отделения «Математическое моделирование технологических процессов» АТН РФ, Секции «Информатики и кибернетики» РАЕН.

В издании журнала участвуют: механико-математический факультет МГУ, кафедра МатИС МГУ, МИРЭА, МНЦ КИТ.

Учредитель журнала: ООО «Интеллектуальные системы».

Журнал входит в список изданий, включенных ВАК РФ в реестр публикаций материалов по кандидатским и докторским диссертациям по математике и механике.

Спонсором издания является:

**ООО «Два Облака»**

Разработка корпоративных информационных систем

<http://www.dvaoblaka.ru>

Индекс подписки на журнал: 64559 в каталоге НТИ «Роспечать».

Адрес редакции: 119899, Россия, Москва, Воробьевы Горы, МГУ, ГЗ, механико-математический факультет, комн. 12-01.

Адрес издателя: 115230, Россия, Москва, Хлебозаводский проезд, д. 7, стр. 9, офис 9. Тел. +7 (495) 939-46-37, e-mail: [mail@intsysjournal.org](mailto:mail@intsysjournal.org)

\*) Прежнее название журнала: «Интеллектуальные системы».

© ООО «Интеллектуальные системы», 2017.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

## **Часть 1. Общие проблемы теории интеллектуальных систем**

*Баранович А.Е.* Алгебры на индикаторах К-булеанов множеств .....6

*В.А. Микин.* Алгоритм кластеризации последовательности изображений с формированием кластеров на основе опорных триплетов. ...15

*Чернов А.В.* Об одной модификации быстрого градиентного метода решения задачи энтропийно-линейного программирования. ....24

## **Часть 2. Специальные вопросы теории интеллектуальных систем**

*А. Н. Кан.* Вопросы полноты в классе кусочно-линейных непрерывных функций. ....46

*В.А. Микин, С.С. Постнов, Е.В. Смирнов.* Анализ цифровых изображений на основе формализма теории многих взаимодействующих частиц. ....57

*И. Л. Мазуренко, А. А. Петюшко.* Метод оптимального нелинейного растяжения симметричных матриц в задачах распознавания .....75

*М. В. Фигурнов, К. А. Струминский, Д. П. Ветров.* Устойчивый к шуму метод обучения вариационного автокодировщика.....90

## **Часть 3. Математические модели**

*Ищенко Р. А.* Графы групповых автоматов. ....111

*П. С. Дергач.* О решетке вложения прогрессивных множеств сложности два. ....117

*Калачев Г.В.* Оценки мощности плоских схем, реализующих монотонные функции. ....163

*Носов М.В.* Об аналитическом представлении функции сложности  
минимальной схемы в базисе из штриха Шеффера.....193

# Общие проблемы теории интеллектуальных систем

Часть 1

# Алгебры на индикаторах К-булеанов множеств

Баранович А.Е.

Исследуется изоморфизм алгебр на  $k$ -булеанах множеств в аксиоматике  $ZFU$  и соответствующего им  $k$ -гиперпространства индикаторов над  $GF[2]$ . Оценивается сложность решения задач поиска в  $k$ -булеанах множеств. Полученные результаты проецируются на модель  $k$ -гиперпространства семиотико-хроматических гипертопографов в аксиоматической системе  $[G]^1$ . Последняя положена в основу вычислительной архитектуры ёмкостного паракомпьютера управления знаниями интеллектуальной системы.

**Ключевые слова:** алгебр морфизмы, алгоритмов сложность ёмкостная, алгоритмов сложность операционная, гипертопографы семиотико-хроматические, графов теории обобщения, графов теории однообъектная парадигма, знаниями управление, множеств индикаторы, множеств (- носителей)  $k$ -топологизация, множеств  $k$ -булеан, множеств  $k$ -булеанов индикаторы, паракомпьютер ёмкостной, поиск на множествах, системы интеллектуальные, топологии дискретные с конечным носителем,  $k$ -гиперпространство булево

В работе [6] обоснован изоморфизм алгебр множеств  $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}[1,X]}$ :  $\langle \mathfrak{B}[1, X], \{\Omega_{\mathbb{F}}^{\mathfrak{B}[1,X]} : \cup, \cap, \setminus, -, \Delta\} \rangle$  и алгебры индикаторов  $\mathfrak{A}_{I^{\mathfrak{B}[1,X]}}$ :  $\langle I^{\mathfrak{B}[1,X]}, \{\Omega_{\mathbb{F}}^{I[1]} : \omega_{\cup}^{I[1]}, \omega_{\cap}^{I[1]}, \omega_{\setminus}^{I[1]}, \omega_{-}^{I[1]}, \omega_{\Delta}^{I[1]}\} \rangle$  специального вида. Показана возможность решения задачи поиска произвольных элементов в упорядоченных булеанах  $\mathfrak{B}[0, X] - \mathfrak{B}[1, X]$  за  $O(const)$  условных операций (на вполне определенной векторной модели вычислений) при соответствующих значениях параметра ёмкостной сложности. Вследствие реальных ограничений на исследуемые системы, нас в максимальной степени будут интересовать алгебры на конечных множествах (точнее,  $ZFU$

[9]). И, в частности, алгебра множеств  $\langle \mathfrak{B}[1, X], \{\Omega_F^M : \cup, \cap, \setminus\} \rangle$ , где  $\mathfrak{B}[1, X]$  есть булеан 1-го порядка конечного множества-носителя  $X^1$ , что априори предполагает вхождение (принадлежность)  $\emptyset$  и  $X$  в  $\mathfrak{B}[1, X]$ . Для любого конечного множества  $X$ ,  $|X| = n$  с отношением строго порядка (перенумерованного) может быть определен *упорядоченный* массив (множество) *индикаторов*  $I^{\mathfrak{B}[1, X]}$  из  $[GF(2)]^{|\mathfrak{B}[0, X]|}$  мощности  $|I^{\mathfrak{B}[1, X]}| = 2^{|\mathfrak{B}[0, X]|}$ , включая  $\emptyset$ -множество, биективно соответствующий булеану множества  $X$  первого уровня топологизации<sup>2</sup>  $\mathfrak{B}[1, X]$  [6-8]<sup>3</sup>. Из определения индикатора следует, что множество индикаторов  $I^{\mathfrak{B}[1, X]}$  есть полное конечное булево пространство  $[GF(2)]^{|\mathfrak{B}[0, X]|}$ .

На множестве  $I^{\mathfrak{B}[1, X]}$ :  $\{\vec{x}_i\}, \vec{x}_i \in [GF(2)]^n$ ,  $i = \overline{1, 2^n}$ , индикаторов  $\mathfrak{B}[1, X]$  ( $I^{\mathfrak{B}[1, X]} \leftrightarrow \mathfrak{B}[1, X]$ ) определены, в частности, алгебраические операции  $\wedge, \vee$ ,

$\neg, \oplus$ , а соответственно, и алгебра индикаторов  $\langle I^{\mathfrak{B}[1, X]}, \{\Omega_F^I : \wedge, \vee, \neg, \oplus\} \rangle$  в упомянутой сигнатуре. Из продолжения биективного соответствия  $\phi^1 : \mathfrak{B}$

$[1, X] \leftrightarrow I^{\mathfrak{B}[1, X]}$  ( $\phi^1 : X_\tau \equiv \vec{x}_\tau$ ) на морфизм<sup>4</sup> алгебр  $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}[1, X]} : \langle \mathfrak{B}[1, X], \{\Omega_F^{\mathfrak{B}[1, X]} : \cup, \cap, \setminus, -, \Delta\} \rangle$  и  $\mathfrak{A}_{I^{\mathfrak{B}[1, X]}} : \langle I^{\mathfrak{B}[1, X]}, \{\Omega_F^{I[1]} : \omega_{\cup}^{I[1]}, \omega_{\cap}^{I[1]}, \omega_{\setminus}^{I[1]}, \omega_{-}^{I[1]}, \omega_{\Delta}^{I[1]}\} \rangle$  вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \omega_{\cup}^{I[1]} \equiv \phi^1(\cup_{i,j}(X_i, X_j)) \equiv \vee_{i,j}(\phi^1(X_i), \phi^1(X_j)) \equiv \vee_{i,j}(\vec{x}_i, \vec{x}_j). \\ 2. \omega_{\cap}^{I[1]} \equiv \phi^1(\cap_{i,j}(X_i, X_j)) \equiv \wedge_{i,j}(\phi^1(X_i), \phi^1(X_j)) \equiv \wedge_{i,j}(\vec{x}_i, \vec{x}_j). \\ 3. \omega_{\setminus}^{I[1]} \equiv \phi^1(\setminus_{i,j}(X_i, X_j)) \equiv \oplus_{i,j}(\vec{x}_i, \wedge_{i,j}(\vec{x}_i, \vec{x}_j)). \\ 4. \omega_{-}^{I[1]} \equiv \phi^1(\overline{X}_i) \equiv \phi^1(\setminus(X, X_i)) \equiv \oplus_i(\vec{1}, \vec{x}_i) \equiv \vec{x}_i. \\ 5. \omega_{\Delta}^{I[1]} \equiv \phi^1(\Delta(X_i, X_j)) \equiv \oplus_{i,j}(\vee_{i,j}(\vec{x}_i, \vec{x}_j), \wedge_{i,j}(\vec{x}_i, \vec{x}_j)), \end{array} \right. \quad (1)$$

<sup>1</sup> Ранее - булеан  $\mathfrak{B}[X]$  (простой) конечного множества  $X$ ,  $|\mathfrak{B}[X]| = 2^{|X|}$ , как множество всех его подмножеств, включая  $\emptyset$  и само  $X$  [8].

<sup>2</sup> Множество  $X$  есть по определению булеан нулевого уровня  $\mathfrak{B}[0, X]$  и  $|X| = |\mathfrak{B}[0, X]|$ . Булеан  $\mathfrak{B}[1, X]$  есть дискретная топология на  $X$  [7].

<sup>3</sup> Вследствие тождественности  $X \equiv \mathfrak{B}[0, X]$ , в качестве подмножества индикаторов  $I^{\mathfrak{B}[0, X]}$  элементов  $X$  в  $\mathfrak{B}[1, X]$  (одноточечных представителей  $X$ ) выступают единичные вектора из  $I^{\mathfrak{B}[1, X]}$  (базис  $[GF(2)]^n$ ,  $n = |\mathfrak{B}[0, X]|$ ).

<sup>4</sup> При задействовании понятий гомоморфизма и изоморфизма алгебраических систем в настоящей работе используется система определений, введённая в [6].

- следует утверждение 1 (лемма 1) [6].

**Лемма 1.** *Морфизм алгебр  $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}[1,X]} \Leftrightarrow \mathfrak{A}_{I^{\mathfrak{B}[1,X]}}$  вида (1) есть изоморфизм  $\triangleleft$*

По аналогии с вышесказанным (см. п. 2 в [6]) определим для любого конечного булеана  $k$ -го уровня  $\mathfrak{B}[k, X]$  ( $X \equiv \mathfrak{B}[0, X] \subset \mathfrak{B}[1, X] \subset \dots \subset \mathfrak{B}[k, X] \subset \mathfrak{B}[k+1, X]$ ), с введенным отношением строго порядка (перенумерованного),  $|\mathfrak{B}[k, X]| = 2^{\cdot 2^{|X|-1}}$  ( $k-1$  экземпляров 2 в показателе), включая  $\emptyset$  [6], упорядоченный массив (множество) индикаторов  $I^{\mathfrak{B}[k+1,X]}$  размерности  $|\mathfrak{B}[k, X]|$  из  $[GF(2)]^{|\mathfrak{B}[k,X]|}$  мощности  $|I^{\mathfrak{B}[k+1,X]}| = 2^{|\mathfrak{B}[k,X]|}$ , биективно соответствующий булеану  $\mathfrak{B}[k+1, X]$  и сохраняющий порядок множества индикаторов  $I^{\mathfrak{B}[1,X]}$ . В результате получим соответствие  $\phi^{k+1} : I^{\mathfrak{B}[k+1,X]} \leftrightarrow \mathfrak{B}[k+1, X]$  как продолжение соответствия  $\phi^1 : I^{\mathfrak{B}[1,X]} \leftrightarrow \mathfrak{B}[1, X]$ . На множестве  $I^{\mathfrak{B}[k+1,X]} : \{\vec{x}_i\}, \vec{x}_i \in [GF(2)]^{|\mathfrak{B}[k,X]|}, i = 1, 2^{|\mathfrak{B}[k,X]|}$ , индикаторов  $\mathfrak{B}[k+1, X]$  определены алгебраические операции  $\wedge, \vee, \neg, \oplus$ , а соответственно, и алгебра индикаторов  $\langle I^{\mathfrak{B}[k+1,X]}, \{\Omega_{\mathbb{F}}^I : \wedge, \vee, \neg, \oplus\} \rangle$  в упомянутой сигнатуре.

Используем биективное соответствие  $\phi^{k+1} : \mathfrak{B}[k+1, X] \leftrightarrow I^{\mathfrak{B}[k+1,X]}$  в целях его продолжения на морфизм алгебр  $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}[k+1,X]} :$   
 $\langle \mathfrak{B}[k+1, X], \{\Omega_{\mathbb{F}}^{\mathfrak{B}[k+1,X]} : \cup, \cap, \setminus, -, \Delta\} \rangle$  в  $\mathfrak{A}_{I^{\mathfrak{B}[k+1,X]}} : \langle I^{\mathfrak{B}[k+1,X]}, \{\Omega_{\mathbb{F}}^{I[k+1]} : \omega_{\cup}^{I[k+1]}, \omega_{\cap}^{I[k+1]}, \omega_{\setminus}^{I[k+1]}, \omega_{-}^{I[k+1]}, \omega_{\Delta}^{I[k+1]}\} \rangle$  следующего вида

(1-5):

$$\left\{ \begin{array}{l}
 1. \omega_{\bigcup}^{I[k+1]} \equiv \phi^{k+1}(\bigcup_{i,j}(b_i[k+1], b_j[k+1])) \equiv \\
 \quad \equiv \vee_{i,j}(\phi^{k+1}(b_i[k+1], \phi^{k+1}(b_j[k+1])) \equiv \vee_{i,j}(\vec{b}_i[k+1], \vec{b}_j[k+1]). \\
 2. \omega_{\bigcap}^{I[k+1]} \equiv \phi^{k+1}(\bigcap_{i,j}(b_i[k+1], b_j[k+1])) \equiv \\
 \quad \equiv \wedge_{i,j}(\phi^{k+1}(b_i[k+1]), \phi^{k+1}(b_j[k+1])) \equiv \wedge_{i,j}(\vec{b}_i[k+1], \vec{b}_j[k+1]). \\
 3. \omega_{\setminus}^{I[k+1]} \equiv \phi^{k+1}(\setminus_{i,j}(b_i[k+1], b_j[k+1])) \equiv \quad (2) \\
 \quad \equiv \oplus_{i,j}(\vec{b}_i[k+1], \wedge_{i,j}(\vec{b}_i[k+1], \vec{b}_j[k+1])). \\
 4. \omega_{\overline{\quad}}^{I[k+1]} \equiv \phi^{k+1}(\overline{\setminus_i(\mathfrak{B}[k, X], b_i[k+1])}) \equiv \overline{\vec{b}_i[k+1]}. \\
 5. \omega_{\Delta}^{I[k+1]} \equiv \phi^{k+1}(\Delta_{i,j}(b_i[k+1], b_j[k+1])) \equiv \\
 \quad \equiv \oplus_{i,j}(\vee_{i,j}(\vec{b}_i[k+1], \vec{b}_j[k+1]), \wedge_{i,j}(\vec{b}_i[k+1], \vec{b}_j[k+1])),
 \end{array} \right.$$

где  $b_i[k+1], b_j[k+1] \in \mathfrak{B}[k+1, X]$  (собственные подмножества  $\mathfrak{B}[k, X]$ ),  $\vec{b}_i[k+1], \vec{b}_j[k+1] \in I^{\mathfrak{B}[k+1, X]}$  и  $\overline{\vec{b}_i[k+1]}$  - инвертированный вектор  $\vec{b}_i[k+1]$ .

Естественным продолжением леммы 1 является утверждение 1.

**Утверждение (теорема) 1.** *Морфизм алгебр  $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}[k+1, X]} \rightleftarrows \mathfrak{A}_{I^{\mathfrak{B}[k+1, X]}}$  вида (2) для произвольного конечного  $k \in \mathbb{N}_0$  есть изоморфизм*

Доказательство.

1.  $\phi^{k+1}(\bigcup_{i,j}(b_i[k+1], b_j[k+1])) \leftrightarrow \vee_{i,j}(\vec{b}_i[k+1], \vec{b}_j[k+1])$ , где  $b_i[k+1], b_j[k+1] \in \mathfrak{B}[k+1, X]$  и  $\vec{b}_i[k+1], \vec{b}_j[k+1] \in I^{\mathfrak{B}[k+1, X]}$ . Операции  $\bigcup$  и  $\omega_{\bigcup}^{I[k+1]}$  коммутативны. Доказательство очевидно.

2.  $\phi^{k+1}(\bigcap_{i,j}(b_i[k+1], b_j[k+1])) \leftrightarrow \wedge_{i,j}(\vec{b}_i[k+1], \vec{b}_j[k+1])$ , где  $b_i[k+1], b_j[k+1] \in \mathfrak{B}[k+1, X]$  и  $\vec{b}_i[k+1], \vec{b}_j[k+1] \in I^{\mathfrak{B}[k+1, X]}$ . Операции  $\bigcap$  и  $\omega_{\bigcap}^{I[k+1]}$  коммутативны. Доказательство очевидно.

3. Для исключения из любого множества  $b_i[k+1] \in \mathfrak{B}[k+1, X]$ ,  $b_i[k+1] \subseteq \mathfrak{B}[k, X]$ , которому биективно соответствует индикатор

$\vec{b}_i[k+1] \in I^{\mathfrak{B}[k+1, X]}$ ,  $|\vec{b}_i[k+1]| = |\mathfrak{B}[k, X]|$ , собственного подмножества  $b_i[k+1]^* \subseteq b_i[k+1]$ ,  $b_i[k+1]^* \subseteq \mathfrak{B}[k, X]$ , из него необходимо удалить все элементы  $b_i[k+1]$ , входящие в  $b_i[k+1]^*$ . Относительно индикатора  $\vec{b}_i[k+1]$  данная операция эквивалентна «обнулению» всех единичных скаляров индикатора, идентифицирующих элементы  $b_i[k+1]^*$  в  $b_i[k+1]$ . «Обнуление» же единичных скаляров в булевом индикаторе  $\vec{b}_i[k+1]$  биективно соответствующих элементам  $b_i[k+1]^*$  в  $b_i[k+1]$  равносильно операции его сложения по  $mod 2$  с индикатором  $\vec{b}_i[k+1]^*$  множества  $b_i[k+1]^*$ ,  $|\vec{b}_i[k+1]^*| = |\vec{b}_i[k+1]|$ , а именно выполнению операции  $\vec{b}_i[k+1] \oplus \vec{b}_i[k+1]^*$ . Таким образом, относительно любого собственного подмножества  $b_i[k+1]^*$  множества  $b_i[k+1]$  выполняется  $\phi^{k+1}(\setminus_{i,j}(b_i[k+1], b_i[k+1]^*)) \equiv \oplus_{i,j}(\vec{b}_i[k+1], \vec{b}_i[k+1]^*)$ . В свою очередь,  $b_i[k+1] \setminus b_j[k+1] \equiv b_i[k+1] \setminus (b_i[k+1] \cap b_j[k+1])$  и, согласно п. 2,  $\phi^{k+1}(\bigcap_{i,j}(b_i[k+1], b_j[k+1])) \leftrightarrow \bigwedge_{i,j}(\vec{b}_i[k+1], \vec{b}_j[k+1])$ . Соответственно, вследствие очевидности условия  $b_i[k+1] \cap b_j[k+1] \subseteq b_i[k+1]$ , и для произвольных  $b_i[k+1], b_j[k+1] \in \mathfrak{B}[k+1, X]$  выполняется  $\phi^{k+1}(\setminus_{i,j}(b_i[k+1], b_j[k+1])) \equiv \phi^{k+1}(\setminus_{i,j}(b_i[k+1], (b_i[k+1] \cap b_j[k+1]))) \equiv \oplus_{i,j}(\vec{b}_i[k+1], \bigwedge_{i,j}(\vec{b}_i[k+1], \vec{b}_j[k+1]))$ . Операции  $\setminus$  и  $\omega_{\setminus}^{I[k+1]}$  не коммутативны. Что и требовалось показать.

$$4. \phi^{k+1}(\overline{b_i[k+1]}) \equiv \phi^{k+1}(\setminus_i(\mathfrak{B}[k, X], b_i[k+1])) \equiv \oplus_i(\vec{1}, \bigwedge_i(\vec{1}, \vec{b}_i[k+1])) \equiv \oplus_i(\vec{1}, \vec{b}_i[k+1]) \equiv \overline{\vec{b}_i[k+1]}.$$

5. Для любых  $b_i[k+1], b_j[k+1] \in \mathfrak{B}[k+1, X]$  выполняется  $b_i[k+1] \Delta b_j[k+1] \equiv b_j[k+1] \Delta b_i[k+1] \equiv (b_i[k+1] \setminus b_j[k+1]) \cup (b_j[k+1] \setminus b_i[k+1]) \equiv (b_i[k+1] \cup b_j[k+1]) \setminus (b_j[k+1] \cap b_i[k+1])$ .  $b_j[k+1] \cap b_i[k+1]$  есть собственное подмножество  $b_i[k+1] \cup b_j[k+1]$  и для него биективный морфизм есть  $\phi^{k+1}(\setminus_{i,j}(b_i[k+1], b_i[k+1]^*)) \equiv \oplus_{i,j}(\vec{b}_i[k+1], \vec{b}_i[k+1]^*)$ . Соответственно, с учетом пп. 1-2  $\phi^{k+1}(\Delta_{i,j}(b_i[k+1], b_j[k+1])) \equiv \phi^{k+1}(\setminus_{i,j}(b_i[k+1] \cup b_j[k+1], b_j[k+1] \cap b_i[k+1])) \equiv \oplus_{i,j}(\phi^{k+1}(b_i[k+1] \cup b_j[k+1]), \phi^{k+1}(b_i[k+1] \cap b_j[k+1])) \equiv \oplus_{i,j}(\vee_{i,j}(\vec{b}_i[k+1], \vec{b}_j[k+1]), \bigwedge_{i,j}(\vec{b}_i[k+1], \vec{b}_j[k+1]))$ .

Операции  $\Delta$  и  $\omega_{\Delta}^{I[k+1]}$  коммутативны. Что и требовалось показать  $\ll$

В качестве опорной модели вычислений определим модель конечного булево векторного вычислителя из [6], где в качестве базовых опера-





$l = \overline{1, 2^{|\mathfrak{B}[k-1, X] \setminus \emptyset|} - 1}$  булеана  $\mathfrak{B}[k, X]$  есть *непустое* собственное подмножество  $\mathfrak{B}_l[k-1, X]$  множества  $\mathfrak{B}[k-1, X]$ . Пустое же подмножество ( $\emptyset$ ) априори принадлежит  $\mathfrak{B}[k-1, X] \triangleleft \triangleleft$

Вполне определенные ограничения, налагаемые на объём настоящих трудов, не позволяют более подробно раскрыть в предлагаемой работе взаимосвязь полученных результатов с алгебрами на семиотико-хроматических гипертопографах (в аксиоматической системе  $[G]^1$ ) и, далее, с архитектурой вычислений перспективного «мкостного» паракомпьютера управления знаниями [1-5]. Особенности морфизмов перечисленных моделей и аспекты их реализации на практике предполагается изложить отдельным образом.

Автор выражает искреннюю благодарность коллективу кафедры МАТИС мех.-матем. факультета МГУ им. М.В.Ломоносова и лично В.Б. Кудрявцеву и Э.Э. Гасанову за ценные рекомендации и содействие в подготовке работы.

## Список литературы

- [1] Баранович А.Е.  $K$ -гиперпространство семиотико-хроматических гипертопографов как универсальная модель представления фактографических знаний / Матер. IX междунар. конф. «Интеллект. сист. и компьют. науки». Т. 1. Ч. 1. - М., Изд. мех.-мат. фак-та МГУ, 2006. С. 53-55.
- [2] Баранович А.Е. Многоосновные СХ-гипертопографы - однообъектная парадигма / Тр. Конгресса по интеллект. системам и информ. технол. «IS&IT'11». Науч. изд. в 4-х т. - М., Физматлит, 2011. Т. 1. С. 377-385.
- [3] Баранович А.Е. Однообъектная парадигма в обобщениях графов / Тр. XI междунар. Колмогоровских чт.: сб. ст. - Ярославль, Изд-во ЯГПУ, 2013. С. 57-62.
- [4] Баранович А.Е., Соловьев И.П. Алгебраизация гипертопографов: особенности аксиоматической реализации / Тр. XII междунар. Колмогоровских чт.: сб. ст. - Ярославль, Изд-во ЯГПУ, 2014. С. 45-51.
- [5] Баранович А.Е., Соловьев И.П. О некоторых предельных схемах кодирования гипертопографов / Тр. Конгресса по интеллект. сист.

- и информ. технол. «IS&IT'14». Науч. изд. в 4-х т. - М., Физматлит, 2014. Т. 2. С. 53-60.
- [6] Баранович А.Е. Алгебры на индикаторах множеств / Тр. Конгресса по интелект. сист. и информ. технол. «IS&IT'14». Науч. изд. в 4-х т. - М., Физматлит, 2014. Т. 1. С. 204-211.
- [7] Баранович А.Е. Семиотико-хроматические гипертопографы. Введение в аксиоматическую теорию: информационный аспект. 2-е изд., испр. и доп. - М., Центр САММ, 2015.
- [8] Сачков В.Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. - М.: Наука, Главн. ред. физ.-матем. лит., 1982.
- [9] Barwise J. Admissible sets and structures. - Berlin, Springer et al., 1975.

# Алгоритм кластеризации последовательности изображений с формированием кластеров на основе опорных триплетов

В.А. Микин

В данной работе предложен алгоритм кластеризации последовательностей изображений, идея которого заключается в формировании кластеров на основе минимальных трёхточечных симплексов, образованных классифицируемыми данными в многомерном пространстве признаков. Рассмотрены варианты кластеризации в отложенном и псевдореальном масштабе времени.

**Ключевые слова:** кластеризация изображений, определение смены сюжета, анализ видео, опорные кадры, кластеризация в реальном времени.

## Введение

Одной из известных проблем в обработке последовательностей растровых изображений (далее - видеопоследовательностей), является проблема выделения опорных (ключевых) кадров [1, 2, 3]. Аналогичная задача возникает в рамках автоматизированного анализа различных графических материалов презентационного характера, циркулирующих в сети Интернет, причём в этом случае, вследствие значительных объёмов анализируемых данных, особую актуальность приобретает сокращение избыточности, свойственной как отдельным изображениям, так и их последовательностям [4].

Как правило, выбор опорных кадров сводится к определению моментов смены сюжета (существенного изменения структурного содержания двух соседних изображений) в видеопоследовательности [1]. В то же время, известны подходы к обнаружению опорных кадров на основе алгоритмов кластеризации [5, 6]. Если рассматривать произвольную видеопоследовательность как выборку однотипных наблюдений-прецедентов, представляемых составляющими её кадрами, то выделение опорных кадров является задачей кластеризации, в контексте которой количество наблюдений существенно превышает количество классов, в то время как явная информация о количестве и структуре классов отсутствует, и единственным априорным условием является некоторое допустимое расстояние между прецедентами в пространстве признаков.

Пусть видеопоследовательность  $G$  – совокупность исследуемых прецедентов (изображений),  $P$  – множество соответствующих им образов – векторов признаков размерности  $\nu$ , получаемых некоторым преобразованием  $T : G \rightarrow P$ ;  $p = T(g)$ ,  $p = p(x, y)$ ;  $x = 1, \dots, w$ ;  $y = 1, \dots, h$ ;  $\nu = wh$ . В векторном виде двумерные образы  $p$  представляются в соответствии со следующим правилом развёртки:  $p(i) = p(x, y)$ ;  $i = 1, \dots, \nu$ ;  $i = yw + x$ .

В рассматриваемом случае целью формирования множества  $P$  является снижение размерности данных, по сравнению с исходными изображениями, то есть  $T(g)$  – масштабирующее отображение:

$$p(x, y) = \frac{1}{4R^2} \sum_{k=1}^{2R} \sum_{l=1}^{2R} g(2R(x-1) + k, 2R(y-1) + l), \quad (1)$$

где  $R$  выбирается численно равным средней оценке радиуса корреляции (расстояния, на котором значения яркости пикселей изображения могут считаться статистически независимыми [7]) для исследуемого класса изображений. Заметим также, что при построении образов яркость пикселей определяется линейной комбинацией цветовых составляющих исходного изображения [1], то есть графическая структура представляется в градациях серого цвета.

Ограничим диапазон значений, принимаемых элементами векторов  $p$ , интервалом  $[0, 1]$ . Таким образом, любой вектор  $p_k$  представляется точкой внутри единичного  $\nu$ -куба  $P \in H^\nu \subset \mathbb{R}^\nu$ . Максимальное евклидово расстояние между двумя точками, принадлежащими такому гиперкубу, будет равным длине его диагонали

–  $d_{max}(p_j, p_k) = \sqrt{\nu}$ . Это позволяет задать пороговую величину  $\mu_{th} = \alpha d_{max}$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ , характеризующую предельно допустимое расстояние между образами  $p_j$  и  $p_k$ , при котором они считаются совпадающими.

Будем полагать, что вероятностное распределение образов близко к нормальному, и форма образуемых кластеров хорошо аппроксимируется сферой (подобное допущение зачастую оказывается приемлемым на практике, в частности, если отличия промежуточных кадров видеопоследовательности от образующих её сюжетных составляющих обусловлены не столько структурными изменениями, сколько присутствием шума на изображениях, как, например, в системах видеонаблюдения, используемых вне помещений). Таким образом, в рамках рассматриваемой задачи определим кластер как множество точек  $\{p_k\}$ , удалённых от некоторого центра  $p_0$  на расстояние не превышающее  $r = \frac{1}{2}\mu_{th}$ :

$$K_l = \{p_0, (p_1, \dots, p_{m_l})\} : \forall k \in [1, m_l] \ d(p_0, p_k) \leq r. \quad (2)$$

Заметим, что в рамках определения (2) любой набор точек  $(p_1, \dots, p_m) : \forall i, j \in [1, m] \ d(p_i, p_j) \leq \mu_{th}$  формально является кластером с не указанным явно центром  $p_0$ . Данный факт отражает важность и влияние корректности изначального выбора потенциальных центров кластеров на результат кластеризации [8].

В принятой вероятностной модели, если точки некоторого кластера  $K_l$  распределены нормально, то вероятность выбрать  $M$  точек, удалённых друг от друга не более чем на  $\mu_{th}$  максимизируется в  $r$ -окрестности математического ожидания (то есть центра кластера  $p_0$ ). Тем самым, если в  $H^\nu$  найдётся минимальный правильный симплекс

$$S_l = (p_1, \dots, p_{M_l}), \ M_l \leq \nu + 1 : \\ \forall i, j \in [1, M_l] \ i \neq j \ d(p_i, p_j) \xrightarrow{H^\nu} \min, \quad (3)$$

то  $r$ -окрестность его центра может быть приписана одному кластеру. Таким образом, возможно построение процедуры кластеризации в виде гибридной схемы, включающей в себя выбор начального приближения кластера  $K_l$  в виде опорного симплекса  $S_l$  и его дополнение точками из  $r$ -окрестности центра  $S_l$ .

При этом, чтобы не исключать возможности существования кластеров, радиусом меньших  $r$ , целесообразно рассматривать описанную вокруг  $S_l$  гиперсферу как границу кластера  $K_l$ :  $r_l = R(S_l) \leq r$ .

Дальнейшее объединение кластеров в более крупные структуры возможно по мере итераций процесса кластеризации.

Выбор опорного симплекса  $S_l$  для каждого кластера – оптимизационная задача, характерная для иерархических способов кластеризации. Снизить её комбинаторную сложность можно, снизив соответственно размерность  $S_l$ . Наименьшая размерность симплекса (выбираемого по критерию (3) минимизации расстояния между его вершинами), при которой в описанную вокруг него гиперсферу могут попасть другие точки, кроме вершин симплекса, равна двум.

Очевидно, сколь-нибудь плотное заполнение  $H^{\nu}$  точками исключено в большинстве практических ситуаций, и вероятность найти среди этих точек правильные симплексы даже малой размерности близка к нулю. Но, в действительности, основное условие при выборе опорного симплекса  $S_l$  заключается лишь в том, что точки, попавшие в сформированный на его основе кластер  $K_l$ , должны быть удалены друг от друга на расстояние, не превышающее  $2r$ , то есть  $r_l \leq r$ . Таким образом, если  $S_l$  представляет собой тройку (триплет) точек  $S_l = (p_1, p_2, p_3)$ , то треугольник  $p_1p_2p_3$  должен быть остроугольным:

$$\forall i, j, k \in [1, 3], i \neq j \neq k : d^2(p_i, p_j) \leq d^2(p_j, p_k) + d^2(p_k, p_i). \quad (4)$$

С учётом определения (2), критерия (3) и ограничения (4) можно привести следующее словесное описание алгоритма кластеризации:

- 1) Поиск в  $P$  триплета  $S_l$ , образующего минимальный треугольник  $p_1p_2p_3$ , длина стороны которого не превосходит  $\mu_{th}$ , и для которого выполняется условие (4). Если триплет  $S_l$  не найден, то кластеризация завершена.
- 2) Формирование кластера  $K_l$  на основе опорного триплета  $S_l$  и всех точек из  $P$ , попадающих в  $r_l$ -окрестность центра  $S_l$ .
- 3) Исключение всех точек кластера  $K_l$  из  $P$ , включение в  $P$  точки, соответствующей центру  $K_l$ .
- 4) Переход к п. 1.

Применение предложенного алгоритма имеет смысл для задач, в которых количество классов мало по сравнению с количеством представителей этих классов, поскольку шаг 1 алгоритма требует перебора  $C_N^3$  комбинаций точек, и шаг 2 должен компенсировать эту вычислительную сложность.



Рис. 1: Тестовый фрагмент видеопоследовательности.

На рис. 1 представлен фрагмент тестовой видеопоследовательности (пример обучающего видео с сайта [www.freevidelectures.org](http://www.freevidelectures.org), содержащий несколько смен графического сюжета. Кадры, соответствующие сменам сюжета, выделены цветом и обозначены пунктирной рамкой.

Результат обнаружения опорных кадров по предложенному алгоритму и визуализация соответствующих изображениям векторов признаков приведены на рис. 2. Отметим, что в представленном примере видеопоследовательности встречается возврат к предшествующему графическому сюжету (изображение, появившееся в результате смены сюжета в верхнем ряду кадров, вновь появляется в третьем ряду). Возможность отслеживания подобных ситуаций является важной особенностью подхода к выбору опорных кадров на основе кластеризации.

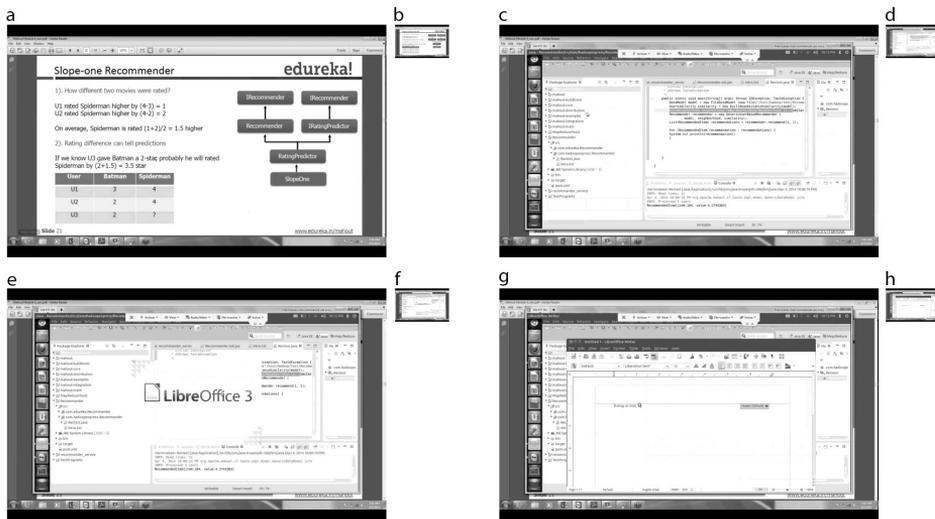


Рис. 2: Опорные кадры, извлечённые из тестового фрагмента видеопоследовательности (а, с, е, г), и соответствующие им образы (b, d, f, h).

На практике анализ видеопоследовательностей в отложенном режиме представляет собой весьма ресурсоёмкий процесс, ввиду значительных объёмов хранимой графической информации. В связи с этим представляет интерес возможность выделения опорных кадров непосредственно в процессе формирования видеопоследовательности. Рассмотрим вариант предлагаемого алгоритма кластеризации в псевдореальном масштабе времени. Пусть  $A$  – пополняемое множество образов, соответствующее множеству  $P$  в отдельные моменты времени. Кроме того, введем множества  $B$  – временный буфер образов, и  $T$  – набор построенных кластеров. В программной реализации множества  $A$ ,  $B$  и  $T$  представляются списками-очередями.

Зададим следующие базовые параметры алгоритма:

- Пороговое значение евклидова расстояния между образами  $\mu_{th}$ .
- Глубина буфера  $D_B$ , определяющая максимально допустимое количество образов в буфере  $B$ .
- Время ожидания кластера  $\Delta t_c$ . Данный параметр задает ин-

тервал времени, в течение которого к кластеру из  $T$  не добавляются новые образы.

- Общий таймаут  $\Delta t$ , определяющий максимальное время ожидания поступления данных в  $A$ .

Алгоритм кластеризации представляет собой пошаговую процедуру, выполняющуюся до тех пор, пока во входное множество  $A$  поступают новые образы. На каждом шаге выполняется следующая последовательность действий:

- 1) Из входного набора  $A$  в буфер  $B$  перемещается некоторое количество образов  $n$ , меньшее глубины буфера  $D_B$ .
- 2) Если множество  $T$  непустое, то предпринимается попытка определить принадлежность образов в буфере  $B$  существующим кластерам из  $T$  по критерию удалённости образа от центра кластера не более чем на  $\frac{1}{2}\mu_{th}$  (причём образ приписывается к тому кластеру, к центру которого он наиболее близок).
- 3) Из оставшихся в буфере образов выбирается триплет  $(b_1, b_2, b_3)$ , для которого минимизируется  $\tilde{d} = \max(d_{12}, d_{23}, d_{31})$ , причём  $\tilde{d} \leq \mu_{th}$ . Кроме того, должно выполняться ограничение (4). Если такой триплет существует, то он образует кластер, помещаемый в  $T$ .
- 4) Для всех кластеров из множества  $T$  проверяется превышение интервала  $\Delta t_c$ . Если время ожидания превышено, выполняется финализация кластера. Под финализацией подразумевается некоторая процедура, включающая в себя сохранение прецедентов, приписанных данному кластеру, выделение центра кластера в отдельный образ и его передачу в очередь  $A$  для дальнейшей кластеризации.
- 5) Если количество образов в буфере  $B$  превышает  $D_B$ , то излишек образов удаляется из буфера в соответствии с принципом FIFO, и эти образы исключаются из дальнейшего рассмотрения.
- 6) Если все кластеры из  $T$  финализированы, и множество  $A$  пусто в течение интервала времени  $\Delta t$ , то производится очистка буфера  $B$ , процесс кластеризации завершается.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен алгоритм кластеризации видеопоследовательностей, основанный на поиске минимальных трёхточечных симплексов в пространстве признаков и дальнейшем объединении в кластер точек, оказавшихся внутри гиперсфер, описанных вокруг этих симплексов.

Показано, что применение предложенного алгоритма имеет смысл для данных, характеризующихся высокой избыточностью.

Рассмотрен вариант алгоритма триплет-кластеризации в псевдореальном масштабе времени, позволяющий проводить анализ видеопоследовательностей в режиме «онлайн».

## Список литературы

- [1] Дворкович В.П., Дворкович А.В. Цифровые видеоинформационные системы (теория и практика). - М: Техносфера, 2012, 1008 с.
- [2] V. Vijayakumar and R. Nedunchezian. A study on video data mining. International journal of multimedia information retrieval, vol. 1 (3), p. 153-172, 2012.
- [3] Singh, S.; Mandal, A.S.; Shekhar, C.; Vohra, A. Real-time Implementation of Change Detection for Automated Video Surveillance System. ISRN Electronics Volume 2013, 2013.
- [4] Красильников Н. Н. Цифровая обработка 2D- и 3D-изображений. - СПб.: «БХВ-Петербург», 2011. - 608 с.
- [5] Vasileios T. Chasanis, Aristidis C. Likas, Nikolaos P. Galatsanos, Scene detection in videos using shot clustering and sequence alignment, IEEE Transactions on Multimedia, v. 11 n. 1, p. 89-100, 2009.
- [6] Nitin J. Janwe, Kishor K. Bhojar. Video Key-Frame Extraction using Unsupervised Clustering and Mutual Comparison. International Journal of Image Processing, vol. 10 (2), p. 73-84, 2016.

- [7] Современные информационные технологии в задачах навигации и наведения беспилотных маневренных летательных аппаратов / Под ред. М.Н. Красильщикова, Г.Г. Себрякова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009, 556 с.
- [8] Мерков А.Б. Распознавание образов: Введение в методы статистического обучения. М.: Едиториал УРСС, 2011, 256 с.

# Об одной модификации быстрого градиентного метода решения задачи энтропийно-линейного программирования

Чернов А.В.

В работе рассматривается модификация быстрого градиентного метода (БГМ). Показана его прямо-двойственность как способность восстановить решение прямой задачи по решению двойственной. Получены теоретические результаты о его сходимости как для задач безусловной минимизации, так и для задач условной минимизации с линейными ограничениями-равенствами и ограничениями-неравенствами на примере задачи энтропийно-линейного программирования (задача ЭЛП). Доказаны строгая и сильная выпуклость двойственного функционала последней, а также показано, что градиент двойственного функционала удовлетворяет условию Липшица.

**Ключевые слова:** быстрый градиентный метод, задача энтропийно-линейного программирования, условная минимизация, безусловная минимизация, прямо-двойственные методы.

## Постановка задачи

Рассмотрим на  $n$ -мерном вероятностном симплексе

$$S_n(1) = \{x \in R_+^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$$

задачу ЭЛП (1).

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{i=1}^n g_i(x_i) \rightarrow \min_{x \in G}; \\
g_i(x_i) &= \begin{cases} x_i \ln \frac{x_i}{\xi_i}, & \text{если } x_i > 0; \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}; \\
G &= \{x \in S_n(1) : C_1 x - b_1 \leq 0; C_2 x - b_2 = 0\}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $\xi_i, i = 1, \dots, n$  – параметры задачи, определяющие целевую функцию,  $C_1 \in R^{m_1 \times n}$ ,  $b_1 \in R^{m_1}$ ,  $C_2 \in R^{m_2 \times n}$ ,  $b_2 \in R^{m_2}$  – параметры (матрицы и вектора соответственно), определяющие допустимое множество задачи.

Введем дополнительные обозначения (2) для упрощения дальнейших выкладок.

$$C = [C_1; C_2] \in R^{(m_1+m_2) \times n}; \quad b = [b_1; b_2] \in R^{m_1+m_2}. \tag{2}$$

Пусть  $D = D(x)$  – диагональная матрица размерности  $n \times n$ , на диагонали которой расположены компоненты вектора  $x$ , т.е.  $d_{i,i}(x) = x_i$  и  $d_{i,j}(x) = 0$  при  $i \neq j$ . Видно что для такой задачи градиент функции  $\nabla f(x)$ , функция Лагранжа  $L(x, y)$ , её градиент  $\nabla L(x, y)$  и гессиан принимают вид:

$$\begin{aligned}
\nabla f(x)_i &= \ln \frac{x_i}{\xi_i} + 1, \quad i = \overline{1, n}; \\
L(x, y) &= f(x) + \langle y, Cx - b \rangle, \quad x \in S_n(1), y \in R_+^{m_1} \times R^{m_2}; \\
\nabla L(x, y)_i &= \ln \frac{x_i}{\xi_i} + 1 + [C^T y]_i, \quad i = \overline{1, n}; \\
L''(x, y) &= f''(x) = D^{-1}(x), \quad x \in R_{++}^n.
\end{aligned} \tag{3}$$

Несложно показать, что верна следующая лемма (см. например критерии выпуклости первого и второго порядков [1]):

**Лемма 1.** *Целевая функция задачи ЭЛП (1) выпукла на  $R_+^n$  строго выпукла на  $R_{++}^n$  и сильно выпукла на любом ограниченном подмножестве  $R_{++}^n$ .*

В силу того, что множество  $G$  – выпуклый компакт и функция  $f(x)$  непрерывна и строго выпукла, задача (1) имеет единственное решение [1].

В рамках изучения различных методов решения задачи ЭЛП в работе подразумевается поиск точки в пространстве  $R^n$ , достаточно близкой к решению поставленной задачи. Формально критерий поиска такой точки задается следующим определением:

**Определение 1.** Под  $(\varepsilon_f, \varepsilon_g)$ -решением задачи ЭЛП (1) будем понимать такую точку  $x_t \in R^n$ , что  $|f(x_t) - f^*| < \varepsilon_f$  и  $\Delta(x_t, G) < \varepsilon_g$ , где  $f^*$  - точное решение задачи, а  $\Delta(x, G) = \|(C_1x - b_1)_+\| + \|C_2x - b_2\|$  - невязка точки  $x$  для множества  $G$ .

Определение 1 совместно с определением задачи минимизации ЭЛП (1) дают постановку изучаемой задачи как поиск  $(\varepsilon_f, \varepsilon_g)$ -решения.

## О двойственной задаче

Для задачи ЭЛП возможно в явном виде построить двойственную задачу. Переход к двойственной задаче позволяет перейти от задачи условной минимизации к задаче безусловной минимизации или условной минимизации, но на простом множестве вида  $R_+^{m_1} \times R^{m_2}$  и тем самым открывается возможность использования методов решения задач минимизации на множестве простой структуры. Утверждения сформулированные ниже описывают постановку задачи двойственной к задаче ЭЛП и её основные свойства.

**Теорема 1.** *Задача, двойственная к задаче ЭЛП (1), может быть записана в виде:*

$$\begin{aligned} \psi(y) &\rightarrow \max_{y \in Q}, \text{ где } Q = R_+^{m_1} \times R^{m_2}; \\ \psi(y) &= -\langle y, b \rangle - \ln \left[ \sum_{i=1}^n \xi_i \exp(-[C^T y]_i) \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

При этом функция  $x(y)$ , полученная при построении двойственной задачи, вычисляется по формуле (5).

$$x_i(y) = \frac{\xi_i \exp(-[C^T y]_i)}{\sum_{j=0}^n \xi_j \exp(-[C^T y]_j)}. \quad (5)$$

*Доказательство.* Используя представление функции Лагранжа (3) для задачи (1), двойственную задачу можно записать в виде:

$$\psi(u, v) = \min_{x \in S_n(1)} L(x, u, v),$$

где  $y = (u, v)$ . Решение такой задачи существует, единственно и находится явно. Действительно, выпишем "расширенную" функцию Лагранжа для такой задачи, полагая  $u$  и  $v$  параметрами:

$$\bar{L}(x, u, v, \mu, \nu) = f(x) + \langle u, C_1 x - b_1 \rangle + \langle v, C_2 x - b_2 \rangle + \mu \left( \sum_{i=1}^n x_i - 1 \right) - \langle \nu, x \rangle,$$

где  $\mu \in R^1$ ,  $\nu \in R_+^n$ . Тогда условия Каруша-Куна-Таккера [1] принимают вид:

$$[\nabla \bar{L}(x, u, v, \mu, \nu)]_i = 1 + \ln \frac{x_i}{\xi_i} + [C_1^T u + C_2^T v]_i + \mu - \nu_i = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

$$\nu_i x_i = 0, \quad i = \overline{1, n}; \quad \sum_{i=1}^n x_i - 1 = 0.$$

Заметим, что функция  $g(z)$ ,  $z \geq 0$  недифференцируема в точке 0, но непрерывна. Кроме того субдифференциал функции  $g(z)$  в этой точке является пустым множеством. В силу сказанного и выпуклости функции  $g(z)$  при  $z \geq 0$  точка минимума функции не может быть на границе положительного ортанта (это также подтверждается тем фактом, что в окрестности нуля  $g'(z) < 0$ , т.е. функция убывает). Поэтому, исходя из условия дополняющей нежесткости  $\nu_i x_i = 0$ , можно положить  $\nu_i = 0$  при всех значениях  $i^1$ . Следовательно:

$$x_i = \xi_i \cdot \exp(-[C_1^T u + C_2^T v]_i) \cdot \exp(-\mu - 1).$$

Учитывая, что точка  $x \in S_n(1)$  находим:

$$\mu = \ln \left[ \sum_{i=1}^n \xi_i \cdot \exp(-[C_1^T u + C_2^T v]_i) \right] - 1.$$

$$x_i = \frac{\xi_i \cdot \exp(-[C_1^T u + C_2^T v]_i)}{\sum_{j=1}^n \xi_j \cdot \exp(-[C_1^T u + C_2^T v]_j)}, \quad i = \overline{1, n}.$$

---

<sup>1</sup> максимум функции  $g_i(x)$  вполне может достигаться на границе ортанта

Подставив получившиеся выражения  $x_i$  и  $\mu$  в функцию Лагранжа  $\bar{L}(x, u, v, \mu, \nu)$  с учетом  $\nu_i = 0$  легко получить требуемое выражение целевой функции двойственной задачи:

$$\psi(u, v) = -\langle u, b_1 \rangle - \langle v, b_2 \rangle - \ln \left[ \sum_{i=1}^n \xi_i \cdot \exp(-[C_1^T u + C_2^T v]_i) \right].$$

Полагая  $y = [u; v] \in R_+^{m_1} \times R^{m_2}$  и  $C = [C_1; C_2]$ , приходим к утверждению теоремы □

Отметим, что получившуюся двойственную задачу максимизации функции  $\psi(y)$ , легко переписать в виде задачи минимизации функции  $\phi(y) = -\psi(y)$

$$\phi(y) = \langle y, b \rangle + \ln \left[ \sum_{i=1}^n \xi_i \exp(-[C^T y]_i) \right] \rightarrow \min_{y \in Q}, \quad (6)$$

где  $Q = R_+^{m_1} \times R^{m_2}$ .

В дальнейших выкладках будет использоваться значение градиента функции и матрицы вторых производных для задачи минимизации, определить которые позволяет теорема 2.

**Теорема 2.** *Для двойственной функции  $\phi(y)$  градиент и матрица вторых производных могут быть записаны в виде*

$$\nabla \phi(y) = b - Cx(y), \quad \phi''(y) = CD(x(y))C^T - Cx(y)(Cx(y))^T, \quad (7)$$

Данная теорема доказывается тривиально путем прямого вычисления.

Следующая лемма 2 определяет важное свойство двойственной функции, которое требуется во многих теоремах о сходимости методов:

**Лемма 2.** *Градиент двойственной функции  $\nabla \phi(y)$  удовлетворяет условию Липшица:*

$$\|\nabla \phi(y^1) - \nabla \phi(y^2)\| \leq L \|y^1 - y^2\|.$$

Пусть  $\langle C \rangle_i$  –  $i$ -ый столбец матрицы  $C$ , тогда константу Липшица можно взять как  $L = \max_{i=1, n} \|\langle C \rangle_i\|^2$ .

*Доказательство.* Так как функция  $\phi(y)$ ,  $y \in Q$  дважды непрерывно дифференцируема, то [2]

$$\|\nabla\phi(y^1) - \nabla\phi(y^2)\| \leq \|\phi''(y)\| \cdot \|y^1 - y^2\|, \quad y^1, y^2, y \in Q.$$

Используя формулу (7), в силу того, что матрица  $Cx(y)(Cx(y))^T$  неотрицательно определена, получим

$$\|\phi''(y)\| = \|CD(x(y))C^T - (Cx(y))(Cx(y))^T\| \leq \|CD(x(y))C^T\|.$$

Обозначим через  $D(x(y))^{0,5}$  корень квадратный из диагональной матрицы  $D(x(y))$ . На диагонали этой матрицы стоят элементы  $d_{ii} = \sqrt{x_i}$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Пусть  $A = C \times D^{0,5}$ ;  $D^{0,5} = D(x(y))^{0,5}$ . Тогда  $A_{j,i} = \sqrt{x_i} \cdot c_{j,i}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$ , и

$$\|CDC^T\| \leq \|A\| \|A^T\|.$$

Будем далее в качестве нормы матрицы понимать её евклидову норму

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A_{i,j}^2}.$$

Для такой нормы  $\|A\| = \|A^T\|$ , поэтому

$$\begin{aligned} \|CDC^T\| &\leq \|A\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=m}^n x_i c_{j,i} = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=m}^n c_{j,i}^2 \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n x_i \cdot \max_{l=1, n} \sum_{j=1}^m c_{j,l}^2 = \max_{l=1, n} \sum_{j=1}^m c_{j,l}^2 = \max_{i=\overline{1, n}} \|\langle C \rangle_i\|^2. \end{aligned}$$

□

**Замечание 1.** Полученное значение константы Липшица  $L$  приведено в статье [3], однако доказательство выглядит в ней более сложным и громоздким.

Пусть  $Q_2 = \{y \in Q \mid c_1^T y = c_2^T y = \dots = c_n^T y = \alpha, \alpha \in R\}$ ;  $Q_1 = Q \setminus Q_2$ .

**Лемма 3.** Двойственная функция  $\phi(y)$ ,  $y \in Q$  выпукла на  $Q$ , строго выпукла на любом выпуклом множестве  $G \in Q_1$ , сильно выпукла на любом выпуклом компакте  $G \in Q_1$ .

*Доказательство.* Двойственная функция  $\phi(y)$  выпукла по теореме двойственности [1, 4], следовательно, квадратичная форма  $F(a) = a^T \phi''(y) a \geq 0$  при  $y \in Q$  и  $a \in R^m$ .

Введем новую переменную  $z = C^T a \in R^n$ . Тогда

$$F(a) = a^T C D C^T a - a^T C x (C x)^T a = z^T D z - (z^T x)^2 \equiv F_1(z).$$

Рассмотрим задачу

$$F_1(z) \rightarrow \min_{z \in R^n}.$$

Очевидно, что  $\nabla F_1(z) = 2Dz - 2(z^T x)x$  и в точке минимума выполняется равенство  $\nabla F_1(z)_i = 0$ , т.е.  $x_i z_i = (z^T x)x_i$  или  $z_i = z^T x \equiv \alpha \quad \forall i = \overline{1, n}$ , где  $\alpha$  – некоторое число.

Пусть теперь  $a = y$ , тогда  $z_i = c_i^T y = \alpha$ ,  $i = \overline{1, n}$  и по формуле (5)  $x_i = \xi_i / \sum_{j=1}^n \xi_j$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Тогда значение квадратичной формы  $F(y)$  при  $c_i^T y = \alpha$  равно нулю. Таким образом квадратичная форма  $F(y)$  обращается в нуль на множестве  $Q_2$ . Множество  $Q_2$  может быть пусто и непусто, что зависит от структуры матрицы  $C$ . Пусть  $Q_2 \neq \emptyset$ , тогда на множестве  $Q_1 = Q \setminus Q_2$  квадратичная форма  $F(y)$  строго положительна. Значит на любом выпуклом подмножестве  $G \in Q_1$  функция  $\phi(y)$  строго выпукла.

Если же подмножество  $G$  – выпуклый компакт, то минимальное собственное число матрицы  $\phi''(y)$  при  $y \in G$  больше нуля и на множестве  $G$  функция сильно выпукла.

Пусть теперь  $Q_2 = \emptyset$ , тогда  $Q_1 = Q$ . Поэтому на любом выпуклом множестве  $G \in Q$  функция  $\phi(y)$  строго выпукла и сильно выпукла на любом выпуклом компакте  $G \in Q$ .

□

**Замечание 2.** Если множество  $G$  не пусто, то решение  $x^*$  существует и единственно. По теореме двойственности [4] решение двойственной задачи существует и может быть как единственно так и не единственно. Признаком неединственности решения является, очевидно, условие  $Q_2 \neq \emptyset$  и значение компонент  $x_i = \xi_i / \sum_{j=1}^n \xi_j$  оказывается решением прямой задачи.

## Быстрый Градиентный метод

В настоящее время все более широкое распространение получает метод, предложенный Ю.Е. Нестеровым и называемый быстрым градиентным методом (БГМ). Данному методу посвящен ряд публикаций, однако во всех этих публикациях он применяется к ограниченной на простом множестве задаче. Иными словами задача безусловной минимизации, решаемая методом, ограничивается, например, шаром радиуса  $R$ . В случае если решение задачи не находится в этом шаре, то метод перезапускается на шаре большего радиуса. Далее будет показано, что для широкого класса задач, включающего задачу ЭЛП, это делать не нужно, а также получены оценки сходимости БГМ – верхняя оценка количества итераций, необходимого для поиска  $(\varepsilon_f, \varepsilon_g)$ -решения.

Для дальнейшего изложения потребуется следующая лемма

**Лемма 4.** [5] Пусть  $f(x)$  – выпуклая функция,  $f^* = \min f(x)$ ,  $x \in R^m$  причем  $f^* = f(x^*)$ ,  $x^{k+1} = x^k - h\nabla f(x^k)$  – итерационный процесс, стартующий из точки  $x^0$ ,  $R = \|x^0 - x^*\|$  – расстояние от стартовой точки до решения задачи, существует такая константа  $M$ , что  $\|\nabla f(x)\| \leq M \quad \forall x \in U_{\sqrt{2}R}(x^*)$ , градиент функции  $f(x)$  при  $x \in U_{\sqrt{2}R}(x^*)$  удовлетворяет условию Липшица с константой  $L$ .

Тогда при  $h = 1/2L$  имеют место неравенства

$$f(\bar{x}^N) - f^* \leq \frac{2LR^2}{N}; \quad \|x^N - x^*\| \leq \|x^0 - x^*\|. \quad (8)$$

Рассмотрим задачу выпуклой безусловной минимизации (9) гладкой функции  $\phi(y)$  в пространстве  $R^m$ , градиент которой удовлетворяет условию Липшица с константой  $L$ .

$$\phi(y) \rightarrow \min_{y \in R^m} \quad (9)$$

Следуя [6], определим итерационный процесс (10) БГМ решения задачи (9), причем прокс-функция  $d(y) = L\|y - y^0\|^2/2$ .

$$\begin{aligned}
\tilde{y}^{k+1} &= \arg \min_{y \in R^m} \left\{ \frac{L}{2} \|y - y^{k+1}\|_2^2 + \phi(y^k) + \langle \nabla \phi(y^{k+1}), y - y^{k+1} \rangle \right\}; \\
\check{y}^{k+1} &= \arg \min_{y \in R^m} \left\{ \frac{L}{2} \|y - y^0\|_2^2 + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=0}^k \alpha_{i+1} \left( \phi(y^{i+1}) + \langle \nabla \phi(y^{i+1}), y - y^{i+1} \rangle \right) \right\}; \\
y^{k+1} &= \tau_k \check{y}^k + (1 - \tau_k) \tilde{y}^k.
\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь вспомогательные неотрицательные числовые последовательности используемые в БГМ удовлетворяют условиям (11) ниже:

$$\alpha_1 \in (0, 1]; \quad A_k = \sum_{i=1}^k \alpha_i; \quad \alpha_k^2 \leq A_k; \quad \tau_k \leq 1. \tag{11}$$

Выражения (10) можно переписать в явном виде (28).

$$\begin{aligned}
\tilde{y}^{k+1} &= y^{k+1} - \frac{1}{L} \nabla \phi(y^{k+1}); \\
\check{y}^{k+1} &= y^0 - \frac{1}{L} \sum_{i=0}^k \alpha_{i+1} \nabla \phi(y^{i+1}) = \check{y}^k - \frac{1}{L} \alpha_{k+1} \nabla \phi(y^{k+1}); \\
y^{k+1} &= \tau_k \check{y}^k + (1 - \tau_k) \tilde{y}^k; \\
y^0 &= \check{y}^0 = \tilde{y}^0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Для упрощения дальнейших выкладок введем функции  $\Phi_k(u)$ ,  $k \in \overline{0, \infty}$ :

$$\Phi_k(u) = \left\langle \nabla \phi(y^k), u - y^k \right\rangle + \phi(y^k).$$

В случае выпуклой функции  $\phi(y)$  при любом  $k$  выполняется неравенство  $\Phi_k(u) \leq \phi(u)$ .

**Теорема 3.** Пусть гладкая функция  $\phi(y)$  выпукла в шаре  $U_R(y^*)$ , точка  $y^*$  – решение задачи минимизации  $\phi(y) \rightarrow \min$  при  $y \in U_R(y^*)$ , градиент функции  $\phi(y)$  удовлетворяет условию Липшица с константой  $L$  и последовательности  $\alpha_k$ ,  $\tau_k$  удовлетворяют условиям

$$\tau_0 = 1; \quad \tau_k \leq \frac{1}{\alpha_{k+1}}; \quad \alpha_k^2 \geq \alpha_{k+1} \frac{1 - \tau_k}{\tau_k}. \tag{13}$$

Тогда БГМ, стартовый из точки  $y^0 \in \partial U_R(y^*)$  и определяемый на последовательностях  $\alpha_k$ ,  $\tau_k$  (13), генерирует последовательности точек  $y^k$ ,  $\tilde{y}^k$ ,  $\check{y}^k$ , лежащие в шаре  $U_R(y^*)$ , В точке

$$\hat{y}^N = \frac{1}{A_N} \left[ \sum_{k=1}^N \alpha_k^2 \tilde{y}^k + \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_{k+1} \check{y}^k + \alpha_1 y^1 - \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k+1}^2 y^{k+1} \right] \quad (14)$$

выполняются неравенства:

$$\begin{aligned} A_N \phi(\hat{y}^N) &\leq \min_u \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k+1} \Phi_{k+1}(u) + \frac{L}{2} (\|u - \check{y}^0\|^2 - \|u - \check{y}^N\|^2) \right\}; \\ 0 &\leq \phi(\hat{y}^N) - \phi(y^*) \leq \frac{L}{2A_N} (\|y^* - \check{y}^0\|^2 - \|y^* - \check{y}^N\|^2). \end{aligned} \quad (15)$$

*Доказательство.* Покажем, что все последовательности точек, определяемые БГМ, будут лежать в шаре  $U_R(x^*)$ , где  $R = \|x^0 - x^*\|$ . Действительно, следуя рассуждениям из [7] в доказательстве леммы 4.3, получаем

$$\begin{aligned} \phi(y^{k+1}) - \phi(u) &\leq \langle \nabla \phi(y^{k+1}), y^{k+1} - u \rangle = \\ &= \frac{1 - \tau_k}{\tau_k} \langle \nabla \phi(y^{k+1}), \tilde{y}^k - y^{k+1} \rangle + \langle \nabla \phi(y^{k+1}), \check{y}^k - u \rangle \leq \\ &\leq \frac{1 - \tau_k}{\tau_k} (\phi(\tilde{y}^k) - \phi(y^{k+1})) + \langle \nabla \phi(y^{k+1}), \check{y}^k - u \rangle. \end{aligned} \quad (16)$$

Следуя лемме 4.2 из [7], находим

$$\begin{aligned} \langle \nabla \phi(y^{k+1}), \check{y}^k - u \rangle &= \langle \nabla \phi(y^{k+1}), \check{y}^k - \check{y}^{k+1} \rangle + \\ &+ \langle \nabla \phi(y^{k+1}), \check{y}^{k+1} - u \rangle = \langle \nabla \phi(y^{k+1}), \check{y}^k - \check{y}^{k+1} \rangle + \\ &+ \frac{L}{2\alpha_{k+1}} (\|u - \check{y}^k\|^2 - \|u - \check{y}^{k+1}\|^2 - \|\check{y}^{k+1} - \check{y}^k\|^2) \leq \\ &\leq \frac{\alpha_{k+1}}{2L} \|\nabla \phi(y^{k+1})\|^2 + \frac{L}{2\alpha_{k+1}} (\|u - \check{y}^k\|^2 - \|u - \check{y}^{k+1}\|^2). \end{aligned} \quad (17)$$

Следовательно, из (16) и (17) находим

$$\begin{aligned}
\phi(y^{k+1}) - \phi(u) &\leq \left\langle \nabla \phi(y^{k+1}), y^{k+1} - u \right\rangle \leq \\
&\leq \frac{1 - \tau_k}{\tau_k} (\phi(\tilde{y}^k) - \phi(y^{k+1})) + \frac{\alpha_{k+1}}{2L} \|\nabla \phi(y^{k+1})\|^2 + \\
&\quad + \frac{L}{2\alpha_{k+1}} \left( \|u - \check{y}^k\|^2 - \|u - \check{y}^{k+1}\|^2 \right) \leq \\
&\leq \frac{1 - \tau_k}{\tau_k} (\phi(\tilde{y}^k) - \phi(y^{k+1})) + \alpha_{k+1} (\phi(y^{k+1}) - \phi(\tilde{y}^{k+1})) + \\
&\quad + \frac{L}{2\alpha_{k+1}} \left( \|u - \check{y}^k\|^2 - \|u - \check{y}^{k+1}\|^2 \right).
\end{aligned}$$

Полученное неравенство можно переписать в следующем виде

$$\begin{aligned}
\alpha_{k+1}^2 \phi(\tilde{y}^{k+1}) - \alpha_{k+1} \frac{1 - \tau_k}{\tau_k} (\phi(\tilde{y}^k)) &\leq \alpha_{k+1} \left( \alpha_{k+1} - \frac{1 - \tau_k}{\tau_k} \right) \phi(y^{k+1}) + \\
&+ \alpha_{k+1} \left\langle \nabla \phi(y^{k+1}), u - y^{k+1} \right\rangle + \frac{L}{2} \left( \|u - \check{y}^k\|^2 - \|u - \check{y}^{k+1}\|^2 \right).
\end{aligned}$$

Просуммировав по индексу  $k = \overline{0, N-1}$ , находим

$$\begin{aligned}
\alpha_N^2 \phi(\tilde{y}^N) + \sum_{k=1}^{N-1} \left( \alpha_k^2 - \alpha_{k+1} \frac{1 - \tau_k}{\tau_k} \right) \phi(\tilde{y}^k) - \alpha_1 \frac{1 - \tau_0}{\tau_0} \phi(\tilde{y}^0) &\leq \\
&\leq \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k+1} \left\langle \nabla \phi(y^{k+1}), u - y^{k+1} \right\rangle + \\
&+ \sum_{k=0}^{N-1} \phi(y^{k+1}) \left( \alpha_{k+1}^2 - \alpha_{k+1} \frac{1 - \tau_k}{\tau_k} \right) + \\
&+ \frac{L}{2} \left( \|u - \check{y}^0\|^2 - \|u - \check{y}^N\|^2 \right) = \tag{18} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k+1} \Phi_{k+1}(u) + \sum_{k=0}^{N-1} \phi(y^{k+1}) \left( \alpha_{k+1}^2 - \frac{\alpha_{k+1}}{\tau_k} \right) + \\
&\quad + \frac{L}{2} \left( \|u - \check{y}^0\|^2 - \|u - \check{y}^N\|^2 \right) \leq \\
&\leq \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k+1} \phi(u) + \sum_{k=0}^{N-1} \phi(y^{k+1}) \left( \alpha_{k+1}^2 - \frac{\alpha_{k+1}}{\tau_k} \right) + \\
&\quad + \frac{L}{2} \left( \|u - \check{y}^0\|^2 - \|u - \check{y}^N\|^2 \right).
\end{aligned}$$

Выражение (14), используя  $y^{k+1} = \tau_k \check{y}^k + (1 - \tau_k) \tilde{y}^k$ , можно переписать в виде

$$\hat{y}^N = \frac{1}{A_N} \left[ \alpha_N^2 \tilde{y}^N + \sum_{k=1}^{N-1} \left( \alpha_k^2 - \alpha_{k+1} \frac{1-\tau_k}{\tau_k} \right) \tilde{y}^k + \sum_{k=0}^{N-1} \left( \frac{\alpha_{k+1}}{\tau_k} - \alpha_{k+1}^2 \right) y^{k+1} \right]. \quad (19)$$

Отметим, что

$$\alpha_N^2 + \sum_{k=1}^{N-1} \left( \alpha_k^2 - \alpha_{k+1} \frac{1-\tau_k}{\tau_k} \right) + \sum_{k=0}^{N-1} \left( \frac{\alpha_{k+1}}{\tau_k} - \alpha_{k+1}^2 \right) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k+1} = A_N.$$

Следовательно, в силу неравенства Йенсена

$$A_N \phi(\hat{y}^N) \leq \alpha_N^2 \phi(\tilde{y}^N) + \sum_{k=1}^{N-1} \left( \alpha_k^2 - \alpha_{k+1} \frac{1-\tau_k}{\tau_k} \right) \phi(\tilde{y}^k) + \sum_{k=0}^{N-1} \left( \frac{\alpha_{k+1}}{\tau_k} - \alpha_{k+1}^2 \right) \cdot \phi(y^{k+1}). \quad (20)$$

Таким образом, неравенство (18) преобразуется к следующему виду

$$\phi(\hat{y}^N) \leq \frac{1}{A_N} \left[ \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k+1} \Phi_{k+1}(u) + \frac{L}{2} (\|u - \check{y}^0\|^2 - \|u - \check{y}^N\|^2) \right] \leq \phi(u) + \frac{L}{2A_N} (\|u - \check{y}^0\|^2 - \|u - \check{y}^N\|^2).$$

Т.к. полученное неравенство выполнено при любом значении  $u \in R^m$ , а значит и при  $u = y^*$ , следует

$$A_N \phi(\hat{y}^N) \leq \min_u \left[ \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k+1} \Phi_{k+1}(u) + \frac{L}{2} (\|u - \check{y}^0\|^2 - \|u - \check{y}^N\|^2) \right];$$

$$0 \leq \phi(\hat{y}^N) - \phi(y^*) \leq \frac{L}{2A_N} (\|y^* - \check{y}^0\|^2 - \|y^* - \check{y}^N\|^2).$$

А значит утверждение теоремы (15) выполнено.

Из второго неравенства также следует

$$\|y^* - \check{y}^N\| \leq \|y^* - \check{y}^0\| = \|y^* - y^0\|.$$

В силу леммы 4 и выпуклости квадрата нормы находим

$$\begin{aligned} \|\tilde{y}^{k+1} - y^*\|^2 &\leq \|y^{k+1} - y^*\|^2 = \|\tau_k(\check{y}^k - y^*) + (1 - \tau_k)(\tilde{y}^k - y^*)\|^2 \leq \\ &\leq \tau_k \|\check{y}^k - y^*\|^2 + (1 - \tau_k) \|\tilde{y}^k - y^*\|^2 \leq \\ &\leq \tau_k \|y^0 - y^*\|^2 + (1 - \tau_k) \|\tilde{y}^k - y^*\|^2. \end{aligned}$$

Из полученно неравенства индукцией по  $k$  легко показать

$$\|\tilde{y}^k - y^*\| \leq \|y^k - y^*\| \leq \|y^0 - y^*\|.$$

□

**Следствие 1.** [5] Пусть  $\phi^*$  – решение задачи (9), а последовательности для БГМ имеют вид

$$\alpha_1 = 1; \quad \alpha_{k+1} = \alpha_k + \frac{1}{2} = \frac{k+2}{2}; \quad \tau_k = \frac{1}{\alpha_{k+1}}. \quad (21)$$

Тогда в условиях теоремы 3 для точки

$$\bar{y}^N = \frac{1}{N^2 + 3N} \left( \sum_{k=1}^{N-1} \tilde{y}^k + (N+1)^2 \tilde{y}^N \right)$$

выполнено

$$\begin{aligned} \phi(\bar{y}^N) &\leq \frac{4}{N^2+3N} \min_u \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \frac{k+2}{2} \Phi_{k+1}(u) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{L}{2} (\|u - \check{y}^0\|^2 - \|u - \check{y}^N\|^2) \right\}; \\ 0 &\leq \phi(\bar{y}^N) - \phi^* \leq \frac{4L}{N^2+3N} (\|y^* - \check{y}^0\|^2 - \|y^* - \check{y}^N\|^2). \end{aligned} \quad (22)$$

Указанное следствие доказывается тривиальной подстановкой последовательностей (21) в формулы теоремы 3.

## Приложение к задаче с аффинных ограничениями

Рассмотрим задачу (23) условной минимизации гладкой функции  $f(x)$  на множестве  $G \subset R^n$  с аффинными ограничениями  $Ax = b$ , где  $b \in R^m$ ,  $A$  – матрица размерности  $m \times n$ .

$$f(x) \rightarrow \min_{x \in G; Ax=b}. \quad (23)$$

Для такой задачи можно выписать двойственную задачу (24)

$$\phi(y) = \max_{x \in G} \{ \langle y, b - Ax \rangle - f(x) \} \rightarrow \min_{y \in R^m}. \quad (24)$$

Под  $x(y)$  будем понимать решение внутренней задачи максимизации при построении двойственной

$$x(y) = \arg \max_{x \in G} \{ \langle y, b - Ax \rangle - f(x) \}.$$

При решении задач ЭЛП (1) или в более общем случае для сепарабельных функционалов, когда  $f(x) = \sum f_i(x_i)$ , в которых  $x(y)$  можно получить явно, основной вклад в вычислительную сложность дает матричное произведение  $Ax$  и/или  $A^T y$  при простых, например, параллелепипедных ограничениях  $G$ . К сожалению, значение  $x(y)$  указать явно можно не всегда и оно известно лишь с определенной точностью. Однако в случае сильной выпуклости функции  $f(x)$  или её сепарабельности такая неточность влияет на оценку сложности решения задачи лишь логарифмическим образом, и аккуратный учет этого приводит лишь к логарифмическим поправкам сложности исследуемого метода ([8, 9, 10, 11]).

Воспользуемся для решения двойственной задачи (24) БГМ в виде (10), для которого последовательности имеют вид (13). Тогда на  $N$ -м шаге согласно теореме 3 выполняется соотношение (15), из которого следует неравенство

$$\begin{aligned} \phi(\hat{y}^N) - \min_{u \in U_{2R}(y^*)} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\alpha_{k+1}}{A_N} \left[ \phi(y^{k+1}) + \langle \nabla \phi(y^{k+1}), u - y^{k+1} \rangle \right] \right\} &\leq \\ &\leq \frac{8LR^2}{A_k} = \gamma_N. \quad (25) \end{aligned}$$

Положим

$$\lambda_k = \frac{\alpha_k}{A_N}; \quad x^N = \sum_{k=1}^N \lambda_k x(y^k) = \lambda_N x(y^N) + \frac{A_{N-1}}{A_N} x^{N-1}.$$

Тогда в силу  $x(y)$  аналогично пункту 3 из [12] неравенство (25) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \phi(\hat{y}^N) - \sum_{k=1}^N \lambda_k \langle y^k, b - Ax(y^k) \rangle + \sum_{k=1}^N \lambda_k f(x(y^k)) - \\ - \min_{u \in U_{2R}(y^*)} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_{k+1} \langle b - Ax(y^{k+1}), y - y^{k+1} \rangle \right\} \leq \gamma_N. \end{aligned}$$

Легко видеть, что полученное неравенство легко преобразуется к виду

$$\phi(\hat{y}^N) + f\left(\sum_{k=1}^N \lambda_k x(y^k)\right) + \max_{u \in U_{2r}(y^*)} \left\{ \left\langle A \sum_{k=1}^N \lambda_k x(y^k) - b, y \right\rangle \right\} \leq \gamma_N.$$

Следовательно, выполняется неравенство

$$\phi(\hat{y}^N) + f(x^N) + 3R\|Ax^N - b\| \leq \gamma_N.$$

В силу условия задачи  $Ax^* = b$ , а также в силу слабой двойственности [1]  $-f(x^*) \leq \phi(y^*)$  выполнено:

$$\begin{aligned} f(x^N) - f(x^*) &\leq f(x^N) + \phi(y^*) \leq f(x^N) + \phi(\hat{y}^N) \leq \\ &\leq \phi(\hat{y}^N) + f(x^N) + 3R\|Ax^N - b\| \leq \gamma_N. \end{aligned}$$

Из этих же свойств находим

$$\begin{aligned} -f(x^*) = \langle y^*, b - Ax^* \rangle - f(x^*) = \phi(y^*) \geq \langle y^*, b - Ax^N \rangle - f(x^N); \\ -R\|Ax^N - b\| \leq f(x^N) - f(x^*) \leq f(x^N) + \phi(\hat{y}^N). \end{aligned}$$

Из неравенств выше легко видеть, что будет выполняться неравенство

$$R\|Ax^N - b\| \leq \gamma_N/2.$$

Таким образом будут дополнительно выполнены неравенства

$$\|f(x^*) - f(x^N)\| \leq \gamma_N; \quad \|\phi(\hat{y}^N) + f(x^N)\| \leq \gamma_N.$$

Сказанное доказывает следующую теорему

**Теорема 4.** *БГМ при решении задачи с аффинными ограничениями (23) с помощью двойственной задачи (24) с критериями останова  $f(x^N) + g(y^N) \leq \varepsilon_f$  и  $\|Ax - b\| \leq \varepsilon_g$  гарантированно останавливается, причем число итераций будет меньше чем*

$$\max \left\{ \sqrt{\frac{18LR^2}{\varepsilon_f}}, \sqrt{\frac{18LR}{\varepsilon_g}} \right\}.$$

### Приложение к задаче с линейными ограничениями-неравенствами

Ранее мы рассмотрели применение БГМ к задачам БМ и к задачам к ней сводимым. Однако, полученные результаты можно обобщить и на более широкий случай, а именно когда задача решается на множестве  $W = R_+^{m_1} \times R^{m_2}$ , при этом полагаем, что  $m = m_1 + m_2$ . Рассмотрим задачу условной минимизации вида

$$\phi(y) \rightarrow \min_{y \in W}; \quad W = R_+^{m_1} \times R^{m_2}. \quad (26)$$

Будем полагать, что  $\nabla\phi(y)$  удовлетворяет условию Липшица с константой  $L$ .

Для такой задачи БГМ можно записать в следующем виде

$$\begin{aligned} \tilde{y}^{k+1} &= \arg \min_{y \in W} \left\{ \frac{L}{2} \|y - y^{k+1}\|_2^2 + \phi(y^k) + \langle \nabla\phi(y^{k+1}), y - y^{k+1} \rangle \right\}; \\ \check{y}^{k+1} &= \arg \min_{y \in W} \left\{ \frac{L}{2} \|y - y^0\|_2^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^k \alpha_{i+1} (\phi(y^{i+1}) + \langle \nabla\phi(y^{i+1}), y - y^{i+1} \rangle) \right\}; \\ y^{k+1} &= \tau_k \check{y}^k + (1 - \tau_k) \tilde{y}^k. \end{aligned} \quad (27)$$

В дальнейшем воспользуемся также функцией-срезкой  $(\cdot)_+$ , которую можно записать как  $(x)_+ = \max(x, 0)$ ,  $x \in R^1$

Следующая лемма позволяет упростить запись БГМ.

**Лемма 5.** [13] *Если  $Q = R_+^{m_1} \times R^{m_2}$ , то последовательности точек  $\tilde{y}^k$ ,  $\check{y}^k$ ,  $y^k$  можно записать в виде (28).*

$$\tilde{y}_j^k = \begin{cases} (y_j^k - \frac{1}{L}\nabla\phi(y^k)_j)_+ & \text{при } j \leq m_1; \\ y_j^k - \frac{1}{L}\nabla\phi(y^k)_j & \text{при } j > m_1; \end{cases}$$

$$\check{y}_j^k = \begin{cases} (y_j^0 - \frac{1}{L}\sum_{i=0}^k \alpha_i \nabla\phi(y^i)_j)_+ & \text{при } j \leq m_1; \\ y_j^0 - \frac{1}{L}\sum_{i=0}^k \alpha_i \nabla\phi(y^i)_j & \text{при } j > m_1. \end{cases} \quad (28)$$

Введем дополнительную переменную

$$\check{y}^k = y^0 - \frac{1}{L}\sum_{i=0}^k \alpha_i \nabla\phi(y^i) = \check{y}^{k-1} - \frac{1}{L}\alpha_k \phi(y^k).$$

Тогда, используя утверждение леммы 5, выражение (27) принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{y}_j^k &= \begin{cases} (y_j^k - \frac{1}{L}\nabla\phi(y^k)_j)_+ & \text{при } j \leq m_1; \\ y_j^k - \frac{1}{L}\nabla\phi(y^k)_j & \text{при } j > m_1; \end{cases} \\ \check{y}^k &= \check{y}^{k-1} - \frac{1}{L}\alpha_k \phi(y^k) \\ \check{y}_j^k &= \begin{cases} (\check{y}_j^k)_+ & \text{при } j \leq m_1; \\ \check{y}_j^k & \text{при } j > m_1. \end{cases} \\ y^{k+1} &= \tau_k \check{y}^k + (1 - \tau_k) \tilde{y}^k. \end{aligned} \quad (29)$$

Используя такое представление БГМ, запишем следующую теорему

**Теорема 5.** Пусть  $y^* = \arg \min \phi(y)$  при  $y \in U_R(y^*) \cap W$ , причём функция  $\phi(y)$  является выпуклой в этом шаре, а её градиент удовлетворяет условию Липшица с константой  $L$ .

Тогда БГМ (29), стартовый из точки  $y^0 \in cl\{U_R(y^*) \cap W\}$  и определяемый на последовательностях  $\tau_k$ ,  $\alpha_k$  согласно условиям (13) генерирует последовательности точек  $y^k$ ,  $\check{y}^k$ ,  $\tilde{y}^k$  лежащие в  $U_R(y^*) \cap W$ , а в точке  $\hat{y}^N$  (14), выполняется (15).

*Доказательство.* Отметим, что последовательности точек  $\tilde{y}^k$ ,  $\check{y}^k$ ,  $y^k$  в силу утверждения теоремы 3 принадлежат множеству  $U_R(y^*)$ . В силу (29)  $\check{y}^k \in U_R(y^*) \cap W$  и  $\tilde{y}^k \in U_R(y^*) \cap W$ . Поэтому, т.к.  $y^k \in U_R(y^*) \cap W$  как выпуклая комбинация точек  $\check{y}^k$  и  $\tilde{y}^k$ . Аналогично доказанному ранее можно показать, что для точки (14) выполнено (15).  $\square$

Рассмотрим задачу минимизации (30) функции  $f(x)$  на выпуклом множестве  $Q$  и двойственную к ней задачу минимизации функции  $\phi(y)$

$$\begin{aligned} f(x) \rightarrow \min_{x \in G}; \quad G = \{x \in Q : C_1 x - b_1 \leq 0; C_2 x - b_2 = 0\}; \\ \phi(y) = \max_{x \in Q} (\langle y, b - Cx \rangle - f(x)) \rightarrow \min_{y \in R_+^{m_1} \times R^{m_2}}. \end{aligned} \quad (30)$$

Для решения такой задачи БГМ можно переписать в виде алгоритма 1, который строит последовательности точек как в двойственном так и в прямом пространстве. Причем последовательность точек в прямо пространстве сходится к решению задачи.

---

**Algorithm 1** Прямо-двойственный быстрый градиентный метод для задачи с аффинными ограничениями и ограничениями-неравенствами

---

**Input:** Последовательности  $\{\alpha_i\}_{i=0}^\infty$  и  $\{\tau_i\}_{i=0}^\infty$ , точка  $y^0$

**Output:** Последовательности точек  $\tilde{y}^k, x^k$

**repeat**

Вычисляем

$$\begin{aligned} \tilde{y}_j^k &= \begin{cases} (y_j^k - \frac{1}{L} \nabla \phi(y^k)_j)_+ & \text{при } j \leq m_1; \\ y_j^k - \frac{1}{L} \nabla \phi(y^k)_j & \text{при } j > m_1; \end{cases} \\ \check{y}_j^k &= \begin{cases} (y_j^0 - \frac{1}{L} \sum_{i=0}^k \alpha_i \nabla \phi(y^i)_j)_+ & \text{при } j \leq m_1; \\ y_j^0 - \frac{1}{L} \sum_{i=0}^k \alpha_i \nabla \phi(y^i)_j & \text{при } j > m_1; \end{cases} \\ y^{k+1} &= \tau_k \tilde{y}^k + (1 - \tau_k) \check{y}^k; \quad x^k = \sum_{i=0}^k \frac{\alpha_i}{A_k} x(y^i). \end{aligned}$$

**until**  $f(x^k) + \phi(y^k) > \varepsilon_f$  или  $\Delta(x^k, G) > \varepsilon_g$ ;

---

Отметим, что выход из алгоритма осуществляется при выполнении условий  $f(x^k) + \phi(y^k) = f(x^k) - \psi(y^k) \leq \varepsilon_f$ , а величину  $f(x^k) - \psi(y^k)$  можно понимать как зазор двойственности: разница между значениями прямой и двойственной функции в точке  $(x^k, y^k)$ .

В указанных условиях сформулированную ранее для задачи БМ теорему можно обобщить:

**Теорема 6.** [13] Пусть функция  $f(x)$  выпукла на выпуклом множестве  $Q$ , а функция  $\phi(y)$  определяется как (30), её градиент

$\nabla\phi(y)$  удовлетворяет условию Липшица с константой  $L$ ,  $x(y) = \arg \max_{x \in Q} (\langle y, b - Cx \rangle - f(x))$ .

Тогда для последовательностей точек, генерируемых согласно алгоритму 1, справедливы неравенства

$$\Delta(x^k, G) \leq \frac{2LR}{A_k}; \quad |f(x^*) - f(x^k)| \leq \frac{2LR^2}{A_k}; \quad f(x^k) + \phi(\tilde{y}^k) \leq \frac{2LR^2}{A_k}. \quad (31)$$

**Следствие 2.** Пусть  $\alpha_i = (i + 1)/2$  (для такой последовательности выполняются соотношения (11)) и  $y^0 = 0$ , тогда количество итераций  $N$ , которое достаточно выполнить для достижения заданной точности  $(\varepsilon_f, \varepsilon_g)$ , будет определяться

$$N = \max \left\{ \sqrt{\frac{8LR}{\varepsilon_g}}, \sqrt{\frac{8LR^2}{\varepsilon_f}} \right\}. \quad (32)$$

При реализации алгоритма 1 целесообразно пользоваться формулами (29) и  $x^{k+1} = (x^k \cdot A_k + \alpha_{k+1} \cdot x(y^{k+1}))/A_{k+1}$ , что упрощает вычислительные затраты в рамках одной итерации.

## Заключение

В силу теоремы 6 и леммы 2 алгоритм 1 может применяться для поиска  $(\varepsilon_f, \varepsilon_g)$ -решения задачи ЭЛП. Доказанные теоремы отражают прямо-двойственный характер БГМ: данный метод позволяет найти решение прямой задачи по последовательности точек в двойственном пространстве, что видно из формулировок доказанных теорем. Результаты численных экспериментов были отражены в работах [13, 14, 15, 16, 17]. Представленные в работе результаты уточнили результаты, изложенные в статье [5], расширяя область их применимости на более широкий класс задач с линейными ограничениями-неравенствами для широкого класса вспомогательных последовательностей  $\alpha_i$  применяемых в БГМ.

## Список литературы

- [1] В.Г. Жадан. Методы оптимизации. Ч.1. Введение в выпуклый анализ и теорию оптимизации // М.: МФТИ – 2014.

- [2] Б.Т. Поляк. Введение в оптимизацию. Изд. 2-е, испр. и доп. // М.: ЛЕНАНД – 2014.
- [3] Y. Nesterov. Smooth minimization of non-smooth function. // Math. Program. Ser. A. – 2005 – V.103. No.1. P.127–152.
- [4] А.Г. Сухарев, А.В. Тимохов, В.В. Федоров. Курс методов оптимизации // М.: ФИЗМАТЛИТ – 2005.
- [5] А.С. Аникин, А.В. Гасников, А.И. Тюрин, А.В. Чернов. Двойственные подходы к задачам минимизации сильно выпуклых функционалов простой структуры при аффинных ограничениях. // ЖВМ и МФ – 2017 – Т.57. № 8. С. 28-42.
- [6] Ю.Е. Нестеров. Метод минимизации выпуклых функций со скоростью сходимости  $o(1/k^2)$ . // Докл. АН СССР. – 1983 – Т.269, № 3, С. 543-547
- [7] Z. Allen-Zhu and L. Orecchia. Linear coupling of Gradient and Mirror Descent: A Novel, Simple Interpretation of Nesterov’s Accelerated Method and Mirror Descent // ITCS 2017: Innovations in Theoretical Computer Science – 2017.
- [8] A. Anikin, P. Dvurechensky, A. Gasnikov, A. Golov, A. Gornov, Yu. Maximov, M. Mendel, V. Spokoiny. Modern efficient numerical approaches to regularized regression problems in application to traffic demands matrix calculation from link loads. // Proceedings of International conference ITAS-2015. Russia, Sochi, September – 2015.
- [9] A. Nemirovski. Lectures on modern convex optimization analysis, algorithms, and engineering applications. // Philadelphia: SIAM – 2013.
- [10] А.В. Гасников, П.Е. Двуреченский, Ю.Е. Нестеров. Стохастические градиентные методы с неточным оракулом. // Труды МФТИ – 2016 – Т.8. № 1. С. 41-91.
- [11] А.В. Гасников, Д.И. Камзолов, М.А. Мендель. Основные конструкции над алгоритмами выпуклой оптимизации и их приложения к получению новых оценок для сильно выпуклых задач. // Труды МФТИ – 2016 – Т.8. № 3. С. 25-42.

- [12] Yu. Nesterov. Complexity bounds for primal-dual methods minimizing the model of objective function. // CORE Discussion Papers. 2015/03 – 2015.
- [13] А.В. Чернов. Прямо-двойственный метод решения задачи энтропийно-линейного программирования. // Интеллектуальные системы. – 2016. – Т. 20, вып. 1. С. 39-56
- [14] A. Chernov, P. Dvurechencky, A. Gasnikov. Fast primal-dual gradient method for strongly convex minimization problems with linear constraints. // In: Kochetov, Yu. et all (eds.) DOOR-2016. LNCS – 2016 – V.9869.
- [15] А.В. Гасников, П.Е. Двуреченский, А.Л. Суворикова, А.В. Чернов. Об энтропийной регуляризации транспортной задачи линейного программирования. // VIII Московская Международная конференция по исследованию операций (ORM2016). – 2016 – Т.2. С. 241-242.
- [16] А.В. Чернов, А.И. Тюрин. Двойственный быстрый градиентный метод решения задач энтропийно-линейного программирования. // VIII Московская Международная конференция по исследованию операций (ORM2016). – 2016 – Т.2. С. 254-257.
- [17] A. Chernov, P. Dvurechensky. A primal-dual first-order method for minimization problems with linear constraints. // The 40th Interdisciplinary Conference and School. – 2016.

# Специальные вопросы теории интеллектуальных систем

Часть 2

# Вопросы полноты в классе кусочно-линейных непрерывных функций.

А. Н. Кан

В статье рассматривается класс всех двуместных кусочно-линейных непрерывных функций. Доказывается что данный класс лежит в классе согласованных функций. Найден критерий полноты в этом классе.

**Ключевые слова:** Класс кусочно-линейных функций, класс кусочно-линейных непрерывных функций, класс согласованных функций, класс финитно-параллельных непрерывных функций, функция Хэвисайда, операции суперпозиции, вектор сигнатуры.

## Введение.

В настоящей работе рассматривается класс  $CPL$  кусочно-линейных непрерывных функций. Данный класс является подклассом  $PL$  кусочно-линейных функций. Кусочно-линейные функции были изучены в работе [1]. Был выделен класс  $PP$  кусочно-параллельных функций, в котором был найден предполный класс  $C$ -финитно-линейных функций  $FL$ . Был сформулирован критерий полноты в классе кусочно-параллельных функций. В работе [4] был получен критерий полноты в классе кусочно-линейных функций. Были найдены три замкнутых класса: класс финитных функций  $\Phi$ , класс кусочно-линейных непрерывных функций  $CPL$  и класс согласованных функций  $P$ . Данные классы образуют критериальную систему в классе кусочно-линейных функций. Каждый из приведенных классов может обладать "хорошими" свойствами, имеющие значение в реализации нейронной сети. Поэтому отдельно изучается класс кусочно-линейных непрерывных функций. Данный

класс был рассмотрен в работе [3]. Оказалось что все кусочно-линейные непрерывные функции зависящие от одной переменной  $CPL^{(1)}$  можно получить из функции модуля и линейных функций по операциям суперпозиции. Хотелось бы обобщить результат прошлой работы на все кусочно-линейные непрерывные функции. В настоящей работе была поставлена задача полноты в классе кусочно-линейных непрерывных функций зависящих от двух переменных.

## Основные понятия и определения.

**Определение 1.** Функция  $f : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}$  называется линейной, если найдутся  $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$  и  $c \in \mathbb{R}$ , такие что  $f(\bar{x}) = \bar{x} * \bar{a} + c$ , где под операцией "  $*$  " понимается скалярное произведение векторов. Множество всех линейных функций обозначим через  $L$ .

Пусть  $l_i$  - гиперплоскость, задаваемая уравнением  $\bar{x} * \bar{a}_i + c_i = 0$ ,  $a_i \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Для каждой точки  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  рассмотрим вектор  $\sigma(\bar{x}) = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$  с компонентами из множества  $\{-1, 0, 1\}$ ,  $\sigma_i = \text{sgn}(\bar{x} * \bar{a}_i + c_i)$ , где

$$\text{sgn}(b) = \begin{cases} -1, & \text{если } b < 0 \\ 0, & \text{если } b = 0 \\ 1, & \text{если } b > 0. \end{cases}$$

**Определение 2.** Две точки  $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$  эквивалентны относительно гиперплоскостей  $l_1, \dots, l_k$  тогда и только тогда, когда  $\sigma(\bar{x}) = \sigma(\bar{y})$ , обозначим это через  $\bar{x} \sim \bar{y}$ .

Легко проверить, что отношение "  $\sim$  " является отношением эквивалентности. Таким образом, пространство  $\mathbb{R}^n$  разбивается на классы эквивалентности  $R_1, \dots, R_s$ .

**Определение 3.** Сигнатурой класса  $R$  называется вектор  $\sigma(R) = \sigma(\bar{x})$ , где  $\bar{x}$  точка класса  $R$ .

Пусть  $R_1, \dots, R_s$  - все классы эквивалентности на которые гиперплоскости  $l_1, \dots, l_k$  разбивают  $\mathbb{R}^n$ .

**Определение 4.** Функция  $f : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}$  называется кусочно-линейной, если  $\forall j \in \{1, \dots, s\}$  найдутся  $b_j \in \mathbb{R}^n$  и  $d_j \in \mathbb{R}$ , что для всех  $\bar{x} \in R_j$  выполняется  $f(\bar{x}) = \bar{x} * \bar{b}_j + d_j$ . Линейную функцию  $\bar{x} * \bar{b}_j + d_j$ , реализуемую на множестве  $R_j$ , обозначим  $f_{R_j}(\bar{x})$ . Множество всех кусочно-линейных функций обозначим через  $PL$ .

**Определение 5.** Функция  $f : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}$  называется кусочно-постоянной, если  $\forall j \in \{1, \dots, s\}$  найдутся  $d_j \in \mathbb{R}$ , что для всех  $\bar{x} \in R_j$  выполняется  $f(\bar{x}) = d_j$ . Множество всех кусочно-постоянных функций обозначим через  $PC$ .

**Определение 6.** Функция  $f : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}$  называется кусочно-линейной непрерывной, если  $f \in PL$  и непрерывна. Класс всех кусочно-линейных непрерывных функций обозначим через  $CPL$ .

Пусть  $f : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R} \in CPL$ , тогда выполняются следующее свойство.

**Свойство 1.**  $\forall R_i, R_j \in \{R_1, \dots, R_s\}$ ,  $\sigma(R_i) = (\sigma_1^{R_i}, \dots, \sigma_k^{R_i})$ ,  $\sigma(R_j) = (\sigma_1^{R_j}, \dots, \sigma_k^{R_j})$  таких, что

$$\sum_{p=1}^k |\sigma_p^{R_i} - \sigma_p^{R_j}| = 1, \quad (1)$$

имеем

$$f_{R_i}(\bar{x}) = f_{R_j}(\bar{x}), \forall \bar{x} \in R_j. \quad (2)$$

В данном случае вектор сигнатуры  $R_j$  имеет на один ноль больше, иначе мы бы рассматривали  $\bar{x} \in R_i$ .

**Определение 7.** Функция  $f : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}$  называется согласованной, если  $f \in PL$  и  $\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{d} \in \mathbb{R}^n, \exists A, B, N \in \mathbb{R}$  такие, что  $f(\bar{a} \cdot t + \bar{b}) = f(\bar{a} \cdot t + \bar{d}) + A \cdot h + B \cdot (h - 1)$ , где  $h = 0$  если  $t < -N$ ,  $h = 1$  если  $t > N$  [4]. Класс всех согласованных функций обозначим  $P$ .

Другими словами, функция  $f$  принадлежит классу согласованных функций, если на любых двух параллельных прямых в  $\mathbb{R}^n$  функция определенная как разность функций на этих прямых, при достаточно большом  $|t| > N$ , ведет себя как кусочно-постоянная функция.

## Задача вложенности класса $CPL$ в класс $P$ .

**Теорема 1.**  $CPL \subset P$ .

**Доказательство.**

Докажем что любая функция из класса  $CPL$  принадлежит классу  $P$ .

От противного.

Пусть  $f \in CPL$  и пусть  $\exists \bar{a}, \bar{b}, \bar{d} \in \mathbb{R}^n$  такие, что  $\forall N \in \mathbb{R}_+, f(\bar{a} \cdot t + \bar{b}) - f(\bar{a} \cdot t + \bar{d}) \neq const$ , при  $t > N$ . Прямые  $r_1 = \bar{a} \cdot t + \bar{b}$  и  $r_2 = \bar{a} \cdot t + \bar{d}$  задают плоскость  $p$  в  $\mathbb{R}^n$ . Рассмотрим функцию  $f$  на плоскости  $p$  и обозначим ее через  $g(x, y)$ .

$$g(x, y) = f(p) \quad (3)$$

Далее будем рассматривать функции при достаточно большом значении аргумента таком, что область определения функции будет попадать только в один класс эквивалентности.

Пусть функция  $g(x, y)$  задается гиперплоскостями (прямыми)  $l_1, \dots, l_k$ , которые образуют классы эквивалентности  $R_1, \dots, R_s$ .

Рассмотрим случаи:

1)  $r_1, r_2 \subset R_i$ .

$$g(\bar{a} \cdot t + \bar{b}) - g(\bar{a} \cdot t + \bar{d}) = g_{R_i}(\bar{a} \cdot t + \bar{b}) - g_{R_i}(\bar{a} \cdot t + \bar{d}) = A \cdot (a_1 \cdot t + a_2 \cdot t + b) + B - A \cdot (a_1 \cdot t + a_2 \cdot t + d) + B = A \cdot (b - d) = const. \quad (4)$$

2)  $r_1 \subset R_i, r_2 \subset R_j$ , где  $R_i \subseteq l \in \{l_1, \dots, l_k\}, R_j$  — смежен с прямой  $l \in l_1, \dots, l_k$

Это означает что

$$\sum_1^s |\sigma^{R_i} - \sigma^{R_j}| = 1. \quad (5)$$

а следовательно  $g_{R_i}(\bar{x}) = g_{R_j}(\bar{x}), \forall \bar{x} \in R_i$ . Тогда

$$g(\bar{a} \cdot t + \bar{b}) - g(\bar{a} \cdot t + \bar{d}) = g_{R_i}(\bar{a} \cdot t + \bar{b}) - g_{R_i}(\bar{a} \cdot t + \bar{d}) = A \cdot (a_1 \cdot t + a_2 \cdot t + b) + B - A \cdot (a_1 \cdot t + a_2 \cdot t + d) + B = A \cdot (b - d) = \text{const.} \quad (6)$$

**3)** Последний случай, когда между прямыми  $r_1$  и  $r_2$  проходят несколько прямых  $l_{j_1}, \dots, l_{j_m} \in \{l_1, \dots, l_s\}$  упорядоченных от  $r_1$  к  $r_2$ . Из первого и второго случаев можно показать что функция на прямой  $r_1$  отличается на константу от функции на прямой  $l_{j_1}$ , функция на прямой  $l_{j_1}$  отличается на константу от функции на прямой  $l_{j_2}$ , и т.д. Получаем что функция на прямой  $r_1$  отличается на константу от функции на прямой  $r_2$ .

Во всех трех случаях получаем что разница  $g(\bar{a} \cdot t + \bar{b}) - g(\bar{a} \cdot t + \bar{d}) = \text{const}$ , а следовательно предположение неверно и класс  $CPL \subset P$ . Неравенство класса  $CPL$  и  $P$  вытекает из следующего примера. Рассмотрим функцию Хэвисайда  $\Theta(x)$ .

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq 0 \\ 0, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

В точке  $x = 0$  функция разрывна, следовательно  $\Theta(x) \notin CPL$ . Но разность функции на двух параллельных прямых, при достаточно большом  $t$ , равно нулю.

$$\Theta(a \cdot t + b) - \Theta(a \cdot t + d) = 0. \quad (7)$$

Следовательно  $\Theta(x) \in P$ .

■

## Класс $CFP$ финитно-параллельных функций.

**Замкнутость класса  $CFP$ .**

**Определение 8.** Функция  $f : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}$  называется финитно-параллельной непрерывной функцией, если  $f \in CPL$  и  $\forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^n, \exists N \in \mathbb{R}$  такое, что  $f(\bar{a} \cdot t + \bar{b}) + f(\bar{a} \cdot (-t) + \bar{b}) = \text{const}$ , для  $t > N$ . Множество всех финитно-параллельных непрерывных

функций обозначим через  $CFP$ .

**Теорема 2.** *Класс  $CFP$  замкнут по операциям суперпозиции.*

**Доказательство.**

Очевидно, что операции отождествления, переименования, добавления и удаления фиктивных переменных сохраняют класс  $CFP$ . Это вытекает из определения класса  $CFP$ . Докажем что операция подстановки не выводит нас за пределы класса  $CFP$ . Рассмотрим функцию  $h(x_1, \dots, x_n)$ .

$$h(x_1, \dots, x_n) = f(g(x_1, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) \quad (8)$$

$f \in CFP, g \in CFP$ .

Рассмотрим функцию  $h$  на произвольной прямой и обозначим через  $h_1$ :

$$\begin{aligned} h_1(t) &= h(a_1 \cdot t + b_1, \dots, a_n \cdot t + b_n) = \\ &= f(g(a_1 \cdot t + b_1, \dots, a_n \cdot t + b_n), a_2 \cdot t + b_2, \dots, a_n \cdot t + b_n) \end{aligned} \quad (9)$$

где  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ .

Так как  $g \in CFP$  то  $\exists N \in \mathbb{R}$  такое, что при  $t > N$

$$\begin{aligned} h_1(t) &= h(a_1 \cdot t + b_1, \dots, a_n \cdot t + b_n) = \\ &= f(g(a_1 \cdot t + b_1, \dots, a_n \cdot t + b_n), a_2 \cdot t + b_2, \dots, a_n \cdot t + b_n) = \\ &= f(A \cdot t + B, a_2 \cdot t + b_2, \dots, a_n \cdot t + b_n) \end{aligned} \quad (10)$$

При  $t < -N$

$$\begin{aligned} h_1(t) &= h(a_1 \cdot t + b_1, \dots, a_n \cdot t + b_n) = \\ &= f(g(a_1 \cdot t + b_1, \dots, a_n \cdot t + b_n), a_2 \cdot t + b_2, \dots, a_n \cdot t + b_n) = \\ &= f(A \cdot t + D, a_2 \cdot t + b_2, \dots, a_n \cdot t + b_n) \end{aligned} \quad (11)$$

Так как  $f \in CFP \subset P \Rightarrow h_1(t) + h_1(-t) = const$ .

■

**Определение 9.** *Класс  $A$  2-предполный в классе  $B$ , если  $B^{(2)} \subseteq [A \cup \{f\}]$ , где  $f \notin A$ .*

Из теоремы 2 получили, что  $CFP$  замкнут в классе  $CPL$ . Оказывается данный класс является 2-предполным в классе  $CPL$  кусочно-линейных непрерывных функций.

## 2-предполнота класса $CFP$ в классе $CPL$ .

**Теорема 3.** Пусть  $M \subseteq CPL$ .  $|x| \in [M \cup L] \Leftrightarrow M \not\subseteq CFP$ .

**Доказательство.**

Необходимость вытекает из замкнутости класса  $CFP$ .

Докажем что из условия  $M \not\subseteq CFP$  следует, что  $|x| \in [M \cup L]$ .

Пусть  $M \not\subseteq CFP \Rightarrow \exists f(x_1, \dots, x_n)$  такая, что  $\exists \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^n$ ,  
 $f(\bar{a} \cdot t + \bar{b}) - f(\bar{a} \cdot (-t) + \bar{b}) \neq const, \forall N \in \mathbb{R}$ , при  $t > N$ .

Пусть  $g(t) = f(a_1 \cdot t + b_1, \dots, a_n \cdot t + b_n)$ .

$$g(t) = \begin{cases} a_1 \cdot t + b_1, & \text{если } t \leq c_1 \\ a_2 \cdot t + b_2, & \text{если } c_1 \leq t \leq c_2 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ a_l \cdot t + b_l, & \text{если } t \geq c_{l-1} \end{cases}$$

Сначала определим функцию  $g_1(t)$ .

$$g_1(t) = g(t + c_1) - a_2 \cdot t \quad (12)$$

Мы просто сместили функцию так, чтобы первый изгиб(слева направо) был в точке ноль. При этом отняли линейную функцию  $a_2 \cdot t$ , чтобы функция  $g_1(t)$  на отрезке  $[0; c_2 - c_1]$  равнялась нулю. Далее определим функцию  $h(t)$ .

$$h(t) = \frac{(g(t + c_1) - a_l \cdot t)}{a_1 - a_l} \quad (13)$$

$a_1 - a_l \neq 0$  (следует из  $h(t) \notin CFP$ ).

Данная функция также имеет первый изгиб в точке ноль. Отняв функцию  $a_l \cdot t$  получили что на полуинтервале  $[c_l - c_1; \infty)$  функция  $h(t) = const$ , при этом на полуинтервале  $(\infty, 0]$ ,  $h(t) = t$ .

Так, как функция  $h(t)$  на полуинтервале  $[c_l - c_1; \infty)$  равна константе следует, что функция  $h(t)$  ограничена на полуинтервале

$[0; \infty)$  и имеет максимум и минимум.

$$\max_h = \max_{t \geq 0} \{h(t)\} \quad (14)$$

$$\min_h = \min_{t \geq 0} \{h(t)\} \quad (15)$$

Если  $\min_h = \max_h$ , положим  $\min_h = 0$ , а  $\max_h = 1$ .

Пусть

$$w = \frac{c_2 - c_1}{\max_h - \min_h}$$

Определим функцию  $h_1(t)$ .

$$h_1(t) = h(t + \min_h) - \min_h \quad (16)$$

$$h_1(t) = \begin{cases} t, & \text{если } t \leq 0 \\ c(t), & \text{если } t > 0, \text{ где } 0 \leq c(t) \leq \max_h - \min_h \end{cases}$$

Подставим функцию  $h_1(t)$  в функцию  $g_1(t)$ .

$$h_2(t) = g_1(w \cdot h_1(t)) \quad (17)$$

$$h_2(t) = \begin{cases} A \cdot t, & \text{если } t \leq 0 \\ 0, & \text{если } t \geq 0, \end{cases}$$

Из полученной функции  $h_2(t)$  легко получить функцию  $|t|$ .

$$|t| = \frac{2}{A} \cdot (h_2(t) - \frac{A}{2} \cdot t) \quad (18)$$

■

**Следствие 1.** Из теоремы 3 следует, что функцию  $|x|$  можно получить из произвольной функции не принадлежащей классу  $CFP$ . Причем нелинейная глубина и сложность равна двум.

Мы выделяем функцию  $|x|$  так, как она является удобной для построения произвольной двуместной кусочно-линейной непрерывной функции.

Обозначим через  $CPL^{(1)}$  - все кусочно-линейные непрерывные функции зависящие от одной переменной.

**Теорема 4.** Пусть  $M \subseteq CPL$ .  $CPL^{(1)} \subseteq [M \cup L] \Leftrightarrow M \not\subseteq CFP$ .

Данная теорема была сформулирована и доказана в работе [3]. Из теоремы следует что все одноместные кусочно-линейные непрерывные функции выражаются через модуль и линейные функции. Следующая теорема утверждает что все двуместные кусочно-линейные непрерывные функции также выражаются через модуль и линейные функции.

**Теорема 5.** Пусть  $M \subseteq CPL$ .  $CPL^{(2)} \subseteq [M \cup L] \Leftrightarrow M \not\subseteq CFP$ .

**Доказательство.**

Определим следующие функции.

$$\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2} \quad (19)$$

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2} \quad (20)$$

$MM = \{\min, \max\} \subset CPL$ .

Пусть  $f \in CPL^{(2)}$  задается гиперплоскостями (прямыми)  $l_1, \dots, l_k$ . Данные прямые разбивают плоскость  $\mathbb{R}^2$  на классы эквивалентности  $R_1, \dots, R_s$ . Выберем произвольную прямую  $l_i$  и рассмотрим все тройки

$(R_+, R_0, R_-)$ , где  $R_+, R_0, R_- \in \{R_1, \dots, R_s\}$  смежные с прямой  $l_i$  и таких, что вектор сигнатуры для  $R_+$  не имел нуля [1]. Без ограничения общности можно считать что  $f_{R_+} = f_{R_0}, \forall (R_+, R_0, R_-)$  (следует из определения класса  $CPL$ ). Прономеруем все тройки  $(R_+, R_0, R_-)_j, j = 1..w$  "слева направо" относительно прямой  $l_i$ . Рассмотрим первую тройку  $(R_+, R_0, R_-)_1$ . Положим

$$l_{-,i,1} = f_{R_-} - f_{R_0} \quad (21)$$

$$f_{i,1} = f - m(0, l_{-,i,1}) \quad (22)$$

где  $m \in MM$ . если  $l_{-,i,1} > 0$  на  $R_-$ , то  $m = \max$ . В противном случае  $m = \min$ .

Так как функция  $m(0, l_{-;i,1})$  меняет значение только в нижней части функции  $f$  относительно прямой  $l_i$ , то для тройки  $(R_+, R_0, R_-)_1$ , выполняется условие

$$f_{R_+} - f_{R_0} = 0 \text{ и } f_{R_-} - f_{R_0} = 0. \quad (23)$$

Функция  $m(0, l_{-;i,1})$  не добавляет новых задающих прямых к уже имеющимся.

Рассмотрим следующую тройку  $(R_+, R_0, R_-)_2$ . Если данная тройка отделена от предыдущей только одной прямой, то нетрудно видеть, что она тоже удовлетворяет условию (23). Если между текущей и предыдущей тройкой существует несколько разделяющих прямых, то существует класс эквивалентности  $R_c$ , который имеет общую границу с классом  $R_-$  и имеет одну общую точку с прямой  $l_i$ . Тогда положим:

$$l_{-;i,2} = f_{R_-} - f_{R_0} \quad (24)$$

$$l_{R_c;i,2} = f_{R_c} - f_{R_0} \quad (25)$$

$$f_{i,2} = f_{i,1} - b_{i,2} \quad (26)$$

где  $b_{i,2} = m_1(0, m_2(l_{-;i,2}, l_{R_c;i,2}))$ ,  $m_1, m_2 \in MM$ . Если  $l_{-;i,1} > 0$  на  $R_-$ , то  $m_1 = \max, m_2 = \min$ . В противном случае  $m_1 = \min, m_2 = \max$ .

Функция  $b_{i,2}$  меняет значение только в нижней части функции  $f$  относительно прямой  $l_i$ . При этом не меняет значение функции на предыдущих тройках  $(R_+, R_0, R_-)$ . Функция  $b_{i,2}$  не добавляет новых задающих прямых. Тогда для тройки  $(R_+, R_0, R_-)_2$ ,  $f_{R_+} - f_{R_0} = 0$  и  $f_{R_-} - f_{R_0} = 0$ . И так далее  $\forall (R_+, R_0, R_-)_j, j = 1..w$  получим что  $f_{R_+} - f_{R_0} = 0$  и  $f_{R_-} - f_{R_0} = 0$ , а следовательно переход через прямую  $l_i$  тривиален и функцию  $f_{i,w}$  можно задать прямыми  $l_1, \dots, l_{i-1}, l_{i+1}, \dots, l_k$ .

Повторив эту процедуру для каждой прямой  $l_1, \dots, l_k$  получим что конечная функция задается пустым множеством прямых. Это означает что переход через любую прямую тривиален и конечная функция линейна [1]. Следовательно любую функцию из  $CPL^{(2)}$  можно получить из функции  $|x|$  и линейных функций используя операции суперпозиции.



**Следствие 2.** *Из теоремы 5 следует, что произвольную двуместную кусочно-линейную непрерывную функцию можно получить из модуля и линейных функций по операциям суперпозиции. Причем нелинейная глубина не превышает четырех, а нелинейная сложность асимптотически равна  $O(n^2)$ , где  $n$  это количество задающих прямых.*

## Список литературы

- [1] Половников В.С. «Об оптимизации структурной реализации нейронных сетей». Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук. Москва 2007.
- [2] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. «Введение в теорию автоматов». Издательство «Наука», Москва, 1985 г. 1-320 стр.
- [3] Самсонова Н.А. «Класс кусочно-линейных непрерывных функций». Бакалаврская работа. Якутск 2015.
- [4] Кан А.Н. «Вопросы выразимости в классе нейронных функций с памятью». Бакалаврская работа. Ташкент 2014.

# Анализ цифровых изображений на основе формализма теории многих взаимодействующих частиц

В.А. Микин, С.С. Постнов, Е.В. Смирнов

В данной работе предложена модель цифрового изображения как динамической системы взаимодействующих частиц. На основе этой модели построен алгоритм анализа цифровых изображений. Исследован характер преобразования изображений в зависимости от типа потенциала взаимодействия и основных параметров модели.

**Ключевые слова:** цифровое изображение, потенциал взаимодействия, теория многих частиц, визуальная разборчивость изображений.

## Введение

Идея рассмотрения цифрового изображения как ансамбля частиц и построения алгоритмов его анализа и обработки на основе формализма теории многих частиц уже обсуждалась в литературе. Одним из ярких примеров здесь являются диффузионные модели изображений [1], в которых изображение рассматривается как система диффундирующих частиц – пикселов, имеющих некоторую универсальную характеристику (массу или концентрацию), определяемую их яркостью. В ряде работ было показано, что в ходе эволюции такой системы, определяемой уравнением диффузии, происходит частичная реставрация изображения и/или его сегментация и оконтуривание различных областей [1, 2, 3]. Аналогичные эффекты наблюдаются в моделях на основе гиббсовских случайных полей

или моделей стохастической динамики [4, 5]. Однако следует отметить следующую особенность упомянутых здесь моделей. В них при описании цифрового изображения исходно дискретная система пикселей (частиц) сначала представляется как непрерывная: уравнения, задающие ее эволюцию, строятся для интегральных макроскопических величин. Затем эти уравнения решаются численно, для чего проводится дискретизация и построение расчетной схемы, как правило, весьма сложной и вносящей свои погрешности в результаты вычислений. Кроме того, в большинстве упомянутых выше моделей частицы рассматриваются как взаимодействующие исключительно посредством случайных упругих соударений, что и выражается в зависимости силы взаимодействия от градиента концентрации. В моделях на основе гиббсовских случайных полей рассматривается динамика макрообъектов, описывающих целевые образы на изображении.

В настоящей работе предлагается несколько иная реализация описанной выше идеи – рассмотрение цифрового изображения как ансамбля попарно взаимодействующих частиц с потенциалом взаимодействия, зависящим от характеристик частиц и межчастичного расстояния. При этом для исходно дискретной системы потенциал межчастичного взаимодействия задается явно и на его основе формулируются дискретные правила эволюции. Это не только заметно снижает общую трудоемкость реализации алгоритма и обработки изображений с его помощью, но и избавляет от дополнительных вычислительных ошибок (связанных, главным образом, с округлением и интерполяцией), вносимых переходами между дискретным и непрерывным представлением. Следует отметить, что такой подход созвучен модели цифрового изображения как дискретного многообразия, разработанной В.Н. Козловым [6, 7] и ориентированной на изучение «статических» (геометрических, топологических) характеристик и особенностей изображения. Предлагаемый в данной работе подход может, в принципе, рассматриваться как «динамическое обобщение» данной модели. На основе предложенного подхода в работе строится алгоритм преобразования исходного изображения. На тестовых примерах изучаются особенности работы данного алгоритма.

## Модель цифрового изображения

Каждый пиксел изображения представляется частицей, имеющей некоторую универсальную характеристику, в дальнейшем называемую массой, равную

$$m_i = I_0 - I_i, \quad (1)$$

где  $I_i$  – яркость  $i$ -го пиксела,  $I_0$  – максимальное значение яркости (верхняя граница яркостного диапазона, например, 255). Согласно формуле (1) наибольшей массой будет обладать пиксел черного цвета, которому в стандартной шкале полутонов соответствует нулевое значение яркости. Далее предполагается, что представляющие интерес элементы изображения (в дальнейшем именуемые объектами интереса) состоят из более тяжелых, «темных», пикселов, чем остальные элементы и фон изображения.

Взаимодействие между частицами считается попарным (двухчастичным), притягивающим и задается потенциалом межчастичного взаимодействия  $U(\vec{r})$ , где  $\vec{r}$  – межчастичное расстояние. Последний может быть финитного или инфинитного типа (1). Потенциал финитного типа обуславливает существование в системе взаимодействующих частиц области эффективного взаимодействия – диапазона значений межчастичного расстояния, в котором частицы взаимодействуют заметным образом и за пределами которого данное взаимодействие асимптотически или резко исчезает. Инфинитный потенциал обуславливает взаимодействие частиц, сила которого монотонно спадает с расстоянием. Следует отметить, что для системы пикселов в данной работе межчастичное расстояние понимается как расстояние между центрами частиц, т.е. для соседних пикселов расстояние между ними будет равно 1 пикселу.

В случае инфинитного потенциала взаимодействие определяется массами частиц и расстоянием между ними. В случае финитного потенциала взаимодействия, помимо масс частиц и расстояния между ними, важным параметром является характерный размер области локализации потенциала (в дальнейшем – области взаимодействия), который должен выбираться, исходя из условий решаемой задачи, и согласовываться с характерным размером объектов интереса на анализируемом изображении. Следует также отметить, что в случае финитного потенциала рассматриваются недеформируемые частицы: потенциал взаимодействия характеризуется очень

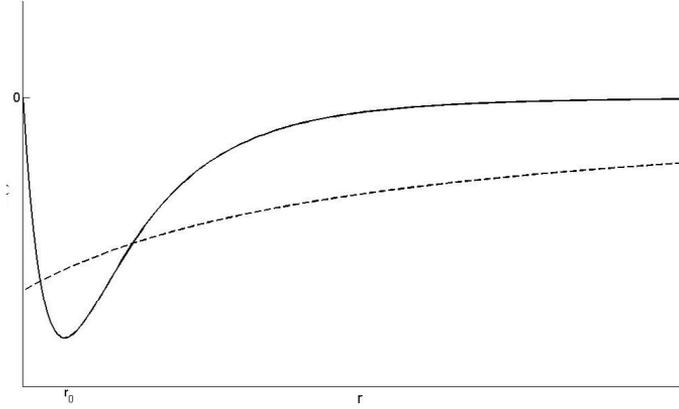


Рис. 1: Общий вид финитного (сплошная линия) и инфинитного (пунктирная линия) потенциала межчастичного взаимодействия.

быстрым асимптотическим ростом при стремлении межчастичного расстояния к нулю.

Взаимодействие пары частиц в рамках обсуждаемой модели может быть описано следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{ij} &= -\nabla U(\vec{r}) = Gm_i m_j f(r) \frac{\vec{r}}{r}, \\ \vec{a}_i &= \frac{\vec{F}_{ij}}{m_i}, \\ \Delta \vec{r}_i &= \frac{\vec{a}_i \Delta t^2}{2},\end{aligned}\tag{2}$$

где  $G$  – константа взаимодействия (которую можно положить равной 1),  $m_i$  и  $m_j$  – массы взаимодействующих частиц (значения яркости соответствующих пикселей),  $f(r)$  – функция, описывающая зависимость потенциала от межчастичного расстояния  $r = |\vec{r}|$ ,  $\vec{F}_{ij}$  – сила межчастичного взаимодействия,  $\Delta \vec{r}_i$  – потенциальное перемещение  $i$ -й частицы,  $\vec{a}_i$  – потенциальное ускорение приобретаемое  $i$ -ой частицей под действием силы  $\vec{F}_{ij}$ ,  $\Delta t$  – шаг по времени.

Первое из уравнений системы (2) представляет собой известное следствие теоремы Гельмгольца в теории поля [8], позволяющее вычислить силу взаимодействия (для потенциальных сил) через потенциал взаимодействия. Второе следует из закона изменения

импульса (второй закон Ньютона в классической механике). Третье уравнение представляет собой перемещение  $i$ -й частицы под действием силы  $\vec{F}_{ij}$ , вычисленное на основе второго уравнения в предположении постоянства ускорения этой частицы.

Следует отметить, что в данном случае величины, описывающие динамику частиц (перемещение и ускорение), носят потенциальный или фиктивный (виртуальный) характер и в описанном ниже алгоритме анализа изображения происходит не перемещение частиц (пикселей изображения), а перераспределение массы между ними. Это позволяет избежать необходимости использовать округление при работе с перемещениями, эквивалентными дробному числу пикселей.

Тип потенциала взаимодействия фактически определяет характер динамики системы частиц-пикселей. В случае инфинитного потенциала наиболее существенным будет взаимодействие близко расположенных массивных частиц. При этом сила взаимодействия и характерные приращения яркости пикселей, вычисляемые в соответствии с ее величиной, будут достаточно плавно зависеть от расстояния. Здесь, в принципе, возможны следующие нежелательные ситуации: 1) когда взаимодействие двух «легких» близкорасположенных частиц будет сильнее, чем взаимодействие двух массивных частиц, разнесенных на большее расстояние; 2) когда взаимодействие близкорасположенных частиц «средней» яркости окажется слабее, чем их взаимодействие с «тяжелой» частицей, расположенной на значительном расстоянии от них. Данные ситуации нежелательны, поскольку могут привести к появлению на изображении артефактов, таких как агрегация элементов разных образов, нарушение их контуров, формы и местоположения.

Чтобы избежать подобных нежелательных эффектов можно использовать локализацию взаимодействия: применять финитный потенциал взаимодействия или рассматривать инфинитный потенциал, заданный в некоторой области (окне) и равный нулю за ее пределами. При этом размер упомянутого окна, как и размер области взаимодействия для финитного потенциала, будет определять характерный масштаб расстояний, на котором частицы эффективно взаимодействуют, и характерный размер образов на изображении и расстояний между ними.

В случае финитного или локализованного инфинитного потенциала существенным образом взаимодействовать будут только части-

цы, расположенные в области взаимодействия. При этом достаточно массивные («черные») частицы будут взаимодействовать наиболее сильно, а частицы расположенные за пределами области взаимодействия, даже при их большой массе, будут взаимодействовать очень слабо. В обоих случаях (финитного и инфинитного потенциалов) в ходе эволюции системы тяжелые частицы будут группироваться, а одиночные частицы будут притягиваться к таким скоплениям массивных частиц, что будет приводить к выделению характерных контуров изображения, практически не затрагивая фон. Различным при этом будет характер группировки: либо более равномерное (по области) стягивание тяжелых частиц, часто сопровождающееся потерей детальности изображения, в случае инфинитного потенциала взаимодействия, либо более локальная группировка, происходящая в малых областях и приводящая к повышению резкости и контрастности элементов изображения без потери детальности в случае финитного потенциала.

## **Алгоритм обработки цифровых изображений**

### **Общие замечания**

На основе моделирования динамики многочастичной системы в соответствии с системой уравнений (2) можно построить алгоритм преобразования (обработки) цифровых изображений.

В начальный момент, при поступлении на вход алгоритма первичного изображения, происходит инициализация системы: всем пикселям присваиваются значения массы в соответствии с формулой (1). Далее запускается эволюция системы: выбирается скользящее окно и в нем относительно центральной частицы (центрального пикселя) с помощью системы уравнений (2) рассчитываются потенциалы и силы взаимодействия с другими частицами.

В случае инфинитного потенциала скользящее окно вводится как в целях локализации взаимодействия (см. выше), так и исходя из соображений снижения вычислительных затрат, фактически задавая эффективную область взаимодействия и число частиц, взаимодействие между которыми считается значимым. При этом эффективный потенциал взаимодействия становится кусочно-непрерывным, а размер скользящего окна должен согласовываться с характерным размером объектов интереса на изображении.

В случае финитного потенциала введение скользящего окна более естественно, т.к. соответствует концепции короткодействия, а его размер при этом связан с размером области взаимодействия. Эта связь, в принципе, может задаваться по-разному. Ниже изложен один из возможных способов.

### **Выбор размера скользящего окна в случае финитного потенциала взаимодействия**

В случае, когда фон однороден, изображение можно рассматривать как среду, обладающую некоторой постоянной плотностью  $\rho$ . Тогда характерный радиус взаимодействия в данной среде будет определяться следующим образом:

$$r_0 = C\rho^{-1/2},$$
$$\rho = \frac{M}{S},$$

где  $S$  – площадь изображения,  $M$  – суммарная масса (яркость) пикселей изображения,  $C$  – некоторая константа. В силу дискретности модели необходимо ограничить минимальный радиус взаимодействия значением в 1 пиксел. В зависимости от решаемой задачи и типа исследуемого изображения данный порог может повышаться. Значение константы  $C$ , необходимое для нормировки вычисляемого радиуса взаимодействия на его заданное минимальное значение, может быть получено из условия:

$$C = \rho_{max}^{-1/2} R_{min},$$

где  $R_{min}$  – минимальный радиус взаимодействия, а  $\rho_{max}$  – максимальное значение плотности.

Вычисляемый описанным выше образом радиус взаимодействия может быть принят за размер скользящего окна. В случае, когда характерные особенности обрабатываемого изображения имеют протяженный характер, уместно выбирать скользящее окно анизотропным – имеющим различные вертикальный и горизонтальный размеры.

### **Алгоритм перераспределения яркости пикселей**

Как отмечалось выше, в силу малости выбираемого шага по времени  $\Delta t$  и изначальной дискретности модели потенциальное малое

(меньше размера пиксела) перемещение частицы  $\Delta\vec{r}$  проявляется в "перетекании" определенной части массы от одной частицы к другой (изменении яркости пикселов). Это избавляет от необходимости производить сдвиги частиц на дробное число пикселов, заменив их перераспределением массы (яркости) между пикселами. Направление, в котором происходит передача массы от центральной частицы к другим, и величина этой массы определяются по формуле:

$$\Delta\vec{m}_i = m_i\Delta\vec{r}_i,$$

где  $\Delta\vec{r}_i$  – потенциальное перемещение, определяемое на основании системы уравнений (2). Более подробно: масса  $\Delta m_i = |\Delta\vec{m}_i|$ , переходящая от центральной частицы, распределяется между ее соседями в соответствии со следующими соотношениями (верхний индекс у распределения массы соответствует временному параметру – номеру итерации):

$$\begin{aligned} m_i &= M^t(x, y) \equiv M_{pq}^t; \\ k &= \begin{cases} 1, & \Delta x_i \geq 0, \\ -1, & \Delta x_i < 0, \end{cases} \quad l = \begin{cases} 1, & \Delta y_i \geq 0, \\ -1, & \Delta y_i < 0, \end{cases} \\ \Delta x_i > \Delta y_i : & \begin{cases} M_{p+k, q}^{t+1} = M_{p+k, q}^t + \left(1 - \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right) \Delta m_i, \\ M_{p+k, q+l}^{t+1} = M_{p+k, q+l}^t + \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \Delta m_i, \end{cases} \\ \Delta x_i < \Delta y_i : & \begin{cases} M_{p, q+l}^{t+1} = M_{p, q+l}^t + \left(1 - \frac{\Delta x_i}{\Delta y_i}\right) \Delta m_i, \\ M_{p+k, q+l}^{t+1} = M_{p+k, q+l}^t + \frac{\Delta x_i}{\Delta y_i} \Delta m_i, \end{cases} \\ \Delta x_i = \Delta y_i : & M_{p+k, q+l}^{t+1} = M_{p+k, q+l}^t + \Delta m_i. \end{aligned} \quad (3)$$

К системе (3) следует добавить условие преобразования массы центральной частицы. Здесь возможны два основных варианта – ее сохранение или сохранение суммарной массы частиц в процессе взаимодействия (выполнение закона сохранения массы). Соответственно, в первом случае упомянутое условие запишется в виде

$$M^{t+1}(x, y) = M^t(x, y),$$

а во втором – в виде

$$\sum_{i,j} M^{t+1}(x_i, y_j) = \sum_{i,j} M^t(x_i, y_j),$$

где суммирование подразумевается по всем точкам скользящего окна, в котором производится перераспределение массы. Следует отметить, что в случае несохранения массы каждая частица является, по сути, точечным источником массы.

После того как в данном скользящем окне произведено перераспределение массы в соответствии с вычисленными величинами добавок, окно сдвигается на один пиксел, и описанная процедура повторяется. После прохода всего изображения такт работы считается завершенным. Далее процедура повторяется итерационно до достижения наилучшего по выбранным критериям результата.

## Методика исследования работы алгоритма на тестовых изображениях

Для программной реализации построенного выше алгоритма обработки в качестве потенциалов взаимодействия были выбраны инфинитный кулоновский потенциал, в котором зависимость от межчастичного расстояния задается как

$$f(r) = \pm \frac{r_0}{r}$$

и финитный потенциал типа Юкавы, для которого

$$f(r) = \pm \frac{\exp(-r_0/r)}{r}.$$

При этом знак  $+$  в формулах соответствует притяжению частиц (пикселов), а знак  $-$  – отталкиванию.

Оценка результата работы алгоритма производилась на основе анализа изменения ряда количественных характеристик изображения, а также на основе анализа изменений гистограммы изображения. Под количественными характеристиками изображения подразумевались оценки среднего (по изображению) отношения сигнал/шум, средней минимальной и максимальной дисперсий яркости и средней контрастности изображения. Вычисление данных величин проводилось на основе локальных статистик изображения [9]: изображение разбивалось равномерной сеткой на ячейки порядка  $20 \times 20$  пикселов, в каждой из которых вычислялись оценки дисперсии яркости пикселов (в предположении статистической независимости сигнальных и шумовых составляющих изображения). Среди этих

величин затем определялись максимальная и минимальная в каждом вертикальном или горизонтальном ряду и усреднением по числу рядов вычислялись оценки средних минимальной и максимальной дисперсий,  $D_{min}$  и  $D_{max}$ . Данные величины фактически характеризуют соответственно степень неоднородности фона изображения и степень отличия информативных компонент изображения от фона. На основе этих величин вычислялась оценка среднего отношения сигнал/шум:

$$\sigma = \sqrt{\frac{D_{max}}{D_{min}} - 1}.$$

Оценка средней контрастности  $c$  вычислялась как значение контрастности, усредненное по всем ячейкам сетки.

В качестве исходных данных для исследования был выбран ряд тестовых изображений (рис. 2-4) представляют собой фрагменты изображений из открытой базы TID2008. В ходе исследования размеры скользящего окна подбирались автоматически на основе построенного и описанного выше алгоритма. Количество итераций обработки и параметры потенциала подбирались индивидуально в зависимости от типа изображений. Полученные результаты приводятся ниже.



Рис. 2: Тестовое изображение 1.

## Результаты исследования

На рис. 5-7 показаны результаты обработки тестового изображения. Минимальный радиус взаимодействия во всех случаях выби-

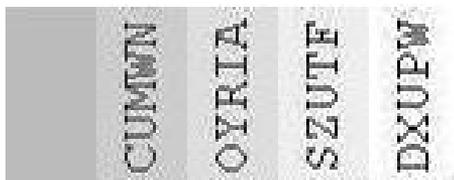


Рис. 3: Тестовое изображение 2.



Рис. 4: Тестовое изображение 3.

рался равным одному пикселу, а размер окна, в котором проводилось перераспределение массы был выбран равным  $3 \times 3$ . Изображения на рис. 5 и 6 получены в результате одноэтапной обработки с различным типом потенциала и параметрами алгоритма. На рис. 7 приведен результат двухэтапной обработки: при выборе финитного потенциала в режиме несохранения массы: сначала 5 итераций с отталкивающим потенциалом и шагом  $\Delta t = 2 \times 10^{-4}$ , затем 2 итерации с притягивающим потенциалом и шагом  $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$ . В табл. 1-3 приведены количественные характеристики изображений в процессе обработки (нулевая итерация соответствует исходному изображению, рис. 2, а последняя итерация соответствует результатам обработки, представленным на рис. 5-7).

Из рис. 5-7 и табл. 1-3 видно, что в результате обработки повышается среднее отношение сигнал-шум и средняя контрастность изображения. Кроме того, если в случае одноэтапной обработки



Рис. 5: Результат обработки тестового изображения 1 при выборе финитного притягивающего потенциала в режиме несохранения массы после 5 итераций с шагом  $\Delta t = 2 \times 10^{-4}$ .

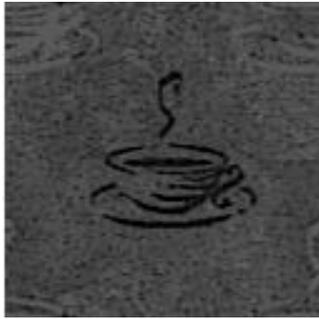


Рис. 6: Результат обработки тестового изображения 1 при выборе инфинитного притягивающего потенциала в режиме несохранения массы после 4 итераций с шагом  $\Delta t = 2 \times 10^{-4}$ .

Таблица 1

№итерации	$\sigma$	$c$	$D_{min}$	$D_{max}$	Взаимодействие	Шаг
0	3,717	0,212	14,243	195,595	-	-
1	3,918	0,232	16,573	250,980	Притяжение	$2 \times 10^{-4}$
2	4,218	0,256	19,008	331,166	Притяжение	$2 \times 10^{-4}$
3	4,575	0,285	21,803	444,828	Притяжение	$2 \times 10^{-4}$
4	4,734	0,386	25,928	565,884	Притяжение	$2 \times 10^{-4}$
5	4,606	0,408	31,215	648,514	Притяжение	$2 \times 10^{-4}$

(рис. 5 и 6) средняя минимальная дисперсия увеличивается, то при двухэтапной обработке (рис. 7) она остаётся примерно на исходном



Рис. 7: Результат двухэтапной обработки тестового изображения 1 при выборе финитного потенциала в режиме несохранения массы.

Таблица 2

№итерации	$\sigma$	$c$	$D_{min}$	$D_{max}$	Взаимодействие	Шаг
0	3,717	0,212	14,243	195,595	-	-
1	4,005	0,236	16,934	266,969	Притяжение	$2 \times 10^{-4}$
2	4,372	0,269	20,326	379,951	Притяжение	$2 \times 10^{-4}$
3	4,704	0,378	24,750	533,723	Притяжение	$2 \times 10^{-4}$
4	4,623	0,408	30,814	644,515	Притяжение	$2 \times 10^{-4}$

Таблица 3

№итерации	$\sigma$	$c$	$D_{min}$	$D_{max}$	Взаимодействие	Шаг
0	3,717	0,212	14,243	195,595	-	-
1	3,671	0,224	12,282	165,695	Отталкивание	$2 \times 10^{-4}$
2	3,665	0,235	10,817	146,084	Отталкивание	$2 \times 10^{-4}$
3	3,632	0,245	9,787	130,813	Отталкивание	$2 \times 10^{-4}$
4	3,582	0,255	9,059	118,680	Отталкивание	$2 \times 10^{-4}$
5	3,527	0,092	8,497	108,915	Отталкивание	$2 \times 10^{-4}$
6	4,025	0,303	10,703	174,300	Притяжение	$5 \times 10^{-4}$
7	4,749	0,359	14,058	313,563	Притяжение	$5 \times 10^{-4}$

уровне. В целом, контуры на изображении становятся более резкими и визуально отличимыми от фона. Структура фона при этом также "обостряется" в случае одноэтапной обработки и, напротив, "размывается" при двухэтапной обработке.

Построенный в данной работе подход оказывается применим и в за-

даче выделения локальных особенностей изображения при работе с его искусственно «зашумлённой» версией. Как показали эксперименты, наилучший эффект при этом достигается, если предварительно снизить неоднородность фона, применив одну из сглаживающих процедур.

На рис. 8-11 приведены примеры обработки тестовых изображений, приведённых на рис. 3-4 в случае, когда эти изображения подверглись искусственному "зашумлению" аддитивным белым гауссовым шумом с дисперсией 20%. В качестве предварительной сглаживающей процедуры применялся гауссов фильтр размытия с апертурой  $3 \times 3$ . В табл. 4-5 представлена динамика количественных характеристик изображений в процессе обработки. Видно, что производимая обработка позволяет увеличить среднее отношение сигнал-шум и контрастность, приводя к снижению неоднородности фона и усилению локальных особенностей изображения.

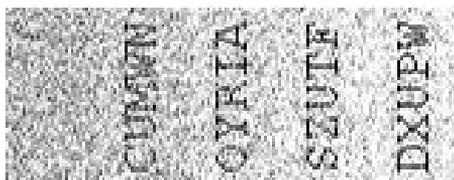


Рис. 8: Результат искусственного "зашумления" тестового изображения 2.

## Анализ результатов

По сути своей предлагаемый подход является разновидностью локальной нелинейной обработки (фильтрации) изображений, чувствительной к отличиям в яркости пикселей. Как было показано в ходе экспериментов, предложенный метод работает лучше всего на изображениях, с однородным или "квазиоднородным" фоном: распределение яркости по пикселям изображения близко к гауссовому. Из приведённых экспериментальных результатов видно, что применение предложенного в работе алгоритма позволяет повысить

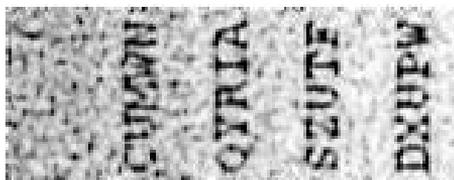


Рис. 9: Результат обработки искусственно "зашумлённого" тестового изображения 2.



Рис. 10: Результат искусственного "зашумления" тестового изображения 3.



Рис. 11: Результат обработки искусственно "зашумлённого" тестового изображения 3.

Таблица 4

№итерации	$\sigma$	$c$	$D_{min}$	$D_{max}$	Взаимодействие	Шаг
0	2,743	0,188	822,234	6615,242	-	-
1	3,892	0,149	138,532	2027,963	Притяжение	$2 \times 10^{-4}$
2	4,388	0,173	149,215	2733,813	Притяжение	$2 \times 10^{-4}$
3	4,773	0,172	161,492	3459,771	Притяжение	$2 \times 10^{-4}$
4	5,092	0,147	176,632	4248,211	Притяжение	$2 \times 10^{-4}$
5	5,286	0,158	194,540	4969,929	Притяжение	$2 \times 10^{-4}$
6	5,308	0,220	216,149	5470,804	Притяжение	$2 \times 10^{-4}$

Таблица 5

№итерации	$\sigma$	$c$	$D_{min}$	$D_{max}$	Взаимодействие	Шаг
0	1,594	0,057	1366,291	4803,610	-	-
1	3,798	0,116	190,979	2765,545	Притяжение	$5 \times 10^{-4}$
2	3,598	0,421	271,894	3531,158	Притяжение	$5 \times 10^{-4}$

визуальную разборчивость изображения, заметно увеличивая контрастность и отношение сигнал-шум. Здесь следует отметить, что с увеличением числа итераций может наступать насыщение указанных характеристик, связанное с достижением большинством точек изображения граничных значений яркости в заданном динамическом диапазоне.

Как показали результаты обработки тестовых примеров, предложенный алгоритм в гораздо меньшей степени затрагивает фон изображения, избирательно влияя на его структурные особенности.

Следует отметить также существенное отличие работы построенного алгоритма от обычного контрастирования. Контрастирование – по сути изменение соотношений яркостей (масс, если пользоваться терминологией обсуждаемой модели), т.е. «тяжелые» частицы при этом станут более "тяжелыми а "лёгкие" – более "лёгкими". Кроме того, при вычислении контраста для частицы (пиксела) не учитываются ни её положение, ни взаимодействия с соседними частицами. Продолжая аналогию можно сказать, что предложенный метод является процедурой нелинейного локально-адаптивного контрастирования. Адаптивность здесь обусловлена тем, что расчёт перераспределения яркостей (масс) производится в каждой локальной

области с учётом яркостей входящих в неё пикселей.

## Заключение

Таким образом, в работе предложена дискретная динамическая модель цифрового изображения как системы многих частиц с попарным взаимодействием. На основе данной модели предложен алгоритм цифровой обработки изображений, в котором на каждом такте эволюции динамической системы происходит перераспределение яркости пикселей по заданным правилам. Представлены примеры применения построенного алгоритма для обработки тестовых изображений. Показано, что такая обработка способна улучшить формальные показатели качества изображения, и в целом его визуальную разборчивость.

Проведенное исследование показало, что построенная методика обладает избирательным влиянием на крупномасштабные структурные особенности изображения при более слабом воздействии на фон.

Полученные в работе результаты позволяют говорить о возможности использования построенной методики для обработки, в частности, структуризации и реставрации, цифровых малококонтрастных изображений.

## Список литературы

- [1] *Perona P., Malik J.* Scale-Space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion // IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990, v. 12, no. 7, p. 629-639.
- [2] *Weickert J.* A review of nonlinear diffusion filtering. // Lecture Notes in Computer Science, 1997, v. 1252, p. 3-28.
- [3] *Борисенко Г.В., Денисов А.М., Крылов А.С.* Об одном диффузионном методе фильтрации и повышения резкости изображений // Программирование, 2008, № 5, с. 32-36.
- [4] *Descombes X., Zhizhina E.* The Gibbs fields approach and related dynamics in image processing // Condensed Matter Physics, 2008, v. 11, no. 2, p. 1-20.

- [5] *Descombes X., Minlos R.A., Zhizhina E.* Object extraction using stochastic birth-and-death dynamics in continuum // *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2009, v. 33(3), p. 347-359.
- [6] *Козлов В.Н.* Введение в математическую теорию зрительного восприятия. М.: изд-во Центра прикладных исследований механико-математического ф-та МГУ им. М.В. Ломоносова, 2007.
- [7] *Козлов В.Н.* Алгоритмы формирования системы взаимосвязанных образов. // *Интеллектуальные системы*, 2014, т. 18, вып. 2, с. 99-114.
- [8] *Мышкис А.Д.* Математика для ВТУЗов. Специальные курсы. М.: Наука, 1971.
- [9] *Young I.T., Gerbrands J.J., van Vliet L.J.* Fundamentals of Image Processing. Delft: Delft University of Technology, 1998.

# Метод оптимального нелинейного растяжения симметричных матриц в задачах распознавания

И. Л. Мазуренко, А. А. Петюшко

В данной работе рассматриваются матрицы самосравнения одномерного сигнала (в частности, речевого). Предлагается метод нелинейного растяжения этих симметричных матриц для нахождения оптимального расстояния между ними в смысле похожести сигналов.

**Ключевые слова:** одномерный сигнал, матрица самосравнения, нелинейное растяжение.

## Введение

Практический интерес представляет задача автоматического распознавания речевых команд. Традиционный подход решения этой задачи заключается в сравнении речевого сигнала с эталонами команд, фоном и т.п. Такое сравнение делается с помощью метода динамического программирования (см. [1] и [2]). Распространёнными подходами к реализации автоматического распознавания речи являются методы скрытых марковских моделей (см. [3] и [4]) и динамической деформации времени [5].

К недостаткам данных подходов относится их неустойчивая работа в условиях сильных, в том числе нестационарных и низкочастотных, шумов. В данной работе рассмотрен подход, позволяющий повысить надёжность традиционных алгоритмов распознавания. Кратко этот метод был упомянут в статье [6], в данной работе приводится его полное описание.

## Постановка задачи

К уже существующим методам распознавания предлагается добавить ещё один, вычисляющий некоторым образом функцию расстояния между звуковыми сигналами (командами), чтобы сократить перебор в словаре и повысить надёжность результатов распознавания в условиях нестационарного шума. Отметим, что поскольку предполагается использовать этот метод в связке с другими, то от него не требуется распознавания как такового, т. е. расстояние может быть маленьким не только для сигналов, соответствующих одной и той же команде, но и для разных команд.

Для увеличения надёжности распознавания предлагается применить метод динамического программирования для нахождения расстояния не между одномерными сигналами, а между матрицами их самосравнения.

Дадим конструктивное определение **матрицы самосравнения**  $S$  для одномерного сигнала  $s \in \mathbb{R}^N$ :

- 1) Сигнал разбивается на  $n$  окон одинаковой длины (возможно, частично перекрывающихся).
- 2) В каждом окне с номером  $i = 1 \dots n$  вычисляется вектор признаков  $v_i(s) \in \mathbb{R}^k$  (спектральных, кепстральных, коэффициентов линейного предсказания и т.п. — набор признаков выбирается в зависимости от конкретной реализации).
- 3) На основе некоторой меры близости  $\rho_k(.,.)$  (например, евклидовой метрики в пространстве  $\mathbb{R}^k$ ) вычисляется расстояние для каждой пары векторов из соответствующих окон.
- 4) На место  $(i, j)$  в матрице самосравнения заносится вычисленное в п. 3 расстояние между  $i$ -м и  $j$ -м вектором признаков:  
$$S(i, j) = \rho_k(v_i(s), v_j(s)).$$

Таким образом, для сигнала  $s$ , которому соответствуют  $n$  векторов признаков  $v_i(s)$  для  $i = 1 \dots n$ , получим матрицу самосравнения  $S$  размера  $n \times n$ .

Для примера прилагаются изображения команды "один" (Рис. 1) и ее матрицы самосравнения (Рис. 2; на рисунке более тёмные области соответствуют маленькому значению расстояния  $\rho_k(.,.)$ , а более светлые — наоборот, большому  $\rho_k(.,.)$ ).

На функцию расстояния между матрицами самосравнения сигнала налагаются следующие содержательные ограничения:

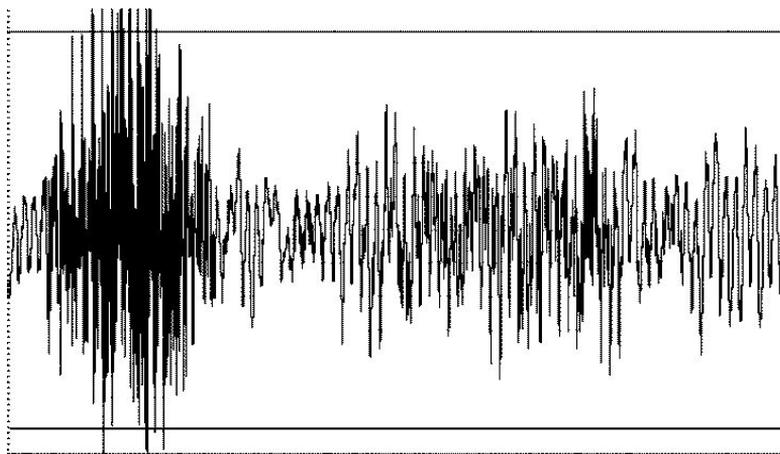


Рис. 1: Команда “один” в амплитудно-временной области

- 1) Расстояние инвариантно относительно изменения длины сигналов (и, как следствие, размеров квадратных матриц, которые мы сравниваем).
- 2) Полученная функция расстояния соответствует визуальной схожести матриц, определяемой человеком.
- 3) Расстояние между матрицами, являющимися самосравнениями произнесений одних и тех же команд, *в среднем не больше*, чем расстояние между матрицами из разных классов.
- 4) Описанное в п. В) условие “инвариантно” относительно сравниваемых пар классов. Это значит, что если у двух команд матрицы визуально разные, то и расстояния между этими матрицами должны быть в среднем большими, и наоборот: если у двух матриц из разных классов расстояние мало, то и матрицы самосравнения визуально похожи.
- 5) Желательно, чтобы вышеописанные требования выполнялись не только для матриц самосравнений сигналов с одним уровнем шума, но и для матриц, вычисленных по сигналам для разных уровней шума.

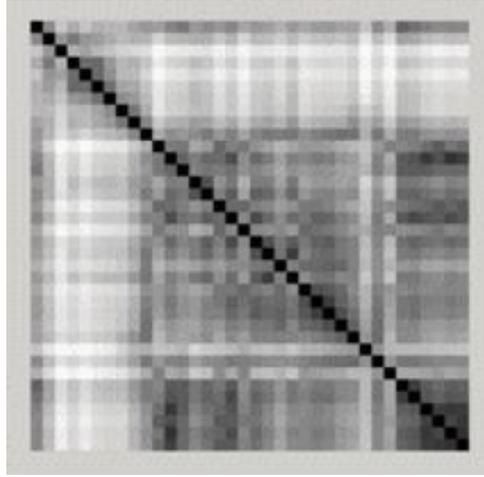


Рис. 2: Матрица самосравнения команды “odin”

## Описание метода

По аналогии с методом динамической деформации времени для одномерного сигнала, авторами статьи предлагается использовать метод нелинейного сжатия-растяжения матриц. Необходимость использования нелинейного преобразования состоит в том, что, как и в случае с одномерным сигналом, два произнесения последнего обычно находятся в нелинейном соответствии друг с другом (например, один звук растянут по времени в 1.5 раза, а другой, наоборот, сжат в 2 раза). Соответственно, и матрицы самосравнения одной команды также нелинейно зависят друг от друга.

Содержательно, необходимо таким образом увеличить две сравниваемые матрицы (будем именно *растягивать* матрицы) до одинакового размера, чтобы, с одной стороны, это растяжение минимизировало расстояние между этими матрицами, а с другой стороны, после растяжения можно было бы использовать некоторую функцию расстояния между матрицами одинаковой размерности.

Опишем процедуру для растяжения двух матриц самосравнения  $S_1, S_2$  (размера  $n_1 \times n_1$  и  $n_2 \times n_2$  соответственно) для нахождения расстояния между ними более строго. Для этого строится квадратная таблица — **таблица растяжений** (или **таблица пути**)  $R$  размера  $n_1 \times n_2$ , элементом  $(i, j)$  которой является пара: 1) последовательность растяжений  $Rp(i, j)$ , минимизирующая расстояние

между квадратными подматрицами, левый верхний угол которых совпадает с верхним левым углом для исходных матриц  $S_1, S_2$ , размера  $i \times i$  для  $S_1$  и  $j \times j$  для  $S_2$  соответственно, и 2) само это расстояние  $Rd(i, j)$  (см. Рис. 3).

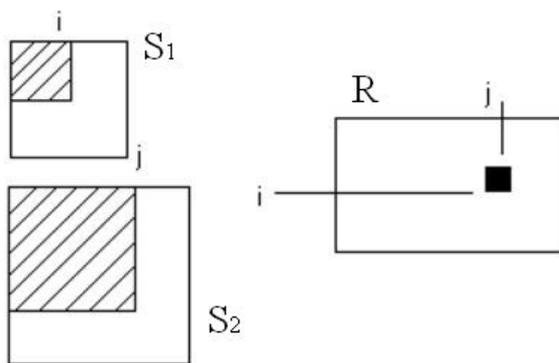


Рис. 3: Построение матрицы самосравнения

Отметим, что расстояние  $Rd(i, j)$  между квадратными подматрицами размера  $i \times i$  для  $S_1$  и  $j \times j$  для  $S_2$  — это действительное число, т. е.  $Rd(i, j) \in \mathbb{R}$ . Последовательность же растяжений  $Rp(i, j)$  — это упорядоченный набор пар  $Rp(i, j) = ((a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m))$  таких, что  $(a_1, b_1) = (1, 1)$ ,  $(a_m, b_m) = (i, j)$ , и  $(a_k, b_k) \neq (a_{k+1}, b_{k+1})$ , причём  $0 \leq a_{k+1} - a_k \leq 1$  и  $0 \leq b_{k+1} - b_k \leq 1$  для любого  $k = 1, \dots, m-1$ . Предположим, что мы используем меру близости  $f_k(\cdot, \cdot)$  для нахождения расстояния между двумя векторами размерности  $k$  (заметим, что в общем случае  $f_k(\cdot, \cdot)$  и  $\rho_k(\cdot, \cdot)$  — разные функции). Также будем использовать обозначения  $e_1, e_2, \dots$  для обозначения базисных векторов в многомерном пространстве. Тогда первая строка и первый столбец таблицы растяжений  $R$  формируются следующим

образом:

$$\begin{aligned}
 Rd(1, 1) &= f_1(S_1(1, 1), S_2(1, 1)), \\
 Rp(1, 1) &= (1, 1), \\
 Rd(1, k) &= f_k \left( S_1(1, 1) \sum_{i=1}^k e_i, \sum_{i=1}^k S_2(1, i) e_i \right) + Rd(1, k-1), \\
 k &= 2, \dots, n_2, Rp(1, k) = ((1, 1), \dots, (1, k)), \quad k = 2, \dots, n_2 \\
 Rd(m, 1) &= f_m \left( \sum_{i=1}^m S_1(1, i) e_i, S_2(1, 1) \sum_{i=1}^m e_i \right) + Rd(m-1, 1), \\
 m &= 2, \dots, n_1, Rp(m, 1) = ((1, 1), \dots, (m, 1)), \quad m = 2, \dots, n_1.
 \end{aligned}$$

Содержательно это значит, что левый верхний элемент матрицы  $S_1$  копируется на все координаты вектора длины  $k$ , и на место  $(1, k)$  таблицы  $R$  в качестве  $Rd$  заносится сумма расстояния между этим вектором и вектором такой же длины, являющемся началом  $k$ -ой строки второй матрицы  $S_2$  длины  $k$ , и числа  $Rd(1, k-1)$  из клетки слева (для первого столбца все аналогично с точностью до замены  $S_1$  на  $S_2$ ). Одновременно в каждую клетку  $R$  в качестве  $Rp$  заносится путь, по которому мы в неё пришли, т.е. последовательность таких пар чисел, в которых первое число отвечает за номер строки (или столбца, что то же самое, т.к. матрицы самосравнения симметричны) первой матрицы  $S_1$ , а второе — за номер строки (столбца) второй матрицы  $S_2$ .

Для остальных клеток таблицы растяжений используем следующую итеративную процедуру:

- 1) Пусть надо посчитать путь и расстояние для клетки с номером  $(i, j)$ . Предположим, что для всех других клеток с индексами  $(i_1, j_1)$  таких, что  $(i_1, j_1) \neq (i, j)$ ,  $1 \leq i_1 \leq i$ ,  $1 \leq j_1 \leq j$ , мы знаем  $Rp(i_1, j_1)$ ,  $Rd(i_1, j_1)$  (как заполнить первую строку и первый столбец, было показано выше).
- 2) Рассмотрим три соседние уже заполненные клетки: с индексами  $(i-1, j-1)$ ,  $(i, j-1)$  и  $(i-1, j)$ . Рассчитаем три значения  $d_{1,1}$ ,  $d_{0,1}$  и  $d_{1,0}$ , которые будут соответствовать расстоянию между квадратными подматрицами размера  $i \times i$  для  $S_1$  и  $j \times j$  для  $S_2$  при разных последовательностях растяжений этих подматриц, а именно:

- $d_{1,1}$ : одновременное растяжение на 1 клетку обеих подматриц  $S_1$  и  $S_2$ ,
  - $d_{0,1}$ : растяжение на 1 клетку только подматрицы  $S_2$ ,
  - $d_{1,0}$ : растяжение на 1 клетку только подматрицы  $S_1$ .
- 3) Для примера рассчитаем значение  $d_{1,1}$  ( $d_{0,1}$  и  $d_{1,0}$  рассчитываются аналогично). Пусть  $Rp(i-1, j-1) = (a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m)$ . Тогда, если обозначить через

$$v_1 = S_1(i, i)e_{m+1} + \sum_{k=1}^m S_1(i, a_k)e_k,$$

$$v_2 = S_2(j, j)e_{m+1} + \sum_{k=1}^m S_2(j, b_k)e_k,$$

то расстояние между квадратными подматрицами размера  $i \times i$  для  $S_1$  и  $j \times j$  для  $S_2$  при одновременном растяжении на 1 клетку обеих подматриц будет равно

$$d_{1,1} = Rd(i-1, j-1) + f_{m+1}(v_1, v_2).$$

Заметим, что с помощью такой процедуры расчёта значений расстояний между квадратными подматрицами разного размера мы учитываем все прошлые растяжения, которые были записаны в предыдущую клетку пути, и вариация происходит, по сути, только в выборе растяжения последней клетки (растягиваем обе подматрицы сразу на 1 клетку, или только одну подматрицу; предыдущая последовательность растяжений сохраняется).

- 4) Пусть  $\min(d_{1,1}, d_{0,1}, d_{1,0}) = d_{a,b}$ , где  $0 \leq a, b \leq 1$ . Тогда

$$Rd(i, j) = d_{a,b},$$

$$Rp(i, j) = (Rp(i-a, j-b), (i, j)).$$

В итоге в последней (правой нижней) ячейке таблицы растяжений мы получим путь  $Rp(n_1, n_2)$  — последовательность растяжений, которая минимизирует расстояние между матрицами самосравнения  $S_1, S_2$ .

Как следствие из вышеописанной процедуры нахождения оптимального растяжения симметричных матриц имеем следующую теорему:

**Теорема 1.** *Сложность алгоритма (в терминах количества операций взятия минимума и нахождения расстояния между векторами) нахождения оптимального растяжения двух симметричных матриц самосравнения  $S_1, S_2$  размеров  $n_1 \times n_1$  и  $n_2 \times n_2$  соответственно равна  $O(n_1 n_2)$ .*

Опишем процедуру построения растянутых матриц  $T_1, T_2$ , которые получаются применением последовательности растяжений  $Rp(n_1, n_2)$  к изначальным матрицам самосравнения  $S_1, S_2$ . Пусть  $Rp(n_1, n_2)$  содержит  $m$  пар индексов:  $Rp(n_1, n_2) = ((a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m))$ . Тогда матрицы  $T_1, T_2$  имеют одинаковый размер  $m \times m$  и их элементы определяются следующим образом ( $1 \leq i, j \leq m$ ):

$$\begin{aligned} T_1(i, j) &= S_1(a_i, a_j), \\ T_2(i, j) &= S_2(b_i, b_j). \end{aligned}$$

Напоследок заметим, что в качестве расстояния  $r(S_1, S_2)$  между симметричными матрицами самосравнения  $S_1, S_2$  предлагается брать не значение  $Rd(n_1, n_2)$ , а некоторую матричную норму  $g(\cdot)$  от разности растянутых матриц  $T_1, T_2$  одного размера:

$$r(S_1, S_2) = g(T_1 - T_2).$$

Такой матричной нормой может служить, например, матричная норма Фробениуса.

## Усовершенствование метода

Чтобы описанный выше метод удовлетворял поставленным нами содержательным ограничениям на функцию расстояния между матрицами  $r(\cdot, \cdot)$ , то можно, во-первых, в качестве расстояния между векторами  $f_k(\cdot, \cdot)$  брать взвешенную евклидовую метрику, т. е.

$$f_k(v_1, v_2) = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (v_1(i) - v_2(i))^2},$$

и, во-вторых, матричную норму делить на некоторый эквивалент длины оптимального пути — например, норму Фробениуса на площадь матрицы  $T_1 - T_2$  размера  $m \times m$ :

$$r(S_1, S_2) = \frac{g(T_1 - T_2)}{m^2}.$$

Эти соображения позволяют достичь инвариантности от размера как при вычислении расстояния между векторами (более длинные вектора не будут давать большее расстояние), так и при вычислении матричной нормы (большие матрицы не дадут большее расстояние, чем маленькие, при прочих равных).

При сравнении растянутых матрицы поэлементно (норма Фробениуса) мы считаем равноправными все пары окон звука внутри сигналов. На практике ситуация выглядит сложнее. Например, если произнесённое слово достаточно длинное, и в нем есть два одинаковых звука в начале и конце слова, то начало и конец слова могут произноситься по-разному хотя бы потому, что шумовой фон за это время успел измениться, или голос человека изменил окраску и т.п. Соответственно, при вычислении матрицы самосравнения может получиться так, что соответствующие этим звукам элементы матрицы имеют существенно разные значения.

Таким образом, возможно, что два одинаковых звука в одном слове могут произноситься по-разному. При этом мы хотим, чтобы два разных звука в одном и том же слове не могли быть близкими в смысле используемой меры близости.

Чтобы учесть это обстоятельство, в определении матричной нормы нами были введены дополнительно весовые коэффициенты, которые тем меньше, чем дальше по времени отстоят сравниваемые звуки друг от друга. Пусть симметричная матрица  $T$  с нулями на диагонали имеет размер  $n \times n$ . Тогда в качестве функции  $g(T)$  будем использовать:

$$g(T) = 2 \sqrt{\sum_{j < i}^n \left( T(i, j) \cdot \frac{j}{i} \right)^2}.$$

## Программная реализация метода

Описанный в работе метод был реализован в виде программной системы распознавания речевых сигналов в условиях шума. Реализованная система распознавания работает в реальном времени в операционной системе MS Windows ©.

Входные команды будут задаваться отдельными wav-файлами. Для вычисления параметров будем использовать: шаг анализа wav-файлов — 128 отсчётов; размер окна анализа — 512 (т. о., получаем

перекрытие в  $3/4$  окна); число коэффициентов линейного предсказания — 14; количество компонент спектра линейного предсказания — 256.

Пользователю предлагается выбрать как файл, содержащий первую команду, так и файл, содержащий вторую команду. Внешний вид программы при выборе файла команды изображён на Рис. 4.

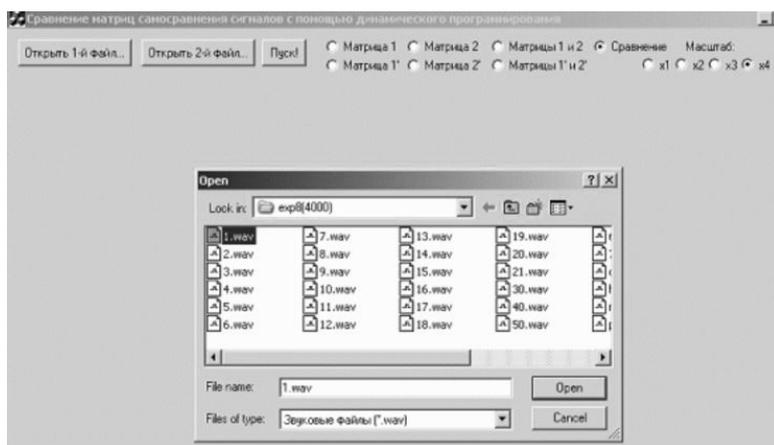


Рис. 4: Программный интерфейс

После загрузки файлов для обеих команд можно посмотреть и оценить близость двух матриц самосравнения (см. Рис. 5).

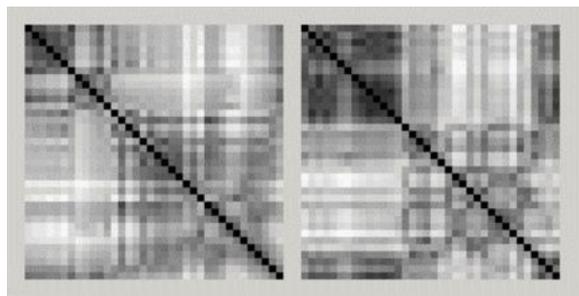


Рис. 5: Анализируемые матрицы самосравнения

После нажатия кнопки “Пуск!” программа вычисляет расстояние между матрицами (которое сразу выводится на экран — см. Рис. 6) и оптимальное растяжение матриц.

**Расстояние между картинками: 0.2415**

Рис. 6: Расстояние между матрицами самосравнения

Можно посмотреть на обе растянутые матрицы (см. Рис. 7 — как видно, поскольку изначально файлы были произнесением одной команды, то и растяжения практически нет), а также таблицу растяжений  $Rd$  с помеченным в ней минимизирующим путём (см. Рис. 8).

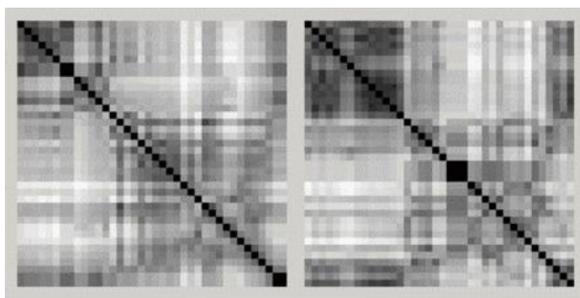


Рис. 7: Растянутые матрицы самосравнения

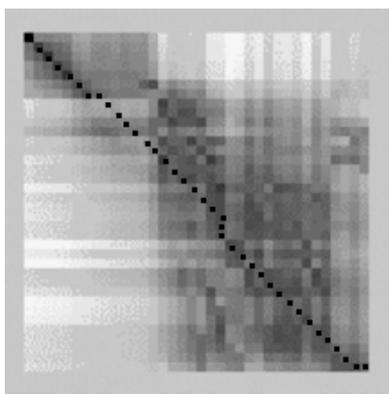


Рис. 8: Оптимальный путь в таблице растяжений

В данном случае использовались команды для слова “четыре”, записанные в автомобиле с 4000 и 800 оборотами двигателя в минуту соответственно. Для разных команд, например, “один” и “четыре”, получаются матрицы самосравнения, изображённые на Рис. 9, оп-

тимальным образом растянутые - на Рис. 10, расстояние между ними — 0.3128 (сравните с 0.2415).

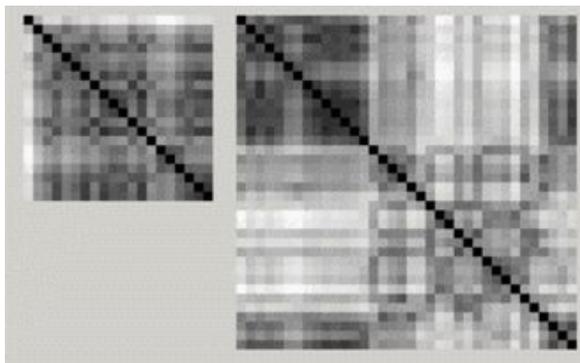


Рис. 9: Матрицы самосравнения для разных команд

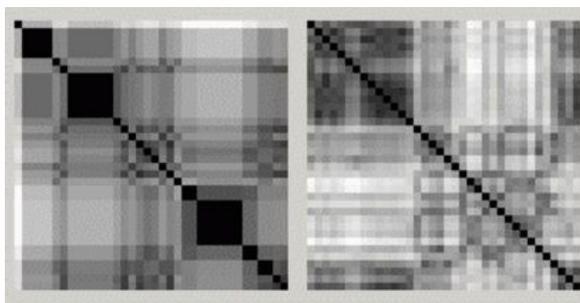


Рис. 10: Растянутые матрицы самосравнения для разных команд

## Проведенные эксперименты.

Команды произносились в автомобиле с 4000 и 800 оборотами двигателя в минуту (именно для этих значений наблюдается самая большая разница в отношении сигнал/шум). Использовались следующие речевые команды (всего  $L = 29$ ): “один”, “два”, “три”, “четыре”, “пять”, “шесть”, “семь”, “восемь”, “девять”, “десять”, “одиннадцать”, “двенадцать”, “тринадцать”, “четырнадцать”, “пятнадцать”, “шестнадцать”, “семнадцать”, “восемнадцать”, “девятнадцать”, “двадцать”, “тридцать”, “сорок”, “пятьдесят”, “шестьдесят”, “семьдесят”, “да”, “нет”, “хорошо”, “понял”.

В качестве эталона для каждой команды считалось произнесение слова при 800 оборотов двигателя в минуту (с минимальным уровнем шума). Затем этот эталон сравнивался описанным выше методом со всеми командами, записанными при 4000 оборотов двигателя в минуту (т. е. максимальное значение уровня шума). На Рис. 11 показана соответствующая матрица расстояний  $D(i, j), 1 \leq i, j \leq L$ .

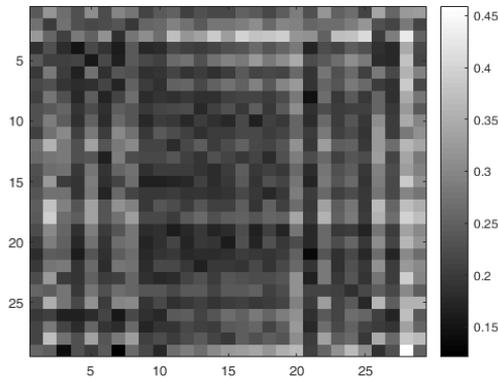


Рис. 11: Матрица попарных расстояний для 29 команд с разным уровнем шума

Поскольку цель - не создать новый метод распознавания, а дополнить уже существующие для повышения надёжности, то для нас важно, чтобы расстояние между матрицами, являющимися самосравнениями произнесений одних и тех же команд, было *в среднем не больше*, чем расстояние между матрицами из разных классов. Поэтому для каждой команды с номером  $i, 1 \leq i \leq L$ , будем оценивать следующую величину:

$$c(i) = \frac{\frac{1}{L} \sum_{j=1}^L D(i, j) - D(i, i)}{\frac{1}{L} \sum_{j=1}^L D(i, j)}.$$

Будем считать распознавание “очень надёжным” для команды с номером  $i$ , если значение  $c(i) \geq 0.05$ ; “надёжным”, если  $-0.05 \leq c(i) < 0.05$ ; и “ненадёжным”, если  $c(i) \leq -0.05$ . На Рис. 12 показан график оценки надёжности  $c(i), 1 \leq i \leq L$ .

Как видим, только для 3 команд (“восемь”, “сорок” и “хорошо”; отмечены кружками) предложенный метод даёт неудовлетворитель-

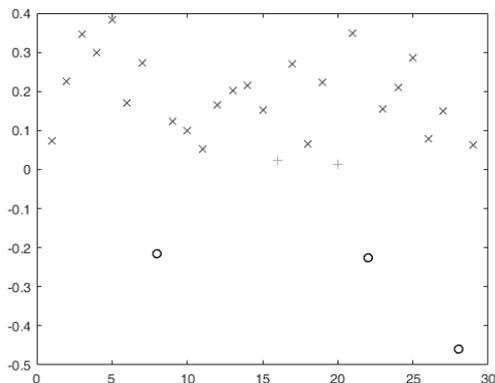


Рис. 12: Оценка надёжности распознавания

ные результаты, и для 2 (“шестнадцать” и “двадцать”; отмечены плюсами) надёжность не слишком высокая. Тем не менее, 26 из 29 команд распознаны с удовлетворительной надёжностью, что в результате даёт около 90% правильных распознаваний и позволяет утверждать, что предложенный метод вполне годится для совместного применения с другими методами распознавания для повышения их надёжности.

## Заключение

В качестве возможного будущего улучшения предложенного метода можно предложить следующие идеи. Во-первых, перед применением незашумлённого эталона его следует сначала как-то специально “зашумить”, используя текущую шумовую обстановку (либо, наоборот, удалить шумовые помехи из анализируемого сигнала — см. работы [7] и [8]). Также при создании оптимального растяжения возможно делать некий аналог сглаживания соседних строк, чтобы не копировать строки матриц без обработки.

## Список литературы

- [1] Р. Беллман. Динамическое программирование. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1960.

- [2] R. Bellman. On the theory of dynamic programming. // Proceedings of the National Academy of Sciences. – 1952. – Vol. 38. – № 8. – P. 716–719.
- [3] J. K. Baker. The DRAGON system — An overview. // Acoustics, speech and signal processing, IEEE transactions on. – 1975. – Vol. 23. – № 1. – P. 24–29.
- [4] F. Jelinek, L. R. Bahl and R. L. Mercer. Design of a linguistic statistical decoder for the recognition of continuous speech. // Information Theory, IEEE Transactions on. – 1975. – Vol. 21. – № 3. – P. 250–256.
- [5] Т. К. Винцюк. Распознавание слов устной речи методами динамического программирования. // Кибернетика. – 1968. – № 1. – С. 81–88.
- [6] Д. Н. Бабин, В. В. Дементиенко, И. Л. Мазуренко, В. И. Миргородский, Д. С. Михайлов, А. Б. Холоденко и А. В. Уранцев. Система речевого контроля состояния машиниста. // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. – 2014. – Т. 18. – № 4. – С. 69–75.
- [7] И. Л. Мазуренко. Об одном подходе к линейной адаптивной цифровой обработке сигналов. // Интеллектуальные системы. – 2013. – Т. 17. – № 1–4. – С. 245–248.
- [8] А. А. Петюшко. Анализ распознавания одномерных сигналов в шуме. // Молодежь в науке: Сборник докладов Четвертой научно-технической конференции, Саров, 1-3 ноября 2005 г. – ФГУП “РФЯЦ-ВНИИЭФ” Саров. – 2006. – С. 131–137.

# Устойчивый к шуму метод обучения вариационного автокодировщика \*

М. В. Фигурнов, К. А. Струминский, Д. П. Ветров

Вариационный автокодировщик (ВАК) — вероятностный метод обучения без учителя, использующий глубинное обучение. В статье предлагается устойчивый к шуму метод обучения ВАК, основанный на модификации функции правдоподобия. Предлагаются и анализируются две нижние оценки в качестве целевых функций для ВАК. Эффективность метода продемонстрирована в экспериментах с искусственно добавленными шумовыми объектами.

**Ключевые слова:** обучение без учителя, генеративное моделирование, вариационный автокодировщик, важностно-взвешенный автокодировщик, робастность, устойчивость к шуму

## Введение

Глубинное обучение (deep learning), класс техник машинного обучения, приобрёл большую популярность в последние годы [8]. Ключевая идея глубинного обучения — автоматическое извлечение иерархии признаков представлений из высокоразмерных данных. К примеру, при обработке изображений на первых уровнях иерархии могут обучиться детекторы ориентированных градиентов, а на последующих — детекторы частей объектов [14].

---

\*Работа была выполнена при поддержке лаборатории тензорных сетей и глубинного обучения для интеллектуального анализа данных на базе Сколковского института науки и технологии, грант Правительства РФ № 14.756.31.0001. Работа также была поддержана проектом повышения конкурентоспособности российских университетов «5-100».

На сегодняшний день наиболее успешны методы глубинного обучения с учителем, в особенности для задачи классификации. В этом случае используют многослойные (глубинные) нейронные сети, которые принимают на вход неструктурированные данные высокой размерности, например, пиксели изображения или спектрограмму звука. Выходом сети является вероятностное распределение над дискретным множеством классов. Предположим, что имеется обучающая выборка, состоящая из объектов и правильных классов для них. Тогда параметры нейронной сети настраиваются стохастическим градиентным спуском, максимизирующим вероятность принадлежности объектов правильному классу. Для подсчёта градиента функционала качества по параметрам нейронной сети применяется метод обратного распространения ошибки (backpropagation). К сожалению, методы обучения с учителем имеют ограниченную применимость. Во многих случаях получение правильных ответов для обучающих объектов трудозатратно, а иногда и вовсе невозможно. К примеру, в задаче обнаружения редких болезней по медицинским снимкам крайне трудно собрать репрезентативную выборку пациентов. В таких случаях необходимы методы обучения без учителя, то есть методы выявления закономерностей без известных правильных ответов для данных [1]. Методы обучения без учителя позволяют решить задачу детекции аномалий, а также существенно уменьшить требования методов обучения с учителем к размеру обучающей выборки.

Как правило, методы обучения без учителя не предполагают наличие шума в данных. В этой работе мы рассматриваем случай, когда выборка данных содержит большое число шумовых объектов, которые мы хотели бы игнорировать при обучении. В начале мы рассмотрим схему работы вариационного автокодировщика, распространённого метода обучения без учителя. Затем мы предложим новый функционал качества, устойчивое к шуму правдоподобие, предложим и проанализируем нижние оценки на этот функционал. В конце будут приведены результаты экспериментов на искусственно зашумлённых данных, демонстрирующие преимущество предложенного метода.

## Вариационный автокодировщик

В данной работе мы предлагаем новый метод обучения вариационного автокодировщика [6]. Вариационный автокодировщик — метод обучения без учителя, который настраивает вероятностную модель порождения данных (генеративную модель). Опишем базовую схему работы вариационного автокодировщика.

Пусть имеется обучающая выборка  $\mathcal{D} = \{x_1, \dots, x_N\}$  из  $N$  независимых объектов, полученных из распределения данных. Признаковое описание объектов может быть как непрерывным, так и дискретным. Для определённости будем считать, что все признаки бинарны:  $x_i \in \{0, 1\}^D$ ,  $D$  — размерность описания. Также введём пространство скрытых переменных  $\mathcal{Z} = \mathbb{R}^d$ . Предположим следующий случайный процесс порождения данных. Сначала из многомерного нормального априорного распределения с нулевым средним и единичной матрицей ковариации  $p(z) = \mathcal{N}(z|0, I)$  генерируется скрытая переменная  $z \in \mathcal{Z}$ . Затем объект  $x$  генерируется из условного параметрического распределения Бернулли на каждый признак  $p_\theta(x|z) = \prod_{i=1}^D \text{Ver}(x_i|t_{\theta,i}(z))$ . Здесь  $t_{\theta,i}(z) \in [0, 1]$  — вероятность события  $x_i = 1$ , функция от скрытых переменных, параметризуемая вектором  $\theta$ . Заметим, что мы предположили независимость всех признаков при условии скрытой переменной, что не означает их безусловную независимость. Распределение данных, задаваемое этой моделью, имеет вид:

$$p_\theta(x) = \int_{\mathcal{Z}} p_\theta(x, z) dz = \int_{\mathcal{Z}} p_\theta(x|z) p(z) dz \quad (1)$$

Применим метод максимального правдоподобия к этой модели:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log p_\theta(x_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log \int_{\mathcal{Z}} p_\theta(x_i|z) p(z) dz \rightarrow \max_{\theta} \quad (2)$$

Решение этой задачи максимизации сопряжено с двумя трудностями. Во-первых, в большинстве практически важных случаев интеграл (2) не вычисляется аналитически. Распространённое решение этой проблемы — методы вариационного вывода. Во-вторых, даже при известной аналитической форме интеграла максимизация по  $\theta$ , как правило, не может быть проведена явно и требует применения стохастического градиентного спуска.

Для начала применим вариационный вывод и перейдём к задаче максимизации вариационной нижней оценки на логарифм маргинального правдоподобия. Для упрощения нотации будем рассматривать лишь один объект  $x$ ; обобщение на случай нескольких объектов проводится взятием среднего по ним. Введём вспомогательное параметрическое распределение  $q_\phi(z|x)$  на пространстве  $\mathcal{Z}$ , умножим и разделим подынтегральное выражение на него, чтобы получить математическое ожидание по этому распределению.

$$\log p_\theta(x) = \log \int_{\mathcal{Z}} q_\phi(z|x) \frac{p_\theta(x|z)p(z)}{q_\phi(z|x)} dz = \log \mathbb{E}_{z \sim q_\phi(z|x)} \frac{p_\theta(x|z)p(z)}{q_\phi(z|x)}. \quad (3)$$

Применим неравенство Йенсена, чтобы получить вариационную нижнюю оценку на логарифм маргинального правдоподобия  $\log p_\theta(x)$ :

$$\log p_\theta(x) = \log \mathbb{E}_{z \sim q_\phi(z|x)} \frac{p_\theta(x|z)p(z)}{q_\phi(z|x)} \geq \mathbb{E}_{z \sim q_\phi(z|x)} \log \frac{p_\theta(x|z)p(z)}{q_\phi(z|x)}. \quad (4)$$

**Определение 1.** Вариационной нижней оценкой на логарифм маргинального правдоподобия называется величина

$$\mathcal{L}(x, \theta, \phi) = \mathbb{E}_{z \sim q_\phi(z|x)} \log \frac{p_\theta(x|z)p(z)}{q_\phi(z|x)}. \quad (5)$$

Таким образом, задача обучения модели была сведена к задаче оптимизации

$$\mathcal{L}(x, \theta, \phi) \rightarrow \max_{\theta, \phi} \quad (6)$$

Заметим, что по правилу произведения вероятностей  $p_\theta(x, z) = p_\theta(x|z)p(z) = p_\theta(x)p_\theta(z|x)$ . Таким образом, последнее выражение может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, \theta, \phi) &= \mathbb{E}_{z \sim q_\phi(z|x)} \log \frac{p_\theta(x)p_\theta(z|x)}{q_\phi(z|x)} = \mathbb{E}_{z \sim q_\phi(z|x)} \log p_\theta(x) - \\ &- \mathbb{E}_{z \sim q_\phi(z|x)} \log \frac{q_\phi(z|x)}{p_\theta(z|x)} = \log p_\theta(x) - \text{KL}(q_\phi(z|x) || p_\theta(z|x)). \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, максимизация вариационной нижней оценки по параметрам  $\phi$  эквивалентна минимизации дивергенции Кульбака-Лейблера между  $q_\phi(z|x)$  и  $p_\theta(z|x)$ . Поскольку дивергенция

Кульбака-Лейблера неотрицательна и равна нулю тогда и только тогда, когда плотности распределений совпадают почти всюду, оптимум в задаче оптимизации (при достаточно широком множестве  $\phi$ ) достигается при совпадении  $q_\phi(z|x)$  и  $p_\theta(z|x)$  почти всюду. В этом случае вариационная нижняя оценка будет равна логарифму маргинального правдоподобия. Итак,  $q_\phi(z|x)$  приближает истинное апостериорное распределение  $p_\theta(z|x)$ .

Мы хотели бы применить градиентный метод оптимизации в задаче (6). Для того, чтобы упростить взятие градиента по параметрам  $\theta$  в случаях, когда невозможно выполнить аналитическое взятие мат. ожидания по  $z$ , требуется выполнить т.н. *трюк репараметризации* [6]. Опишем его для случая многомерного нормального распределения с независимыми компонентами. Предположим, что  $q_\phi(z|x) = \prod_{j=1}^d \mathcal{N}(z_j | \mu_{\phi,j}(x), \sigma_{\phi,j}^2(x))$ . Тогда процедуру генерации точек из этого распределения можно переписать в следующем виде:

$$z \sim q_\phi(z|x) \leftrightarrow \xi \sim \mathcal{N}(\xi|0, I), z = f_\phi(\xi, x) = \mu_\phi(x) + \xi\sigma_\phi(x). \quad (8)$$

Другими словами, мы заменяем генерацию точек из параметрического распределения на генерацию точек из распределения без настраиваемых параметров. Затем эти точки преобразуются с помощью параметрической функции.

Используя трюк репараметризации, мы можем преобразовать выражение (5) следующим образом

$$\mathcal{L}(x, \theta, \phi) = \mathbb{E}_{\xi \sim \mathcal{N}(\xi|0, I)} \log \frac{p_\theta(x|f_\phi(\xi, x))p(f_\phi(\xi, x))}{q_\phi(f_\phi(\xi, x)|x)}. \quad (9)$$

Теперь градиент от вариационной нижней оценки по параметрам  $\phi$  и  $\theta$  можно занести внутрь математического ожидания. Мат. ожидание по распределению на  $\xi$  мы будем приближать с помощью одной точки по методу Монте-Карло. Наконец, для выборки объектов вместо взятия полного градиента по всем  $N$  объектам, мы будем оценивать градиент по мини-батчу из  $n < N$  объектов.

В модели вариационного автокодировщика для параметризации распределений  $q_\phi(z|x)$  и  $p_\theta(x|z)$  используются многослойные нейронные сети, на выходном слое которых предсказываются параметры соответствующих распределений. Нейронные сети позволяют моделировать сложные нелинейные зависимости между наблюдае-

мыми переменными  $x$  и скрытыми переменными  $z$ . Модель получила название по аналогии с нейросетевым автокодировщиком, в котором вместо условных распределений применяются «кодирующее» отображение  $x \rightarrow z$  и «декодировское» отображение  $z \rightarrow x$ .

**Оценка логарифма правдоподобия данных.** Оценка  $\mathcal{L}(x, \theta, \phi)$  может быть существенно ниже истинного логарифма правдоподобия данных  $\log p_\theta(x)$ . Для более точной оценки логарифма правдоподобия используется метод выборки по значимости (importance sampling).

**Определение 2.** Пусть  $K > 1$ . Важностно-взвешенной оценкой на логарифм правдоподобия с  $K$  точками называется выражение

$$\mathcal{L}^K(x, \theta, \phi) = \mathbb{E}_{z_1, \dots, z_K \sim q_\phi(z|x)} \log \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{p_\theta(x|z_k)p(z_k)}{q_\phi(z_k|x)}. \quad (10)$$

Применяя неравенство Йенсена, нетрудно видеть, что это выражение действительно является нижней оценкой на логарифм правдоподобия. Кроме того, если  $\forall z \in \mathcal{Z} q_\phi(z|x) > 0$ , то  $\lim_{K \rightarrow +\infty} \mathcal{L}^K(x, \theta, \phi) = \log p_\theta(x)$ . Важностно-взвешенные оценки были впервые использованы для обучения вариационных автокодировщиков в [2].

## Обзор литературы

В последние годы появилось множество работ, предлагающих новые способы обучения вариационных автокодировщиков. Например, работа [2] предлагает оптимизировать оценку (10) на логарифм правдоподобия, а [10] — оптимизировать дивергенцию Ренни вместо дивергенции Кульбака-Лейблера. Другими возможными улучшениями является введение более выразительного распределения на скрытые переменные, к примеру, при помощи использования нормализационных потоков [11].

В работе [13] предлагается способ модификации вероятностных моделей для увеличения устойчивости к шуму в данных. Данный подход требует введения дополнительных распределений и усложняет вывод в модели. Кроме того, под вопросом остаётся возможность настройки порождающей модели данных при помощи подобных моделей.

Данная работа является существенно расширенной версией доклада [3].

## Устойчивое к шуму правдоподобие

В статье мы предлагаем использовать для обучения вариационного автокодировщика модификацию функции правдоподобия - устойчивое к шуму правдоподобие. Ниже будет показано, что максимизация устойчивого к шуму правдоподобия позволяет присвоить нулевую вероятностную массу редким объектам (выбросам) в выборке, концентрируя распределение на характерных объектах выборки. Зафиксируем семейство распределений  $\{p_\theta(x)|\theta \in \Theta\}$  на конечном носителе  $D$  меры  $\mu(D)$ . Один из подходов робастной статистики заключается в моделировании данных с помощью семейств распределений с более тяжелыми хвостами [12]. Следуя этому подходу, мы предлагаем расширить данное семейство с помощью смеси с равномерным распределением на  $D$ :

$$p_\theta^\omega(x) = \omega \frac{1}{\mu(D)} + (1 - \omega)p_\theta(x), \quad \omega \in [0, 1]. \quad (11)$$

Первое слагаемое выполняет вспомогательную роль и позволяет ослабить штраф на выбросы в данных в функции правдоподобия, а второе слагаемое позволяет описывать наблюдаемые данные. Мы предлагаем фиксировать параметр  $\omega$  и выбирать параметры распределения  $p_\theta(x)$  с помощью метода максимального правдоподобия для семейства  $\{p_\theta^\omega(x)|\omega \in \Omega\}$ . Предложенный подход эквивалентен максимизации функции с одним вещественным параметром  $\varepsilon = \frac{\omega}{(1-\omega)\mu(D)}$ , которую мы будем называть функцией устойчивого правдоподобия.

**Определение 3.** *Функцией устойчивого правдоподобия модели  $p_\theta(x)$  для параметра устойчивости  $\varepsilon \geq 0$  и выборки  $\mathcal{D} = \{x_1, \dots, x_N\}$  называется функция*

$$L(\mathcal{D}) = \prod_{i=1}^N (\varepsilon + p_\theta(x_i)). \quad (12)$$

В отличие от функции правдоподобия, функция устойчивого правдоподобия не вырождается в ноль, если для небольшого числа объ-

ектов обучающей выборки модель дает  $p_\theta(x_i) = 0$ . Для более детального анализа функции сделаем в этом разделе несколько дополнительных допущений. Предположим, что мы моделируем дискретную случайную величину, принимающую конечное число значений  $M < \infty$ . Помимо этого допустим, что класс распределений  $\{p_\theta | \theta \in \Theta\}$  охватывает все распределения на  $M$  исходах. В таком случае любое распределение представляется вещественным вектором  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_M)$ , а параметр  $\theta$  можно опустить без ущерба изложению.

Для дальнейшего анализа перепишем функцию устойчивого правдоподобия в терминах эмпирических частот  $r_j = \frac{\sum_{i=1}^N [x_i=j]}{N}$ :

$$\frac{1}{N} \log L(\mathcal{D}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log(\varepsilon + p_{x_i}) = \sum_{j=1}^M r_j \log(\varepsilon + p_j). \quad (13)$$

**Утверждение 1.** Пусть распределение  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_M)$  - решение задачи

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^M r_j \log(\varepsilon + p_j) &\rightarrow \max_{\mathbf{p}} \\ \sum_{j=1}^M p_j &= 1 \\ 0 \leq p_j \leq 1, j &= 1, \dots, M \end{aligned} \quad (14)$$

а частоты  $r_j$  упорядочены по возрастанию. Тогда

- 1) компоненты решения  $p_j$  упорядочены по возрастанию;
- 2) если  $r_j \leq \frac{1}{M} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ , то  $p_i = 0$ .

*Доказательство.* Целевая функция является вогнутой, а все ограничения аффинные. В данном случае условия Каруша-Куна-Такера будут достаточными условиями оптимальности. Более того, функция строго вогнутая, значит точка максимума существует и единственна. Лагранжиан задачи имеет вид

$$\Lambda(\mathbf{p}, \mu, \lambda) = \sum_{j=1}^M r_j \log[\varepsilon + p_j] + \sum_{j=1}^M \mu_j p_j - \lambda \left( \sum_{j=1}^M p_j - 1 \right). \quad (15)$$

Рассмотрим решение задачи оптимизации  $\mathbf{p}$ . Из условия стационарности  $\frac{\partial \Lambda(\mathbf{p}, \boldsymbol{\mu}, \lambda)}{\partial p_j} = 0$  следует, что  $p_j$  выражается через  $r_j$  по формуле

$$p_j = \frac{r_j}{\lambda - \mu_j} - \varepsilon.$$

При  $p_j > 0$  условия дополняющей нежесткости  $\mu_j p_j = 0$  позволяют упростить выражения до  $p_j = \frac{r_j}{\lambda} - \varepsilon$ . Отсюда следует, что неотрицательные  $p_j$  упорядочены по возрастанию.

При  $p_j = 0$  из условия стационарности получается  $\mu_j = \lambda - \frac{r_j}{\varepsilon}$ . С учетом условия неотрицательности  $\mu_j$  получаем  $r_j \leq \varepsilon \lambda$ . Поскольку  $r_j$  упорядочены по возрастанию, это означает, что нулевые  $p_j$  могут встречаться только в начале вектора  $\mathbf{p}$ . Тем самым доказано, что компоненты решения упорядочены по возрастанию.

Выразим теперь  $\lambda$  из условия  $\sum_{j=1}^M p_j = 1$ :

$$\lambda = \frac{\sum_{j=1}^M [p_j > 0] r_j}{1 + \varepsilon \sum_j [p_j > 0]}. \quad (16)$$

Рассмотрим множество  $P = \{j : p_j > 0\}$ . Обозначим  $\beta = \sum_{j \in P} r_j$ . Среднее значение  $r_j$  на этом множестве равно  $\frac{\beta}{|P|}$ . Поскольку  $\sum_{j=1}^M r_j = 1$ , на дополнении к  $P$  среднее значение  $r_j$  равно  $\frac{1-\beta}{M-|P|}$ . Поскольку  $r_j$  и  $p_j$  упорядочены по возрастанию, среднее на  $P$  должно быть больше среднего на дополнении к  $P$ :

$$\frac{1 - \beta}{M - |P|} < \frac{\beta}{|P|} \quad (17)$$

Отсюда  $\beta > \frac{|P|}{M}$ . Подставляя в выражение для  $\lambda$ , получаем

$$\lambda = \frac{\sum_{j=1}^M [p_j > 0] r_j}{1 + \varepsilon \sum_{j=1}^M [p_j > 0]} > \frac{\frac{|P|}{M}}{1 + |P|\varepsilon} \geq \frac{1}{M} \frac{1}{1 + \varepsilon} \quad (18)$$

Пусть теперь для некоторого  $j$  выполнено  $r_j \leq \frac{1}{M} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}$ , но  $p_j > 0$ . Оценим  $p_j$  сверху:

$$p_j = \frac{r_j}{\lambda} - \varepsilon \leq \frac{1}{\lambda M} \frac{\varepsilon}{(1 + \varepsilon)} - \varepsilon < \varepsilon \frac{\lambda}{\lambda} - \varepsilon = 0, \quad (19)$$

получили противоречие. □

Устойчивое к шуму правдоподобие при  $\varepsilon > 0$  обобщает функцию правдоподобия. Как видно из доказательства, решение задачи максимума устойчивого правдоподобия (14) для  $p_j > 0$  определяется

аффинным преобразованием эмпирических частот  $p_j = \frac{r_j}{\lambda} - \varepsilon$ . Для  $\varepsilon = 0$  задача вырождается в задачу максимума правдоподобия с решением  $p_j = r_j$ . Но в общем случае для некоторых  $j$  величина  $\frac{r_j}{\lambda} - \varepsilon$  оказывается отрицательна, поэтому в решении могут появляться нулевые компоненты  $p_j = 0$  при  $r_j > 0$ .

## Нижняя оценка на логарифм устойчивого правдоподобия

Важностно-взвешенные оценки на логарифм правдоподобия естественно обобщаются на случай устойчивого к шуму правдоподобия  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log [\varepsilon + p_\theta(x_i)]$ . В этом разделе мы вводим две нижних оценки на логарифм устойчивого правдоподобия, а затем проводим их сравнение и анализ. Выводы в этом разделе без ограничения общности приводятся для одного объекта обучающей выборки  $x \in \mathcal{D}$ .

**Определение 4.** Возьмем  $K \in \mathbb{N}$ ,  $\varepsilon > 0$  и вспомогательное параметрическое распределение  $q_\phi(z|x)$ . Нижней оценкой  $\mathcal{L}_p^K(x, \theta, \phi)$  логарифма устойчивого к шуму правдоподобия  $\log(\varepsilon + p_\theta(x))$  называется функция

$$\mathcal{L}_p^K(x, \theta, \phi) = \mathbb{E}_{z_1, \dots, z_K \sim q_\phi(z|x)} \log \left( \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{[\varepsilon + p_\theta(x|z_k)]p(z_k)}{q_\phi(z_k|x)} \right) \quad (20)$$

Нижней оценкой  $\mathcal{L}_q^K(x, \theta, \phi)$  логарифма устойчивого к шуму правдоподобия  $\log(\varepsilon + p_\theta(x))$  называется функция

$$\mathcal{L}_q^K(x, \theta, \phi) = \mathbb{E}_{z_1, \dots, z_K \sim q_\phi(z|x)} \log \left( \varepsilon + \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{p_\theta(x|z_k)p(z_k)}{q_\phi(z_k|x)} \right) \quad (21)$$

В случае  $K = 1$  будем опускать у оценки верхний индекс и будем писать  $\mathcal{L}_p(x, \theta, \phi)$  и  $\mathcal{L}_q(x, \theta, \phi)$ . Логику в названии оценок объясняет следующее наблюдение. Если с помощью неравенства Йенсена внести среднее под логарифм, сразу после применения неравенства для оценки  $\mathcal{L}_p^K(x, \theta, \phi)$  скаляр  $\varepsilon$  будет представлен с помощью среднего по распределению  $p(z)$ . С другой стороны, для  $\mathcal{L}_q^K(x, \theta, \phi)$  скаляр  $\varepsilon$  будет представлен с помощью среднего по распределению  $q_\phi(z|x)$ .

**Теорема 1.** Для всех  $(\phi, \theta)$  и произвольного  $K \in \mathbb{N}$  выполнены неравенства

$$\mathcal{L}_p^K(x, \theta, \phi) \leq \mathcal{L}_q^K(x, \theta, \phi) \quad (22)$$

$$\mathcal{L}_p^K(x, \theta, \phi) \leq \mathcal{L}_p^{K+1}(x, \theta, \phi) \leq \log(\varepsilon + p_\theta(x)) \quad (23)$$

$$\mathcal{L}_q^K(x, \theta, \phi) \leq \mathcal{L}_q^{K+1}(x, \theta, \phi) \leq \log(\varepsilon + p_\theta(x)) \quad (24)$$

Более того, для всех наблюдений  $x$  и параметров  $(\theta, \phi)$ , если  $p_\theta(x|z)$  и  $\frac{p(z)}{q_\phi(z|x)}$  непрерывны и ограничены относительно аргумента  $z$ , то при  $K \rightarrow \infty$  оценки  $\mathcal{L}_p^K(x, \theta, \phi)$  и  $\mathcal{L}_q^K(x, \theta, \phi)$  сходятся к устойчивому правдоподобию  $\log(\varepsilon + p_\theta(x))$ .

*Доказательство.* Сначала оценим  $\mathcal{L}_p^K(x, \theta, \phi) - \mathcal{L}_q^K(x, \theta, \phi)$  сверху. Для удобства введем функцию  $s(x, z) = \frac{p(z)}{q_\phi(z|x)}$ . Заметим, что  $\mathbb{E}_{z \sim q_\phi(z|x)} s(x, z) = 1$ .

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_p^K(x, \theta, \phi) - \mathcal{L}_q^K(x, \theta, \phi) = \\ &= \mathbb{E}_{z_1, \dots, z_K \sim q_\phi(z|x)} \log \frac{\sum_{k=1}^K (\varepsilon s(x, z_k) + p_\theta(x|z_k) s(x, z_k))}{\sum_{k=1}^K (\varepsilon + p_\theta(x|z_k) s(x, z_k))} = \\ &= \mathbb{E}_{z_1, \dots, z_K \sim q_\phi(z|x)} \log \left[ 1 + \frac{\sum_{k=1}^K (\varepsilon s(x, z_k) - \varepsilon)}{\sum_{k=1}^K (\varepsilon + p_\theta(x|z_k) s(x, z_k))} \right] \leq \\ &\leq \{\log(1+x) \leq x\} \leq \mathbb{E}_{z_1, \dots, z_K \sim q_\phi(z|x)} \frac{\sum_{k=1}^K (\varepsilon s(x, z_k) - \varepsilon)}{\sum_{k=1}^K (\varepsilon + p_\theta(x|z_k) s(x, z_k))} \leq \\ &\leq \mathbb{E}_{z_1, \dots, z_K \sim q_\phi(z|x)} \frac{\sum_{k=1}^K (\varepsilon s(x, z_k) - \varepsilon)}{\sum_{k=1}^K \varepsilon} = \sum_{k=1}^K \frac{\varepsilon - \varepsilon}{K} = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Следовательно,  $\mathcal{L}_p^K(x, \theta, \phi) \leq \mathcal{L}_q^K(x, \theta, \phi)$ .

В оставшейся части доказательства мы переносим рассуждения [2] на случай нижних оценок на устойчивое правдоподобие.

Докажем неравенство  $\mathcal{L}_q^K(X, \theta, \phi) \leq \mathcal{L}_q^{K+1}(X, \theta, \phi)$ . Неравенство  $\mathcal{L}_p^K(X, \theta, \phi) \leq \mathcal{L}_p^{K+1}(X, \theta, \phi)$  получается аналогично. Рассмотрим равномерно распределенное случайное подмножество  $I \subset \{1, \dots, K+1\}$ ,  $|I| = K$ . Для него и произвольного набора чисел  $a_1, \dots, a_{K+1}$  выполнено  $\mathbb{E}_{I=\{i_1, \dots, i_K\}} \left[ \frac{a_{i_1} + \dots + a_{i_K}}{K} \right] = \frac{a_{i_1} + \dots + a_{i_{K+1}}}{K+1}$ . Со-

отношение вместе с неравенством Йенсена дает

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_q^{K+1} &= \mathbb{E}_{z_1, \dots, z_{K+1} \sim q_\phi(z|x)} \left[ \log \left( \varepsilon + \frac{1}{K+1} \sum_{k=1}^{K+1} \frac{p_\theta(x|z_k)p(z_k)}{q_\phi(z_k|x)} \right) \right] \\
&= \mathbb{E}_{z_1, \dots, z_{K+1} \sim q_\phi(z|x)} \left[ \log \mathbb{E}_{I=\{i_1, \dots, i_k\}} \left( \varepsilon + \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{p_\theta(x|z_{i_k})p(z_{i_k})}{q_\phi(z_{i_k}|x)} \right) \right] \\
&\geq \mathbb{E}_{z_1, \dots, z_{K+1} \sim q_\phi(z|x)} \mathbb{E}_{I=\{i_1, \dots, i_k\}} \left[ \log \left( \varepsilon + \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{p_\theta(x|z_{i_k})p(z_{i_k})}{q_\phi(z_{i_k}|x)} \right) \right] \\
&= \mathbb{E}_{z_1, \dots, z_K \sim q_\phi(z|x)} \left[ \log \left( \varepsilon + \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{p_\theta(x|z_k)p(z_k)}{q_\phi(z_k|x)} \right) \right] = \mathcal{L}_q^K
\end{aligned} \tag{26}$$

Неравенство  $\mathcal{L}_q^{K+1}(x, \theta, \phi) \leq \log(\varepsilon + p_\theta(x))$  следует из неравенства Йенсена:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_q^{K+1}(x, \theta, \phi) &= \mathbb{E}_{z_1, \dots, z_{K+1} \sim q_\phi(z|x)} \log \left( \varepsilon + \frac{1}{K+1} \sum_{k=1}^{K+1} \frac{p_\theta(x|z_k)p(z_k)}{q_\phi(z_k|x)} \right) \leq \\
&\leq \log \mathbb{E}_{z_1, \dots, z_{K+1} \sim q_\phi(z|x)} \left( \varepsilon + \frac{1}{K+1} \sum_{k=1}^{K+1} \frac{p_\theta(x|z_k)p(z_k)}{q_\phi(z_k|x)} \right) = \log(\varepsilon + p_\theta(x))
\end{aligned} \tag{27}$$

Поскольку  $\mathcal{L}_p^K(x, \theta, \phi) \leq \mathcal{L}_q^K(x, \theta, \phi)$ , из последнего также следует, что  $\mathcal{L}_p^{K+1}(x, \theta, \phi) \leq \log(\varepsilon + p_\theta(x))$ .

Докажем сходимость. Поскольку случайные величины  $z_1, \dots, z_{K+1}$  независимы и одинаково распределены, а из непрерывности отображения  $\frac{p_\theta(x|z)p(z)}{q_\phi(z|x)}$  следует его измеримость, случайные величины  $\frac{p_\theta(x|z_k)p(z_k)}{q_\phi(z_k)}$ ,  $1 \leq k \leq K+1$  независимы и одинаково распределены. У них также определено математическое ожидание, потому что отношение  $\frac{p_\theta(x|z)p(z)}{q_\phi(z|x)}$  ограничено. По усиленному закону больших чисел слагаемое  $\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{p_\theta(x|z)p(z)}{q_\phi(z|x)}$  в оценке  $\mathcal{L}^K(x, \theta, \phi)$  сходится почти наверное к  $\mathbb{E}_{q_\phi(z|x)} \frac{p_\theta(x|z)p(z)}{q_\phi(z|x)} = p_\theta(x)$ . Из этого следует, что  $\mathcal{L}_q^K(x, \theta, \phi) \rightarrow \log(\varepsilon + p_\theta(x))$ . По тем же соображениям,  $\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \varepsilon \frac{p(z)}{q_\phi(z|x)} \rightarrow \mathbb{E}_{q_\phi(z|x)} \varepsilon \frac{p(z)}{q_\phi(z|x)} = \varepsilon$ . Следовательно  $\mathcal{L}_p^K(x, \theta, \phi) \rightarrow \log(\varepsilon + p_\theta(x))$ .  $\square$

Оценка  $\mathcal{L}_q^K(x, \theta, \phi)$  не только точнее  $\mathcal{L}_p^K(x, \theta, \phi)$ , но также может быть использована для приближенного вариационного вывода. Это свойство нижней вариационной оценки, которое сохраняется при введении параметра  $\varepsilon$ .

**Утверждение 2.** Допустим, что для параметра  $\phi^*$  распределение  $q_{\phi^*}(z|x)$  совпадает с апостериорным распределением  $p_{\theta}(z|x)$ . В таком случае, для любого  $K \in \mathbb{N}$  нижняя оценка  $\mathcal{L}_q^K(x, \theta, \phi^*)$  достигает максимального значения  $\log(\varepsilon + p_{\theta}(x))$  при фиксированном  $\theta$ .

*Доказательство.* По построению, нижняя оценка  $\mathcal{L}_q^K(x, \theta, \phi^*)$  не превосходит  $\log(\varepsilon + p_{\theta}(x))$ . Заменим  $q_{\phi^*}(z|x)$  на апостериорное распределение  $p_{\theta}(z|x)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_q^K(x, \theta, \phi^*) &= \mathbb{E}_{z_1, \dots, z_K \sim p_{\theta}(z|x)} \log \left( \varepsilon + \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{p_{\theta}(x|z_k)p(z_k)}{p_{\theta}(z_k|x)} \right) = \\ &= \mathbb{E}_{z_1, \dots, z_K \sim p_{\theta}(z|x)} \log \left( \varepsilon + \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{p_{\theta}(z_k|x)p_{\theta}(x)}{p_{\theta}(z_k|x)} \right) = \log(\varepsilon + p_{\theta}(x)). \end{aligned} \tag{28}$$

□

## Устойчивый к шуму вариационный автокодировщик

Мы предлагаем метод обучения вариационного автокодировщика с помощью нижних оценок на логарифм устойчивого правдоподобия. Полученную таким образом модель мы будем называть устойчивым вариационным автокодировщиком.

Доказанное выше утверждение 1 описывает решения метода максимального устойчивого к шуму правдоподобия, найденного среди всех возможных дискретных распределений. Обученный с помощью нижней оценки на устойчивое правдоподобие вариационный автокодировщик решает ослабленную задачу в менее богатом классе распределений. Тем не менее, выделенные в утверждении свойства метода сохраняются и в случае устойчивого к шуму вариационного автокодировщика. Для упрощения анализа рассмотрим случай  $K = 1$  и оценку  $\mathcal{L}_q(x, \theta, \phi)$ .

Как говорилось раньше, вариационные автокодировщики обучаются с помощью градиентных методов оптимизации. Сравним градиенты нижней оценки на правдоподобие и нижней оценки на устойчивое правдоподобие. Далее с помощью символа  $\nabla$  обозначается градиент относительно параметров  $\theta$  и  $\phi$ . Используя сокращенное обозначение для репараметризации  $z_m = f_\phi(\xi_m, x)$ ,  $\xi_m \sim \mathcal{N}(\xi|0, I)$ , определим Монте-Карло оценку  $\mathcal{L}_q(x, \theta, \phi)$ :

$$\mathcal{L}_q(x, \theta, \phi) \approx \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \log \left[ \varepsilon + \frac{p_\theta(x|z_m)p(z_m)}{q_\phi(z_m|x)} \right] = \bar{\mathcal{L}}_q(x, \theta, \phi), \quad (29)$$

а также оценку  $\mathcal{L}(x, \theta, \phi)$ .

$$\mathcal{L}(x, \theta, \phi) \approx \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \log \left[ \frac{p_\theta(x|z_m)p(z_m)}{q_\phi(z_m|x)} \right] = \bar{\mathcal{L}}(x, \theta, \phi) \quad (30)$$

Благодаря репараметризации, градиент оценки  $\bar{\mathcal{L}}_q(x, \theta, \phi)$  будет несмещенной оценкой на градиент  $\mathcal{L}_q(x, \theta, \phi)$ . Введем обозначение:  $r(x, z) = \log \frac{p_\theta(x|z)p(z)}{q_\phi(z|x)}$ .

**Утверждение 3.** Оценка  $\nabla \bar{\mathcal{L}}_q(x, \theta, \phi)$  получается из оценки  $\nabla \bar{\mathcal{L}}(x, \theta, \phi)$  умножением слагаемых на веса  $\sigma(r(x, z_k) - \log \varepsilon)$ :

$$\nabla \bar{\mathcal{L}}_q(x, \theta, \phi) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sigma(r(x, z_m) - \log \varepsilon) \nabla r(x, z_m), \quad (31)$$

$$\text{где } \sigma(x) = \frac{1}{1 + \exp(-x)}.$$

В результате при  $r(x, z_m) \ll \log \varepsilon$ ,  $m = 1, \dots, M$  оценка градиента умножается на веса близкие к нулю. В частности, при  $M = 1$  градиенты  $\nabla \bar{\mathcal{L}}_q(x, \theta, \phi)$  и  $\nabla \bar{\mathcal{L}}(x, \theta, \phi)$  сонаправлены, но их длина отличается в  $\sigma(r(x, z_1) - \log \varepsilon)$  раз. Отсюда следует, что в процессе обучения правдоподобие будет быстрее увеличиваться у тех объектов, у которых оно уже достаточно высоко по сравнению с  $\log \varepsilon$ . Это качественно соответствует свойствам решений из утверждения 1. Аналогичные выводы не удается провести для градиента нижней оценки  $\nabla \bar{\mathcal{L}}_p(x, \theta, \phi)$ .

*Доказательство.* Соотношение является простым следствием определения оценки:

$$\begin{aligned}
\nabla \bar{\mathcal{L}}_q(x, \theta, \phi) &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \nabla \log [\varepsilon + \exp(r(x, z_m))] \\
&= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{\exp(r(x, z_m))}{\varepsilon + \exp(r(x, z_m))} \nabla r(x, z_m) \\
&= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{1}{\exp(\log \varepsilon - r(x, z_m)) + 1} \nabla r(x, z_m) \\
&= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sigma(r(x, z_m) - \log \varepsilon) \nabla r(x, z_m)
\end{aligned} \tag{32}$$

□

Из утверждения 3 также следует, что на ранних этапах обучения высокие значения  $\varepsilon$  будут препятствовать обучению модели. Действительно, при  $r(x, z_m) \ll \log \varepsilon$  веса перед градиентом будут принимать значения близкие к нулю, а шаги градиентного спуска не будут оказывать влияния на параметры модели. С другой стороны, при фиксированном низком значении  $\varepsilon$  устойчивый к шуму автокодировщик будет обучаться, но не будет качественно отличаться от обычного вариационного автокодировщика.

Для решения этой проблемы мы предлагаем повышать значение  $\varepsilon$  на этапе обучения модели после каждого градиентного шага. Положим величину  $\varepsilon$  пропорциональной средней оценке на правдоподобие данных, где  $\alpha$  — гиперпараметр метода.

$$\varepsilon = \alpha \exp \left( \frac{\sum_{x \in \mathcal{D}} \mathcal{L}(x, \theta, \phi)}{|\mathcal{D}|} \right). \tag{33}$$

Поскольку вычисление  $\sum_{x \in \mathcal{D}} \mathcal{L}(x, \theta, \phi)$  по правилу (33) требовало бы проход по всей обучающей выборке для каждого обновления параметра, в экспериментах эта величина приближалась экспоненциальным сглаживанием несмещенных оценок величины  $\sum_{x \in \mathcal{D}} \mathcal{L}(x, \theta, \phi)$ .

## Эксперименты

Для экспериментов была выбрана архитектура вариационного автокодировщика с  $d = 50$  скрытыми переменными. Параметры распределений  $p_\theta(x|z)$  и  $q_\phi(z|x)$  задавались двуслойными полносвязными нейронными сетями с 200 нейронами в каждом слое. Использовалась функция активации нейронов  $\text{PReLU}(x) = \max(\delta x, x)$  [4], где параметр  $\delta$  настраивался совместно с другими параметрами нейронной сети.

Параметры сети настраивались с помощью стохастического градиентного метода оптимизации ADAM [5] с параметрами  $\beta_1 = 0.99, \beta_2 = 0.999, \epsilon = 10^{-4}$ . Каждый автокодировщик обучался 1000 эпох с коэффициентом скорости обучения  $10^{-3}$ ,  $n = 200$  элементами в минибатче. Коэффициент устойчивости  $\epsilon$  выбирался при помощи экспоненциального сглаживания  $\log \epsilon_t = 0.99 \log \epsilon_{t-1} + 0.01 \log \epsilon$  для посчитанного по формуле (33) на  $t$  шаге градиентного спуска значения  $\log \epsilon$ . Для обучения устойчивого вариационного автокодировщика использовалась нижняя оценка  $\mathcal{L}_q$ .

Для экспериментального анализа устойчивого к шуму вариационного автокодировщика мы использовали два набора синтетически сгенерированных данных. Взяв за основу наборы данных MNIST [9] и OMNIGLOT [7], изображения разрешения  $28 \times 28$  с рукописными символами, мы добавили к данным серые квадраты с интенсивностью, равной средней интенсивности картинок исходных данных. Эксперименты проводились с разным количеством шумовых объектов; их доля в выборке менялась от 1:2 до 2:1.

К изображениям применялась динамическая бинаризация [2]. Каждый пиксель изображения из обучающей выборки принимает значение один с вероятностью, равной интенсивности выбранной точки на исходной картинке. По сравнению со статической (однократной) бинаризацией, этот подход расширяет обучающие данные и повышает обобщающей способности модели. Примеры цифр и шумовых объектов после динамической бинаризации показаны на рисунке 1.

Для оценки качества обученных моделей в качестве приближения правдоподобия вычислялась средняя по тестовой выборке оценка  $\mathcal{L}^{200}$ , подсчитанная по формуле (10). В тестовую выборку шумовые объекты не добавлялись.

Результаты представлены в таблице 1. Несмотря на шум в данных,

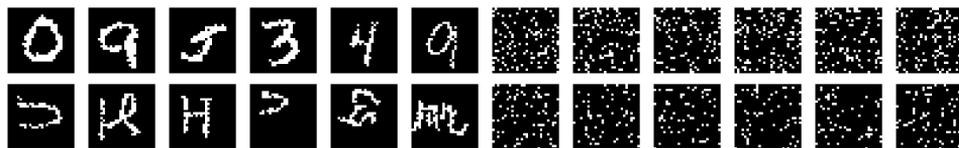


Рис. 1: Примеры данных из обучающей выборки после динамической бинаризации: **сверху** примеры чистых и шумовых объектов для данных MNIST, **снизу** примеры чистых и шумовых объектов для данных OMNIGLOT.

устойчивому вариационному автокодировщику удавалось успешно обучиться. В то же время тестовое правдоподобие обычного вариационного автокодировщика значительно ухудшалось с увеличением доли шума в обучающих данных. Из таблицы видно, что оптимальное значение определенного по формуле 33 параметра  $\alpha$  существенно зависит от исходного набора обучающих данных и их зашумленности на этапе обучения. Например, в экспериментах на данных OMNIGLOT оптимальный  $\alpha$  растет по мере увеличения доли шума. В экспериментах на наборе данных MNIST подобной зависимости не наблюдается.

Мы также сравнили устойчивый вариационный автокодировщик с вариационным автокодировщиком на данных без синтетического шума. Результаты этой серии экспериментов представлены в таблице 2. В этом случае лучшие значения правдоподобия моделей были достигнуты при минимальных значениях  $\alpha$ . Тем не менее, устойчивому вариационному автокодировщику удалось достичь небольшого улучшения правдоподобия в сравнении с вариационным автокодировщиком. Это позволяет предположить, что устойчивый вариационный автокодировщик может быть использован для регуляризации генеративных моделей даже при обучении на данных без шума.

## Заключение

В данной работе предложено и проанализировано устойчивое к шуму правдоподобие, новый функционал качества для обучения моделей машинного обучения. Представлен способ максимизации устойчивого правдоподобия для модели вариационного автокодировщи-

Данные	Ч:Ш	Устойчивый ВАК, $\log \alpha$						ВАК
		-50	-10	0	10	50	100	-
MNIST	2:1	-88.46	-88.47	-88.40	<b>-88.36</b>	-88.52	-89.35	-90.64
	1:1	-89.23	<b>-88.63</b>	-88.98	-89.07	-88.81	-89.45	-90.96
	1:2	-91.91	-90.53	-89.97	<b>-89.50</b>	-90.51	-91.31	-93.75
OMNIGLOT	2:1	-114.32	<b>-113.72</b>	-114.73	-114.51	-116.63	-124.13	-115.33
	1:1	-116.98	-115.22	-115.11	<b>-114.38</b>	-115.99	-117.16	-117.96
	1:2	-125.67	-124.14	-118.58	-117.92	<b>-116.03</b>	-117.38	-121.61

Таблица 1: Логарифм правдоподобия тестовой выборки (больше — лучше) без шумовых объектов. Обучение производилось на данных с синтетическим шумом, отношение  $\varepsilon$  к среднему правдоподобию данных поддерживалось на уровне  $\alpha$  согласно формуле 33. Отношение числа (чистые:шумовые) объектов обучающей выборки приведено во втором столбце. Устойчивый к шуму вариационный автокодировщик успешно справляется с задачей обучения в присутствии шумовых объектов, в то время как правдоподобие вариационного автокодировщика (ВАК) существенно убывает по мере увеличения зашумленности данных.

Данные	Устойчивый ВАК, $\log \alpha$							ВАК
	-100	-50	-10	0	10	50	100	-
MNIST	<b>-88.04</b>	-88.44	-92.87	-95.76	-101.61	-127.05	-165.03	-88.74
OMNIGLOT	-113.52	-115.60	-123.78	-126.86	-131.05	-150.59	-183.53	<b>-112.94</b>

Таблица 2: Логарифм правдоподобия тестовой выборки (больше — лучше) для устойчивого автокодировщика и вариационного автокодировщика, обученных на данных без синтетического шума. Достаточно малые значения параметра  $\alpha$  приводят к эффекту регуляризации и позволяют улучшить результаты на MNIST.

ка при помощи двух вариационных нижних оценок. Доказано, что одна из этих оценок превосходит другую. Экспериментально показано, что устойчивые нижние оценки уменьшают чувствительность вариационного автокодировщика к синтетическому шуму в обучающих данных. В дальнейшем планируется применение предложенного метода к другим моделям машинного обучения.

Авторы выражают признательность анонимному рецензенту за ценные замечания к приведенным в статье рассуждениям, а также за найденные неточности в выкладках.

## Список литературы

- [1] Yoshua Bengio, Aaron Courville, and Pascal Vincent. Representation learning: A review and new perspectives. *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 35(8):1798–1828, 2013.
- [2] Yuri Burda, Roger Grosse, and Ruslan Salakhutdinov. Importance weighted autoencoders. In *International Conference on Learning Representations*, 2015.
- [3] Michael Figurnov, Kirill Struminsky, and Dmitry Vetrov. Robust variational inference. In *Advances in Approximate Bayesian Inference (NIPS Workshop)*, 2016.
- [4] Kaiming He, Xiangyu Zhang, Shaoqing Ren, and Jian Sun. Delving deep into rectifiers: Surpassing human-level performance on imagenet classification. In *Proceedings of the IEEE international conference on computer vision*, pages 1026–1034, 2015.
- [5] Diederik Kingma and Jimmy Ba. Adam: A method for stochastic optimization. In *International Conference on Learning Representations*, 2015.
- [6] Diederik P Kingma and Max Welling. Auto-encoding variational bayes. In *International Conference on Learning Representations*, 2014.
- [7] Brenden M Lake, Ruslan Salakhutdinov, and Joshua B Tenenbaum. Human-level concept learning through probabilistic program induction. *Science*, 350(6266):1332–1338, 2015.
- [8] Yann LeCun, Yoshua Bengio, and Geoffrey Hinton. Deep learning. *Nature*, 521(7553):436–444, 2015.
- [9] Yann LeCun, Corinna Cortes, and Christopher JC Burges. The mnist database of handwritten digits. <http://yann.lecun.com/exdb/mnist/>, 1998.
- [10] Yingzhen Li and Richard E Turner. Rényi divergence variational inference. In *Advances in Neural Information Processing Systems*, pages 1073–1081, 2016.

- [11] Danilo Rezende and Shakir Mohamed. Variational inference with normalizing flows. In Proceedings of The 32nd International Conference on Machine Learning, pages 1530–1538, 2015.
- [12] Chong Wang and David M Blei. A general method for robust bayesian modeling. arXiv preprint arXiv:1510.05078, 2015.
- [13] Yixin Wang, Alp Kucukelbir, and David M Blei. Reweighted data for robust probabilistic models. arXiv preprint arXiv:1606.03860, 2016.
- [14] Matthew D Zeiler and Rob Fergus. Visualizing and understanding convolutional networks. In European conference on computer vision, pages 818–833. Springer, 2014.

# Математические модели

## Часть 3

# Графы групповых автоматов

Ищенко Р. А.

В работе вводится понятие граф автомата. Рассматривается задача определения принадлежности автомата к классу групповых автоматов по его графу. Приводится свойство графов групповых автоматов. Доказана теорема о существовании группового автомата с графом заданного вида.

**Ключевые слова:** автомат, граф, групповой автомат.

## Введение

Понятие граф автомата представляет собой модифицированную концепцию диаграммы Мура. Мы будем называть *графом автомата*  $V = (A, Q, \varphi)$  размеченный ориентированный граф  $G = (Q, W, f)$ , вершины которого соответствуют состояниям автомата, при этом

$$e = (q_i, q_j) \in W, f(e) = a \Leftrightarrow \varphi(q_i, a) = q_j,$$

где  $f : W \rightarrow A, a \in A$ .

Рассматриваются следующие задачи:

- 1) по графу автомата определить, является ли автомат групповым;
- 2) в каких случаях неразмеченный ориентированный граф  $G = (Q, W)$  можно доопределить до графа  $G' = (Q, W, f)$  некоторого группового автомата.

## Эквивалентные определения группового автомата

**Определение 1** (см. [1]). Автомат  $V = (A, Q, \varphi)$  называется групповым, если  $\forall \alpha \in A^*$  отображение  $\varphi_\alpha(q) = \varphi(q, \alpha)$  есть перестановка на множестве  $Q$ .

Очевидно, что для определения принадлежности автомата классу групповых достаточно рассмотреть лишь отображения, порождаемые буквами алфавита  $A$ .

**Утверждение 1.** Автомат  $V = (A, Q, \varphi)$  является групповым  $\Leftrightarrow \forall a \in A$  отображение  $\varphi_a(q) = \varphi(q, a)$  есть перестановка на множестве  $Q$ .

## Критерий принадлежности автомата классу групповых

Для того, чтобы по графу автомата убедиться, что ему соответствует групповой автомат, достаточно проверить, что подграфы, порожденные ребрами с одинаковыми отметками, являются совокупностью ориентированных циклов.

**Утверждение 2.** Пусть дан граф  $G = (Q, W, f)$  некоторого автомата  $V = (A, Q, \varphi)$ ,  $A = (a_1, \dots, a_m)$ .  $\forall i \in \{1, \dots, m\}$  рассмотрим подграф  $G_i = (Q, W_i)$ , где  $W_i = \{e \in W \mid f(e) = a_i\}$ . Следующие условия эквивалентны:

- 1) автомат  $V = (A, Q, \varphi)$  является групповым
- 2)  $\forall G_i, i \in \{1, \dots, m\} \forall q \in Q \deg\_in(q) = \deg\_out(q) = 1$
- 3)  $\forall i \in \{1, \dots, m\} G_i$  — совокупность ориентированных циклов без изолированных вершин.

### Доказательство.

$1 \Leftrightarrow 2$ . Пусть  $G = (Q, W, f)$  — граф некоторого автомата  $V = (A, Q, \varphi)$ . Рассмотрим подграф  $G_i = (Q, W_i)$ . Условие  $\forall q \deg\_in(q) = \deg\_out(q) = 1$  равносильно тому, что  $\varphi_{a_i}$  — биективное отображение, так как:

- 1)  $\varphi_{a_i}$  — отображение  $\Leftrightarrow \forall q \deg\_out(q) = 1$ ;
- 2)  $\varphi_{a_i}$  инъективна  $\Leftrightarrow \forall q \deg\_in(q) \leq 1$ ;

3)  $\varphi_{a_i}$  сюръективна  $\Leftrightarrow \forall q \deg_{in}(q) \geq 1$ .

Согласно утверждению 1,  $V$  — групповой  $\Leftrightarrow \varphi_{a_i}$  — биекция  $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ .

3  $\Rightarrow$  2. Справедливо по определению цикла.

2  $\Rightarrow$  3 Рассмотрим любую ориентированную простую цепь  $(q_1, q_2, \dots, q_k)$  графа  $G_i$ . Так как  $\deg_{out}(q_k) = 1$ , то  $\exists q_{k+1} : (q_k, q_{k+1}) \in W_i$ , при этом  $\forall i \in \{2, \dots, k\} q_{k+1} \neq q_i$ , так как  $\deg_{in}(q_i) = 1$ . Ясно, что на каком-то шаге цепь замкнется, после чего следует рассмотреть любое ребро графа  $G_i$ , которое мы еще не рассматривали. В конце концов, мы убедимся, что граф  $G_i$  является совокупностью ориентированных циклов. Утверждение доказано. ■

## Свойство графа группового автомата

Из утверждения 2 следует следующее свойство графа группового автомата.

**Утверждение 3.** Если  $G = (Q, W, f)$  — граф некоторого группового автомата  $V = (A, Q, \varphi)$ ,  $|A| = m$ , то  $\forall q \in Q \deg_{in}(q) = \deg_{out}(q) = m$ .

Отметим, что из того, что граф автомата обладает указанным свойством, еще не следует, что автомат является групповым. В качестве примера можно рассмотреть граф, изображенный на рис. 1. Входящие и исходящие степени каждой вершины этого графа равны 2, однако соответствующий автомат групповым не является (например, потому что  $\varphi_0(q)$  не является перестановкой на  $Q$ ).

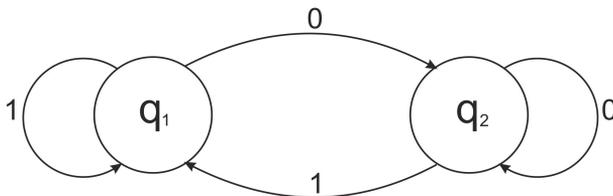


Рис. 1: Пример графа негруппового автомата.

## Существование группового автомата

Утверждается, что любой граф, обладающий указанным свойством, можно разметить таким образом, чтобы ему соответствовал некоторый групповой автомат.

**Теорема 1.** *Теорема 1. Если  $G = (Q, W)$  — ориентированный граф и  $\forall q \in Q \deg_{in}(q) = \deg_{out}(q) = m$ , то существует такая функция  $f : W \rightarrow A$ , что  $G = (Q, W, f)$  — граф некоторого группового автомата  $V = (A, Q, \varphi)$ ,  $|A| = m$ .*

**Доказательство.**

Построим неориентированный граф  $G' = (Q', W')$  следующим образом:

$$Q' = \{q', q'' \mid q \in Q\}, |Q'| = 2|Q|;$$

$$W' = \{\{q'_1, q''_2\} \mid (q_1, q_2) \in W\}, |W'| = |W|.$$

Так как  $\forall q \in Q \deg_{in}(q) = \deg_{out}(q) = m$ , то  $G'$  — двудольный  $m$ -регулярный граф. Согласно теореме Кенига[2], любой регулярный двудольный граф имеет совершенное паросочетание, следовательно,  $G' = G'_1 \cup G'_1$ , где  $G'_1 = (Q'_1, W'_1)$  — совершенное паросочетание,  $G'_1 = (Q', W'_1)$  — двудольный  $m-1$ -регулярный граф. Аналогично,  $G'_1 = G'_2 \cup G'_2$ , где  $G'_2 = (Q'_2, W'_2)$  — совершенное паросочетание,  $G'_2 = (Q', W'_2)$  — двудольный  $m-2$ -регулярный граф. Таким образом, получаем разложение графа  $G'$  на  $m$  совершенных паросочетаний  $G^*_1 = (Q^*_1, W^*_1), \dots, G^*_m = (Q^*_m, W^*_m)$ . Следовательно, граф  $G$  может быть представлен в виде объединения  $m$  подграфов  $G_1, \dots, G_m$ , где  $G_i = (Q, W_i)$ ,  $W_i = \{(q_1, q_2) \in W \mid \{q'_1, q''_2\} \in W^*_i\}$ , при этом  $\forall q \in Q \deg_{in}(q) = \deg_{out}(q) = 1$ . Рассмотрим следующую весовую функцию  $f : W \rightarrow A$ ,  $f(e) = a_i$ , если  $e \in W_i$ . Тогда согласно утверждению 2, автомат, соответствующий диаграмме Мура  $G = (Q, W, f)$ , является групповым. Теорема доказана. ■

**Следствие 1.** *Любой ориентированный граф  $G = (Q, W)$ , для которого выполнено условие  $\forall q \in Q \deg_{in}(q) = \deg_{out}(q) = m$ , можно доопределить до графа некоторого группового автомата  $V = (A, Q, \varphi)$ ,  $|A| = m$  за время  $O(|Q|^{\frac{3}{2}} * m^2)$ .*

**Доказательство.**

Требуется оценить время, необходимое для разложения графа  $G' =$

$(Q', W')$  на  $m$  совершенных паросочетаний (см. доказательство теоремы 1). Заметим, что если в графе существует совершенное паросочетание, то наибольшее паросочетание будет совершенным. Алгоритм Хопкрофта-Карпа [3] позволяет находить наибольшее паросочетание в двудольном графе  $G = (Q, W)$  за время  $O(\sqrt{|Q|} * |W|)$ . Число вершин и ребер графа  $G'_i = (Q', W'_i)$  равно соответственно:

$$|Q'| = 2|Q|;$$

$$|W'_i| = \frac{1}{2} * \sum_{q' \in Q'} \text{deg}(q') = \frac{1}{2} * (|Q'| * (m - i)) = |Q| * (m - i).$$

Поэтому разложить граф  $G' = (Q', W')$  на  $m$  совершенных паросочетаний можно за время:

$$\sum_{i=0}^{m-2} O(\sqrt{2|Q|} * |Q| * (m - i)) = \sum_{i=0}^{m-2} O(|Q|^{\frac{3}{2}} * (m - i)) = O\left(|Q|^{\frac{3}{2}} * \sum_{i=0}^{m-2} (m - i)\right) = O\left(|Q|^{\frac{3}{2}} * \frac{(m + 2) * (m - 1)}{2}\right) = O\left(|Q|^{\frac{3}{2}} * m^2\right).$$

Следствие доказано. ■

Отметим также, что приведенное разложение графа  $G$  на подграфы  $G_1, \dots, G_m$  аналогично разложению  $2m$ -регулярного графа на  $m$  реберно непересекающихся 2-факторов (см. теорему Петерсена [4]). Читатель, желающий более подробно узнать о свойствах групповых автоматов, может ознакомиться с ними в [5]. Автор выражает благодарность своему научному руководителю, д.ф.-м.н. Бабину Дмитрию Николаевичу, за постановку задачи и внимание к работе.

## Список литературы

- [1] В.Б. Кудрявцев, С.В. Алёшин, А.С. Подколзин. Введение в теорию автоматов. Изд-во «Наука», М., 1985, 38 с.
- [2] Kőnig, Dénes. Gráfok és alkalmazásuk a determinánsok és a halmazok elméletére". Matematikai és Természettudományi Értesítő, 34, 1916, pp. 104–119.

- [3] Hopcroft, Karp. An  $n^{5/2}$  algorithm for maximum matchings in bipartite graphs, SIAM Journal on Computing, 2 (4), 1973, pp. 225–231.
- [4] Л. Ловас, М. Пламмер. Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии. Изд-во “Мир”, М., 1998, 289 с.
- [5] Бабин Д.Н., О полноте и выразимости автоматных функций относительно суперпозиции, монография, Макс Пресс, Москва, 2013.

# О решетке вложения прогрессивных множеств сложности два

П. С. Дергач

В статье приводится результат об описании структуры непосредственного вложения для семейства  $\mathbb{P}_2$  прогрессивных множеств сложности не выше 2. Приводится полная избыточная классификация ребер структуры. При этом возникают 12 типов классификации, для описания которых водятся понятия согласованности, асинхронности, слабой и сильной синхронности пар арифметических прогрессий в натуральных рядах. Такая постановка задачи является новой и ранее никем не исследовалась.

**Ключевые слова:** прогрессивное множество, арифметическая прогрессия, структура непосредственного вложения.

## Введение

Под прогрессивным множеством в рамках данной работы подразумевается произвольное периодическое подмножество натурального ряда, а под его сложностью — минимальное количество попарно непересекающихся арифметических прогрессий, дающих в объединении это множество. Элементы семейства  $\mathbb{P}_2$  состоят из всех таких подмножеств натурального ряда, которые представимы объединением не более чем двух непересекающихся прогрессий. Поскольку прогрессивные множества сложности 1, в свою очередь, могут быть представлены объединением двух непересекающихся арифметических прогрессий, то семейство  $\mathbb{P}_2$  можно рассматривать как множество всех подмножеств натуральных чисел, представимых в виде объединения ровно двух непересекающихся арифметических прогрессий. Для семейства  $\mathbb{P}_1$  прогрессивных множеств сложности 1

структура вложения строится тривиально. Но уже для  $\mathbb{P}_2$  описание соответствующей структуры является нетривиальной задачей. О решении похожих задач можно прочитать в статьях [1-6]. О других интересных аспектах исследований авторов и других ученых в смежных областях к тематике данной работы можно прочитать в [7-18].

## Основные определения

Множество натуральных чисел обозначаем через  $\mathbb{N}$ .

Если два множества  $A$  и  $B$  попарно не пересекаются, то их объединение обозначаем через  $A \sqcup B$ . Если далее в тексте встречается это обозначение, то это по умолчанию означает, что множества  $A$  и  $B$  попарно не пересекаются.

Множество целых неотрицательных чисел обозначаем через  $\mathbb{N}_0$ .

Пусть  $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}_0$ . Тогда *обобщенной арифметической прогрессией с началом  $a$  и шагом  $b$*  называется множество

$$(a, b) := \{a + ib \mid i \in \mathbb{N}_0\}.$$

Множество всех обобщенных арифметических прогрессий обозначаем через  $\mathbb{P}$ .

Множество всех обобщенных арифметических прогрессий  $(a, b)$ , у которых  $b \neq 0$ , обозначаем через  $\mathbb{P}^+$ .

Множество всех подмножеств натуральных чисел, представимых в виде объединения ровно двух непересекающихся арифметических прогрессий, обозначаем через  $\mathbb{P}_2$ . Тогда *структурой вложения  $G$*  называем ориентированный граф, вершинами которого являются элементы из  $\mathbb{P}_2$ , а направленное ребро  $(P_1, P_2)$  для пары  $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$  проводится если и только если выполнены следующие два условия

1)  $P_1 \subsetneq P_2$ ;

2) не существует  $P_3 \in \mathbb{P}_2$  такого, что  $P_1 \subsetneq P_3 \subsetneq P_2$ .

Пусть  $(a, b) \in \mathbb{P}^+$ . Обозначим через  $(a, b)^+$  множество  $\{x \in \mathbb{N} \mid b \mid (x - a)\}$ .

Непересекающиеся последовательности  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{P}^+$  называем *согласованными*, если оба числа  $b, d$  четны и

$$(a, b) \cap (c + \frac{d}{2}, d)^+ \neq \emptyset \text{ и } (c, d) \cap (a + \frac{b}{2}, b)^+ \neq \emptyset.$$

Иначе называем эти последовательности *не согласованными*. Говорим, что согласованные последовательности *асинхронны*, если

$$(a, b) \not\subset (c + \frac{d}{2}, d)^+ \text{ и } (c, d) \not\subset (a + \frac{b}{2}, b)^+.$$

Если выполнено только одно из этих условий, то называем эти согласованные последовательности *слабо синхронными*. Если же оба условия не выполнены, то такие согласованные последовательности *сильно синхронны*. Для лучшего понимания этих определений приведем примеры. Последовательности (1, 2) и (2, 4), хоть у них и четные шаги, не согласованные. Последовательности (3, 6) и (6, 10) асинхронны, (1, 2) и (2, 6) — слабо синхронны, (1, 2) и (4, 2) — сильно синхронны.

Говорим, что множество  $P_2 \in \mathbb{P}_2$  получено преобразованием подобия с коэффициентами  $m, n$  из множества  $P_1 \in \mathbb{P}_2$  и пишем  $P_1 \vdash_{m,n} P_2$ , если  $m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}$  и выполнено

$$P_2 = \{nx + m \mid x \in P_1\}.$$

Пусть  $k, x \in \mathbb{N}, k \geq 6$  — четное число,  $3 \leq x \leq k - 3$  — нечетное число. Тогда вводим обозначения:

$$\mathbf{A}(x, k) := \{n \in \mathbb{N} \mid n - \text{нечетно}; n > k - x;$$

$$\text{НОД}(n, x - 1, k - 1) = 1; \text{НОД}(n, k - 1) \nmid x - 1;$$

$\forall$  собственного делителя  $t$  числа  $n$  выполнено

$$t < k - x \text{ или } \text{НОД}(t, k - 1) \mid x - 1;$$

$$\mathbf{B}(x, k) := \{n \in \mathbb{N} \mid n - \text{нечетно}; n > k - 1;$$

$$\text{НОД}(n, k - x, k - 1) = 1; \text{НОД}(n, k - x) \nmid x - 1;$$

$\forall$  собственного делителя  $t$  числа  $n$  выполнено

$$t < k - 1 \text{ или } \text{НОД}(t, k - x) \mid x - 1.$$

**Теорема 1.** Пусть  $P'_1, P'_2 \in \mathbb{P}_2$ . Тогда граф  $G$  содержит ориентированное ребро  $(P'_2, P'_1)$  если и только если это ребро можно преобразованием подобия привести к одному из ребер  $(P_2, P_1)$  следующих 12 типов:

- 1)  $P_1 = (1, 2) \sqcup (2, 2)$  и **полоса**
- a)  $P_2 = (1, 2) \sqcup (4, 2)$ ,
- b)  $P_2 = (3, 2) \sqcup (2, 2)$ ,
- c)  $P_2 = (1, 2) \sqcup (2, 2p)$ ,  $p$  – простое,
- d)  $P_2 = (1, 2p) \sqcup (2, 2)$ ,  $p$  – простое,
- e)  $P_2 = (1, p) \sqcup (2, p)$ ,  $p > 2$ ,  $p$  – простое;
- 2)  $P_1 = (1, 0) \sqcup (3, 1)$  и **точка и полоса отступа 2**
- a)  $P_2 = (1, 0) \sqcup (4, 1)$ ,
- b)  $P_2 = (3, 0) \sqcup (4, 1)$ ,
- c)  $P_2 = (1, 2) \sqcup (6, 1)$ ,
- d)  $P_2 = (1, 3) \sqcup (3, 3)$ ,
- e)  $P_2 = (1, 2) \sqcup (4, 2p)$ ,  $p$  – простое;
- 3)  $P_1 = (1, 0) \sqcup (k + 1, 1)$ ,  $k > 2$  и **точка и полоса отступа  $> 2$**
- a)  $P_2 = (1, 0) \sqcup (k + 2, 1)$ ,
- b)  $P_2 = (k + 1, 0) \sqcup (k + 2, 1)$ ,
- c)  $P_2 = (1, k) \sqcup (k + x + 1, p)$ ,  $p$  – простое,  $0 < x < p$ ,  $p|k$ ,
- d)  $P_2 = (1, pm) \sqcup (k + 1, p)$ ,  $p$  – простое,  $p \nmid k$ ,  $pm \geq k$  и для всех  $m_1|m$  из  $m_1 \neq m$  следует  $pm_1 < k$ ,
- e)  $P_2 = (1, 0) \sqcup (k + 1, p)$ ,  $p$  – простое,  $p|k$ ,  $k \neq p$ ,  $k \neq 2p$ ;
- 4)  $P_1 = (a, 0) \sqcup (b, k)$ ,  $k \nmid (a - b)$  и **точка и внешняя полоса**
- a)  $P_2 = (a, 0) \sqcup (b + k, k)$ ,
- b)  $P_2 = (b, 0) \sqcup (b + k, k)$ ,
- c)  $P_2 = (a, 0) \sqcup (b, pk)$ ,  $p$  – простое;
- 5)  $P_1 = (a, x) \sqcup (b, y)$ , **две несогласованные**  
 $(a, x), (b, y)$  не согласованные и **полосы**
- a)  $P_2 = (a + x, x) \sqcup (b, y)$ ,
- b)  $P_2 = (a, x) \sqcup (b + y, y)$ ,
- c)  $P_2 = (a, px) \sqcup (b, y)$ ,  $p$  – простое,
- d)  $P_2 = (a, x) \sqcup (b, py)$ ,  $p$  – простое;
- 6)  $P_1 = (a, x) \sqcup (b, y)$ , **две асинхронные**  
 $(a, x), (b, y)$  асинхронные и **полосы**
- a)  $P_2 = (a + x, x) \sqcup (b, y)$ ,
- b)  $P_2 = (a, x) \sqcup (b + y, y)$ ,

- c)  $P_2 = (a, px) \sqcup (b, y)$ ,  $p$  – простое,  
d)  $P_2 = (a, x) \sqcup (b, py)$ ,  $p$  – простое;
- 7)  $P_1 = (1, 2) \sqcup (n + 1, 2n)$ , **две слабо синхронные**  
 $n > 1$  - нечетно и **полосы, случай 1**
- a)  $P_2 = (3, 2) \sqcup (n + 1, 2n)$ ,  
b)  $P_2 = (1, 2) \sqcup (3n + 1, 2n)$ ,  
c)  $P_2 = (1, 2p) \sqcup (n + 1, 2n)$ ,  $p$  – простое,  $p \neq n$ ,  
d)  $P_2 = (1, 2) \sqcup (n + 1, 2np)$ ,  $p$  – простое,  
e)  $P_2 = (1, n) \sqcup (2x + 1, 2p)$ ,  $p$  – простое,  $0 < x < p$ ,  $p|n$ ;
- 8)  $P_1 = (1, 2) \sqcup (k, 2n)$ , **две слабо синхронные**  
 $n > 1$  - нечетно,  $k \neq n + 1$  - четно и **полосы, случаи 2,3**
- a)  $P_2 = (3, 2) \sqcup (k, 2n)$ ,  
b)  $P_2 = (1, 2) \sqcup (k + 2n, 2n)$ ,  
c)  $P_2 = (1, 2p) \sqcup (k, 2n)$ ,  $p$  – простое,  $p \nmid n$  или  $p \mid k - 1$ ,  
d)  $P_2 = (1, 2) \sqcup (k, 2np)$ ,  $p$  – простое,  
e)  $P_2 = (1, 2p) \sqcup (\hat{k}, n)$ ,  $p$  – простое,  $p|n$ ,  $p \nmid k - 1$ ,  
 $\hat{k} = k$  при  $k < n + 1$  и  $\hat{k} = k - n$  при  $k > n + 1$ ;
- 9)  $P_1 = (1, 2n) \sqcup (n + 1, 2)$ , **две слабо синхронные**  
 $n > 1$  - нечетно и **полосы, случай 4**
- a)  $P_2 = (1 + 2n, 2n) \sqcup (n + 1, 2)$ ,  
b)  $P_2 = (1, 2n) \sqcup (n + 3, 2)$ ,  
c)  $P_2 = (1, 2np) \sqcup (n + 1, 2)$ ,  $p$  – простое,  
d)  $P_2 = (1, 2n) \sqcup (n + 1, 2p)$ ,  $p$  – простое,  $p \neq n$ ,  
e)  $P_2 = (1, n) \sqcup (2x + n + 1, 2p)$ ,  $p$  – простое,  $0 < x < p$ ,  $p|n$ ;
- 10)  $P_1 = (1, 2n) \sqcup (k, 2)$ , **две слабо синхронные**  
 $n > 1$  - нечетно,  $k < n + 1$  - четно и **полосы, случай 5**
- a)  $P_2 = (1 + 2n, 2n) \sqcup (k, 2)$ ,  
b)  $P_2 = (1, 2n) \sqcup (k + 2, 2)$ ,  
c)  $P_2 = (1, 2np) \sqcup (k, 2)$ ,  $p$  – простое,  
d)  $P_2 = (1, 2n) \sqcup (k, 2p)$ ,  $p$  – простое,  $p \nmid n$  или  $p \mid k - 1$ ,  
e)  $P_2 = (1, n) \sqcup (k, 2p)$ ,  $p$  – простое,  $p|n$ ,  $p \nmid k - 1$ ;
- 11)  $P_1 = (1, 2n) \sqcup (k, 2)$ , **две слабо синхронные**  
 $n > 1$  - нечетно,  $k > n + 1$  - четно и **полосы, случай 6**

- a)  $P_2 = (1 + 2n, 2n) \sqcup (k, 2)$ ,
- b)  $P_2 = (1, 2n) \sqcup (k + 2, 2)$ ,
- c)  $P_2 = (1, 2np) \sqcup (k, 2)$ ,  $p$  – простое,
- d)  $P_2 = (1, 2n) \sqcup (k, 2p)$ ,  $p$  – простое;
- 12)  $P_1 = (1, 2) \sqcup (k, 2)$ , **две сильно синхронные**  
 $k \geq 6$  - *четно и* **полосы**
- a)  $P_2 = (3, 2) \sqcup (k, 2)$ ,
- b)  $P_2 = (1, 2) \sqcup (k + 2, 2)$ ,
- c)  $P_2 = (1, 2p) \sqcup (k, 2)$ ,  $p$  – простое,  $2p < k - 2$ ,
- d)  $P_2 = (1, 2) \sqcup (k, 2p)$ ,  $p$  – простое,
- e)  $P_2 = (1, 0) \sqcup (k - 1, 1)$ ,
- f)  $P_2 = (1, k-1) \sqcup (x, n)$ ,  $3 \leq x \leq k-3$  – нечетное,  $n \in A(x, k)$ ,
- g)  $P_2 = (1, n) \sqcup (x, k-x)$ ,  $3 \leq x \leq k-3$  – нечетное,  $n \in B(x, k)$ .

## Доказательство утверждений

**Лемма 1. Критерий пересечения.** Для любых  $a, c \in \mathbb{N}_0$  и  $b, d \in \mathbb{N}$  верно

$$(a, b) \cap (c, d) \neq \emptyset \iff a \equiv c \pmod{\text{НОД}(b, d)}.$$

Доказательство леммы см. в [1].

**Лемма 2. О подобии.** Пусть  $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}_2$  и  $P_1 \vdash_{m,n} P_3$ ,  $P_2 \vdash_{m,n} P_4$ . Тогда ребро  $(P_1, P_2)$  проводится в графе  $G$  тогда и только тогда, когда ребро  $(P_3, P_4)$  проводится в графе  $G$ .

*Доказательство.*

Нам известно, что

$$P_3 = \{nx + m \mid x \in P_1\}, \quad (1)$$

$$P_4 = \{nx + m \mid x \in P_2\}. \quad (2)$$

Пусть ребро  $(P_1, P_2)$  проводится в графе  $G$ , то есть

1)  $P_1 \subsetneq P_2$ ;

2) не существует  $P \in \mathbb{P}_2$  такого, что  $P_1 \subsetneq P \subsetneq P_2$ .

Из (1), (2) тогда тривиально следует, что  $P_3 \subsetneq P_4$ . Пусть, тем не менее, существует множество

$$P_5 := (a, b) \sqcup (c, d) \in \mathbb{P}_2, \quad (3)$$

для которого

$$P_3 \subsetneq P_5 \subsetneq P_4. \quad (4)$$

Из (2), (3) и (4) тривиально получаем  $(a, b), (c, d) \subset (m, n)$  и значит можно рассмотреть множество

$$P_6 := \left( \frac{a-m}{n}, \frac{b}{n} \right) \sqcup \left( \frac{c-m}{n}, \frac{d}{n} \right). \quad (5)$$

Из (1), (2), (4) и (5) получаем тогда, что  $P_1 \subsetneq P_6 \subsetneq P_2$ , но этого быть не может. Значит в графе  $G$  есть ребро  $(P_3, P_4)$ .

Обратно утверждение доказывается еще проще. Пусть ребро  $(P_3, P_4)$  проводится в графе  $G$ , то есть

1)  $P_3 \subsetneq P_4$ ;

2) не существует  $P \in \mathbb{P}_2$  такого, что  $P_3 \subsetneq P \subsetneq P_4$ .

Из (1), (2) тривиально следует, что  $P_1 \subsetneq P_2$ . Пусть, тем не менее, существует множество

$$P_7 := (a, b) \sqcup (c, d) \in \mathbb{P}_2, \quad (6)$$

для которого

$$P_1 \subsetneq P_7 \subsetneq P_2. \quad (7)$$

Тогда рассмотрим множество

$$P_8 := (an + m, bn) \sqcup (cn + m, dn). \quad (8)$$

Из (1), (2), (7) и (8) получаем  $P_3 \subsetneq P_8 \subsetneq P_4$ , а этого быть не может. Значит в графе  $G$  есть ребро  $(P_1, P_2)$ . ■

**Замечание.** Эта лемма позволяет нам при описании ребер графа  $G$  вместо ребер произвольного вида исследовать лишь ребра «простого» вида, эквивалентные им с точностью до подобия. Это позволяет заметно упростить производимые выкладки.

**Лемма 3. О типах вложения.** Пусть  $(e, f) \subset (a, b) \sqcup (c, d)$ , где  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}$ . Тогда имеет место одно из следующих утверждений:

- $(e, f) \subset (a, b)$ ;
- $(e, f) \subset (c, d)$ ;
- $(e, 2f) \subset (a, b)$  и  $(e + f, 2f) \subset (c, d)$ ;
- $(e + f, 2f) \subset (a, b)$  и  $(e, 2f) \subset (c, d)$ .

*Доказательство.*

Возможны 4 случая:

$$a)e \in (a, b), e + f \in (a, b); \quad b)e \in (a, b), e + f \in (c, d);$$

$$c)e \in (c, d), e + f \in (a, b); \quad d)e \in (c, d), e + f \in (c, d).$$

В случае  $a)$ , очевидно, имеет место первое утверждение.

В случае  $b)$  посмотрим на число  $e + 2f$ . Предположим,

$$e + 2f \in (c, d).$$

Тогда  $e + fb \in (a, b)$  и  $e + fb \in (c, d)$ . Это противоречит попарному непересечению  $(a, b)$  и  $(c, d)$ . Значит,  $e + 2f \in (a, b)$ , т.е.  $(e, 2f) \subset (a, b)$ . Посмотрим теперь на число  $e + 3f$ . Допустим, что

$$e + 3f \in (a, b).$$

Тогда  $e + f + fd \in (a, b)$  и  $e + f + fd \in (c, d)$ . Это противоречит попарному непересечению  $(a, b)$  и  $(c, d)$ . Значит,  $e + 3f \in (c, d)$ , т.е.  $(e + f, 2f) \subset (c, d)$ . Поэтому верно третье утверждение.

Случаи  $c, d$  реализуют соответственно четвертое и второе утверждения и рассматриваются аналогично. ■

**Лемма 4. О зигзаге.** Пусть  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}$  и

$$(e, 2f) \subset (a, b), (e + f, 2f) \subset (c, d), (a, b) \cap (c, d) = \emptyset.$$

Тогда числа  $b, d$  четны и

$$(e, f) \subseteq \left( (a, b) \cap \left( c + \frac{d}{2}, d \right)^+ \right) \sqcup \left( (c, d) \cap \left( a + \frac{b}{2}, b \right)^+ \right).$$

*Доказательство.*

Прежде всего заметим, что прогрессии

$$(a, b) \cap \left( c + \frac{d}{2}, d \right)^+ \text{ и } (c, d) \cap \left( a + \frac{b}{2}, b \right)^+$$

попарно не пересекаются, так как  $(a, b) \cap (c, d) = \emptyset$ . Кроме того,

$$2f = bx = dy$$

для некоторых  $x, y \in \mathbb{N}$ . Допустим, что  $x$  четно. Тогда  $f = b\frac{x}{2}$  и значит  $e + f \in (a, b)$ , ведь  $e \in (a, b)$ . Но это противоречит тому, что

$$(a, b) \cap (c, d) = \emptyset.$$

Значит  $x$  нечетно. Аналогично,  $y$  нечетно. Поэтому  $b$  и  $d$  обязательно будут четны. Докажем, что

$$e + 2f \in \left( c + \frac{d}{2}, d \right)^+.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} e + 2f - c - \frac{d}{2} &= (e + f - c) + (f - \frac{d}{2}) = (e + f - c) + (\frac{d}{2}y - \frac{d}{2}) = \\ &= (e + f - c) + \frac{d}{2}(y - 1). \end{aligned}$$

Первое слагаемое делится на  $d$ , так как  $e + f \in (c, d)$ . Второе слагаемое делится на  $d$ , так как  $y$  нечетно. Поэтому  $e + 2f \in (c + \frac{d}{2}, d)^+$ . Отсюда и из делимости  $2f$  на  $d$  получаем

$$(e, 2f) \subseteq (a, b) \cap (c + \frac{d}{2}, d)^+.$$

Аналогично доказывается, что

$$(e + f, 2f) \subseteq (c, d) \cap (a + \frac{b}{2}, b)^+.$$

Доказательство леммы завершает очевидное равенство

$$(e, f) = (e, 2f) \sqcup (e + f, 2f).$$

■

**Лемма 5. Об общем виде слабой синхронизации.** Пусть есть множества

$$(a, x), (b, y) \in \mathbb{P}^+$$

и они слабо синхронны. Тогда

$$(a, x) \sqcup (b, y)$$

можно преобразованием подобия перевести в одно из множеств

$$(1, 2) \sqcup (k, 2n), \quad (1, 2n) \sqcup (k, 2),$$

где  $k, n \in \mathbb{N}$ ,  $k$  — четно,  $n > 1$  — нечетно.

*Доказательство.*

Слабая синхронность последовательностей  $(a, x), (b, y)$  означает, во-первых, что они не пересекаются. Во-вторых, что числа  $x$  и  $y$  четны. В-третьих, должно быть выполнено

$$(a, x) \cap (b + \frac{y}{2}, y)^+ \neq \emptyset \quad \text{и} \quad (b, y) \cap (a + \frac{x}{2}, x)^+ \neq \emptyset.$$

В-четвертых, одно из условий

$$(a, x) \not\subset (b + \frac{y}{2}, y)^+ \text{ и } (b, y) \not\subset (a + \frac{x}{2}, x)^+$$

верно, а второе — нет. Пусть, без ограничения общности,

$$(a, x) \not\subset (b + \frac{y}{2}, y)^+ \text{ и } (b, y) \subset (a + \frac{x}{2}, x)^+.$$

Отсюда следует, что  $b$  представимо в виде  $a + \frac{x}{2} + mx$  для некоторого  $m \in \mathbb{Z}$ . И что  $y$  кратно  $x$ , т.е.  $y = cx$  для некоторого  $c \in \mathbb{N}$ . Покажем, что  $c$  нечетно. Пусть это не так и  $c = 2l, l \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$(a, x) \cap (b + \frac{y}{2}, y)^+ = (a, x) \cap (a + \frac{x}{2} + mx + lx, cx) = \emptyset,$$

а этого быть не может. Далее,  $c$  не может быть равно 1, так как в этом случае получили бы

$$(b + \frac{y}{2}, y)^+ = (a + \frac{x}{2} + mx + \frac{x}{2}, x)^+ = (a + x + mx, x)^+ \supset (a, x).$$

Значит

$$(a, x) \sqcup (b, y) = (a, x) \sqcup (a + \frac{x}{2} + mx, cx) \quad (*).$$

Если  $m \geq 0$ , то параллельным переносом сдвигаем множество  $(*)$  в

$$(\frac{x}{2}, x) \sqcup (x + mx, cx).$$

Осталось только сжать конструкцию в  $\frac{x}{2}$  раз и получить  $(1, 2) \sqcup (2 + 2m, 2c)$ . Если же  $m < 0$ , то параллельным переносом нужно сдвинуть множество  $(*)$  в

$$(-mx, x) \sqcup (\frac{x}{2}, cx).$$

Теперь сжимаем конструкцию в  $\frac{x}{2}$  раз и получаем  $(1, 2c) \sqcup (-2m, 2)$ . ■

**Лемма 6. Об общем виде сильной синхронизации.** Пусть есть множества

$$(a, x), (b, y) \in \mathbb{P}^+$$

и они сильно синхронны. Тогда

$$(a, x) \sqcup (b, y)$$

можно преобразованием подобия перевести в множество вида

$$(1, 2) \sqcup (k, 2),$$

где  $k \in \mathbb{N}$  и  $k$  — чётно.

*Доказательство.*

Сильная синхронность последовательностей  $(a, x), (b, y)$  означает, во-первых, что они не пересекаются. Во-вторых, что числа  $x$  и  $y$  чётны. В-третьих, должно быть выполнено

$$(a, x) \subset (b + \frac{y}{2}, y)^+ \quad \text{и} \quad (b, y) \subset (a + \frac{x}{2}, x)^+.$$

Тогда  $y$  кратно  $x$  и  $x$  кратно  $y$ , т.е.  $y = x$ . Кроме того,  $b$  представимо в виде  $a + \frac{x}{2} + tx$  для некоторого  $t \in \mathbb{Z}$ . Если  $t \geq 0$ , то параллельным переносом сдвигаем множество

$$(a, x) \sqcup (b, y) = (a, x) \sqcup (a + \frac{x}{2} + tx, x) \quad (**)$$

в

$$(\frac{x}{2}, x) \sqcup (x + tx, x)$$

и, сжимая конструкцию в  $\frac{x}{2}$  раз, окончательно получаем  $(1, 2) \sqcup (2 + 2t, 2)$ . Если же  $t < 0$ , то параллельным переносом нужно сдвинуть множество  $(**)$  в

$$(-tx, x) \sqcup (\frac{x}{2}, x)$$

и, сжав конструкцию в  $\frac{x}{2}$  раз, получить  $(1, 2) \sqcup (-2t, 2)$ .

■

**Лемма 7. О полосе.** Пусть  $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$  и  $P_1 = \mathbb{N} = (1, 2) \sqcup (2, 2)$ . Тогда ребро от  $P_2$  к  $P_1$  в графе  $G$  проводится тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- 1)  $P_2 = (1, 2) \sqcup (4, 2)$ ;
- 2)  $P_2 = (3, 2) \sqcup (2, 2)$ ;
- 3)  $P_2 = (1, 2) \sqcup (2, 2p)$ ,  $p$  — простое;
- 4)  $P_2 = (1, 2p) \sqcup (2, 2)$ ,  $p$  — простое;
- 5)  $P_2 = (1, p) \sqcup (2, p)$ ,  $p > 2$ ,  $p$  — простое.

*Доказательство.*

Ясно, что  $P_1$  в графе  $G$  соединено ребрами с множествами

$$X := (1, 2) \sqcup (4, 2) \text{ и } Y := (3, 2) \sqcup (2, 2),$$

потому что они получаются из  $P_1$  удалением одного элемента. Эти ребра дают нам **кандидатов (1) и (2)**. Допустим теперь, что в  $G$  есть ребро от  $P_1$  к

$$P_2 = (c, x) \sqcup (d, y)$$

и  $P_2 \neq X, Y$ . Тогда обязательно  $c = 1, d = 2$  или  $c = 2, d = 1$ , так как иначе между  $P_1$  и  $P_2$  обязательно находилось бы одно из множеств  $X, Y$ . Очевидно, что  $x > 0$  и  $y > 0$  (иначе между  $P_1$  и  $P_2$  можно было бы вставить  $(c, 2y) \sqcup (d, y)$  или  $(c, x) \sqcup (d, 2x)$ ). Обозначим через  $z$  наибольший общий делитель чисел  $x$  и  $y$ . Из леммы 1 и попарного непересечения прогрессий  $(c, x)$  и  $(d, y)$  следует, что  $z > 1$ . Пусть

$$x := zx_1, \quad y := zy_2.$$

Разберем **два случая**:  $z = 2$  и  $z > 2$ . **В первом случае**, - когда  $z = 2$ , обязательно выполнено  $x_1 > 1$  или  $y_1 > 1$ , иначе  $P_1 = P_2$ . Допустим, что  $x_1 > 1$ . Тогда

$$P_2 \subset (1, 2x_1) \sqcup (2, 2) \subsetneq P_1.$$

Значит  $P_2 = (1, 2x_1) \sqcup (2, 2)$ , т.е.  $y_1 = 1$ . Также очевидно, что  $x_1$  - простое число, так как иначе для любого собственного делителя  $x_2 > 1$  числа  $x_1$  имели бы

$$P_2 \subsetneq (1, 2x_2) \sqcup (2, 2) \subsetneq P_1.$$

Получили **кандидата (4)**. Если же  $y_1 > 1$ , то аналогично получаем **кандидата (3)**. **Во втором случае**, - когда  $z > 2$ , получаем

$$P_2 = (1, zx_1) \sqcup (2, zy_1) \subset (1, z) \sqcup (2, z) \subsetneq P_1.$$

Значит  $x_1 = y_1 = 1$ . Осталось заметить, что  $z$  - простое число, так как иначе для любого собственного делителя  $z_1 > 1$  числа  $z$  имели бы

$$P_2 \subsetneq (1, z_1) \sqcup (2, z_1) \subsetneq P_1.$$

Получили **кандидата (5)**.

Осталось проверить, что все  $P_2$  из **серий (1 – 5)** попарно невложимы друг в друга. Для **серий (1 – 2)** это очевидно. Так как в  $P_2$  из **серий (3 – 5)** есть числа 1 и 2, то они не вкладываются в  $P_2$  из **серии (1 – 2)**. Далее, **серия (3)** не вкладывается в **серию (4)**, так как в первой есть 3, а во второй нет. Аналогично, из-за числа 4 **серия (4)** не вкладывается в **серию (3)**. **Серия (3)** не вкладывается в **серию (5)** из-за числа 3. Аналогично, **серия (5)** не вкладывается в **серию (3)** из-за числа  $1+p$ . **Серия (4)** не вкладывается в **серию (5)**, так как в первой есть 4 и 6, а во второй хотя бы одного из этих чисел нет. **Серия (5)** не вкладывается в **серию (4)**, так как в первой, в отличие от второй, есть  $2+p$ . Разные  $P_2$  из **серии (3)** не вкладываются друг в друга, так как иначе

$$(1, 2) \sqcup (2, 2p_1) \subset (1, 2) \sqcup (2, 2p_2),$$

т.е.  $p_1$  делится на  $p_2$  и, из их простоты,  $p_1 = p_2$ . Точно так же показывается попарная невложимость  $P_2$  из **серий (4 – 5)**.

■

**Лемма 8. О точке и полосе отступа 2.** Пусть  $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$  и  $P_1 = (1, 0) \sqcup (3, 1)$ . Тогда ребро от  $P_2$  к  $P_1$  в графе  $G$  проводится тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- 1)  $P_2 = (1, 0) \sqcup (4, 1)$ ;
- 2)  $P_2 = (3, 0) \sqcup (4, 1)$ ;
- 3)  $P_2 = (1, 2) \sqcup (6, 1)$ ;
- 4)  $P_2 = (1, 3) \sqcup (3, 3)$ ;
- 5)  $P_2 = (1, 2) \sqcup (4, 2p)$ ,  $p$  – простое.

*Доказательство.*

Ясно, что  $P_1$  в графе  $G$  соединено ребром с множествами

$$X := (1, 0) \sqcup (4, 1), \quad Y := (3, 0) \sqcup (4, 1), \quad Z := (1, 2) \sqcup (6, 1),$$

так как они получаются из  $P_1$  удалением одного элемента. Получили **кандидатов (1 – 3)**. Рассмотрим теперь в решетке  $G$  какое-нибудь ребро  $P_2 \rightarrow P_1$  другого типа. Пусть в этом ребре

$$P_2 = (c, d) \sqcup (e, f).$$

Так как в  $G$  есть ребра из **серий (1 – 3)**, то  $1, 3, 4 \in P_2$ . **Возможны два случая. В первом из них  $c = 1$  и  $d = 2$ .** Тогда обязательно  $e = 4$ . Ясно, что  $f \neq 0$ , так как, например, верно

$$P_2 = (1, 2) \sqcup (4, 0) \subsetneq (1, 2) \sqcup (4, 4) \subsetneq P_1.$$

Ясно, что  $f$  делится на 2, так как прогрессии  $(1, 2)$  и  $(4, f)$  не пересекаются. Обозначим через  $p$  произвольный простой делитель числа  $\frac{f}{2}$ . Так как

$$P_2 = (1, 2) \sqcup (4, f) \subset (1, 2) \sqcup (4, 2p) \subsetneq P_1,$$

то  $f = 2p$  для некоторого простого числа  $p$ . Получили **кандидата (5)**. Рассмотрим теперь **второй возможный случай**, в котором  $c = 1$  и  $d = 3$ . Тогда обязательно  $e = 3$ . Ясно, что  $f \neq 0$ , так как, например, верно

$$P_2 = (1, 3) \sqcup (3, 0) \subsetneq (1, 3) \sqcup (3, 3) \subsetneq P_1.$$

Ясно, что  $f$  делится нацело на 3, так как прогрессии  $(1, 3)$  и  $(3, f)$  не пересекаются. Тогда

$$P_2 = (1, 3) \sqcup (3, f) \subset (1, 3) \sqcup (3, 3) \subsetneq P_1.$$

Значит  $f = 3$ . Получили **кандидата (4)**.

Осталось проверить, что все  $P_2$  из **(1 – 5)** попарно невлости друг в друга. Для **(1 – 3)** это очевидно. Так как в  $P_2$  из **(4 – 5)** есть числа 1, 3 и 4, то они не вкладываются в  $P_2$  из **(1 – 3)**. **Представитель (4)** не вкладывается в **представителя (5)**, так как иначе

$$(1, 3) \sqcup (3, 3) \subset (1, 2) \sqcup (4, 2p),$$

чего быть не может из-за числа 6. **Представитель (5)** не вкладывается в **представителя (4)**, так как иначе было бы

$$(1, 2) \sqcup (4, 2p) \subset (1, 3) \sqcup (3, 3),$$

чего быть не может из-за числа 5. Наконец, **представитель (5)** не вкладывается в другого **представителя (5)**, так как иначе было бы

$$(1, 2) \sqcup (4, 2p_1) \subset (1, 2) \sqcup (4, 2p_2),$$

что, в силу простоты и различия чисел  $p_1$  и  $p_2$ , невозможно.



**Лемма 9. О точке и полосе отступа больше 2.** Пусть  $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$  и

$$P_1 = (1, 0) \sqcup (k + 1, 1), \quad k > 2.$$

Тогда ребро от  $P_2$  к  $P_1$  в графе  $G$  проводится тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- 1)  $P_2 = (1, 0) \sqcup (k + 2, 1)$ ;
- 2)  $P_2 = (k + 1, 0) \sqcup (k + 2, 1)$ ;
- 3)  $P_2 = (1, k) \sqcup (k + x + 1, p)$ ,  $p$  — простое,  $0 < x < p$ ,  $p|k$ ;
- 4)  $P_2 = (1, pt) \sqcup (k + 1, p)$ ,  $p$  — простое,  $p \nmid k$ ,  $pt \geq k$  и для всех  $m_1|t$  из  $m_1 \neq t$  следует  $pt_1 < k$ ;
- 5)  $P_2 = (1, 0) \sqcup (k + 1, p)$ ,  $p$  — простое,  $p|k$ ,  $k \neq p$ ,  $k \neq 2p$ .

*Доказательство.*

Ясно, что  $P_1$  в графе  $G$  соединено ребром с множествами

$$X := (1, 0) \sqcup (k + 2, 1), \quad Y := (k + 1, 0) \sqcup (k + 2, 1),$$

так как они получаются из  $P_1$  удалением одного элемента. Получили **кандидатов (1 – 2)**. Рассмотрим теперь в решетке  $G$  какое-нибудь ребро  $P_2 \rightarrow P_1$  другого типа. Пусть в этом ребре

$$P_2 = (c, d) \sqcup (e, f).$$

Так как в  $G$  есть ребра типов (1 – 2), то  $1, k + 1 \in P_2$ . **Разбираем случаи. В первом из них**  $d = f = 0$ . Тогда

$$P_2 \subsetneq (1, 0) \sqcup (k + 1, 2) \subsetneq P_1,$$

чего быть не может. **Во втором случае** одно из чисел  $d, f$  равно 0, а второе — не равно. Без ограничения общности,  $d = 0, f > 0$ . Здесь возникает **пара вариантов. В первом из них**  $c = 1$  и  $e = k + 1$ , т.е.

$$P_2 = (1, 0) \sqcup (k + 1, f).$$

Здесь число  $f$  будет простым, так как в противном случае

$$P_2 \subsetneq (1, 0) \sqcup (k + 1, f_1) \subsetneq P_1$$

для любого собственного делителя  $f_1$  числа  $f$ . Значит  $f = p$ . Покажем, что  $k \neq p$  и  $k \neq 2p$ . Первое верно, так как при  $p = k > 2$  получаем

$$P_2 = (1, 0) \sqcup (p + 1, p) \subsetneq (1, p) \sqcup (p + 2, p).$$

Второе верно, так как при  $k = 2p$  мы имели бы

$$P_2 = (1, 0) \sqcup (2p + 1, p) = (1, 2p) \sqcup (3p + 1, 2p),$$

а этот кандидат уже учтен в серии (3). Теперь это уже точно кандидат из серии (5). Второй вариант  $c = k + 1$  и  $e = 1$ , когда

$$P_2 = (k + 1, 0) \sqcup (1, f),$$

невозможен, так как

$$P_2 \subsetneq (k + 1, 2f) \sqcup (1, f) \subsetneq P_1.$$

**В третьем случае**  $d > 0, f > 0$  снова возможны два варианта: или  $c = 1, d = k$ , или  $c = 1, e = k + 1$ . **В первом из них**

$$P_2 = (1, k) \sqcup (e, f).$$

Из попарного непересечения  $(1, k)$  и  $(e, f)$  и из леммы 1 следует, что  $e - 1$  не делится на  $\text{НОД}(f, k)$ , т.е. у чисел  $f$  и  $k$  существует некоторый общий простой делитель  $p$ , не делящий  $e - 1$ . Но тогда

$$P_2 \subseteq (1, k) \sqcup (e, p) \subsetneq P_1.$$

По лемме 1 прогрессии здесь не пересекаются, так как  $\text{НОД}(k, p) = p$  и  $e - 1$  не делится на  $p$ . И  $(1, k) \sqcup (e, p) \subsetneq P_1$ , так как  $k > 2$ . Значит

$$P_2 = (1, k) \sqcup (e, p)$$

и  $e - 1$  не делится на  $p$ , т.е.  $e$  представимо в виде  $k + x + 1$ , где  $x$  не делится на  $p$ . Но  $x < p$ , так как иначе

$$P_2 \subsetneq (1, k) \sqcup (e - p, p) \subsetneq P_1.$$

Получили кандидата (3). **Разбираем теперь второй вариант**, где  $c = 1, e = k + 1$ , т.е.

$$P_2 = (1, d) \sqcup (k + 1, f).$$

Из попарного непересечения этих прогрессий и леммы 1 следует, что  $k$  не делится на  $\text{НОД}(d, f)$ , т.е. у чисел  $d$  и  $f$  существует некоторый общий простой делитель  $p$ , не делящий  $k$ . Но тогда

$$P_2 \subseteq (1, d) \sqcup (k + 1, p) \subsetneq P_1.$$

По лемме 1 прогрессии здесь не пересекаются, так как  $\text{НОД}(d, p) = p$  и  $k$  не делится на  $p$ . Кроме того,

$$(1, d) \sqcup (k + 1, p) \subsetneq P_1,$$

так как  $d > k > 2$ . Значит

$$P_2 = (1, pm) \sqcup (k + 1, p).$$

Очевидно,  $pm \geq k$ . Осталось заметить, что ни для какого собственного делителя  $m_1$  числа  $m$  не может быть выполнено  $pm_1 \geq k$ , ведь иначе было бы

$$P_2 \subsetneq (1, pm_1) \sqcup (k + 1, p) \subsetneq P_1.$$

Почили кандидата (4).

Проверим теперь, что все  $P_2$  из серий (1 – 5) попарно невложимы друг в друга. Очевидно, для (1 – 2) это верно. Так как в  $P_2$  из серий (3 – 5) есть числа 1 и  $k + 1$ , то они не вкладываются в  $P_2$  из серий (1 – 2). Представитель (3) не может вкладываться в другого представителя (3), так как иначе было бы

$$(1, k) \sqcup (k + x_1 + 1, p_1) \subset (1, k) \sqcup (k + x_2 + 1, p_2).$$

Тогда  $p_1$  делилось бы нацело на  $p_2$ , т.е., из простоты  $p_1$  и  $p_2$ ,  $p_1 = p_2$ . В свою очередь,  $x_1 - x_2$  делилось бы нацело на  $p_1 = p_2$ , чего не может быть в силу ограничений

$$0 < x_1, x_2 < p_1 = p_2.$$

Представитель (3) не может вкладываться в представителя (4), так как иначе было бы

$$(1, k) \sqcup (k + x + 1, p_1) \subset (1, p_2 m) \sqcup (k + 1, p_2).$$

Здесь  $k$  делится на  $p_1$  и не делится на  $p_2$ . Значит  $p_1 \neq p_2$ . Так как прогрессии  $(1, k)$  и  $(k + 1, p_2)$  пересекаются в точке  $k + 1$ , то тогда

по лемме 3 число  $2k$  делилось бы нацело на  $p_2$ . Но  $k$  не делится на  $p_2$ , поэтому обязательно было бы  $p_2 = 2$ . Получаем

$$(1, k) \sqcup (k + x + 1, p_1) \subsetneq (1, 2m) \sqcup (k + 1, 2).$$

Так как  $p_1 \neq p_2 = 2$ , то  $p_1 > 2$  и  $(k + x + 1, p_1) \not\subset (k + 1, 2)$ . Значит по лемме 3 число  $2p_1$  делится на  $2m$ . Но  $2m > k > 2$ , т.е.  $m \neq 1$ . Значит  $m = p_1$ . Но  $k$  делится на  $p_1$  и значит числа из  $(k + x + 1, p_1)$  несравнимы по модулю  $p_1$  с числами из  $(1, 2m)$ . Получили противоречие с условием

$$(k + x + 1, p_1) \subset (1, 2m) \sqcup (k + 1, 2).$$

**Представитель (3)** не может вкладываться в **представителя (5)**, так как иначе было бы

$$(1, k) \sqcup (k + x + 1, p_1) \subset (k + 1, p_2) \sqcup (1, 0).$$

Тогда  $p_1$  делится на  $p_2$ , т.е., из простоты  $p_1$  и  $p_2$ ,  $p_1 = p_2$ . Но это означает, что числа из прогрессий  $(k + x + 1, p_1)$  и  $(k + 1, p_2)$  дают разные остатки по модулю  $p_1 = p_2$ , чего быть не может. **Представитель (4)** не может вкладываться в **представителя (3)**, так как иначе было бы

$$(1, p_2m) \sqcup (k + 1, p_2) \subset (1, k) \sqcup (k + x + 1, p_1).$$

Так как прогрессии  $(k + 1, p_2)$  и  $(1, k)$  пересекаются в точке  $k + 1$ , то по лемме 3 тогда получили бы, что  $2p_2$  делится нацело на  $k$ , чего быть не может, ведь  $k$  не делится на  $p_2$  и  $k > 2$ . **Представитель (4)** не может вкладываться в **представителя (4)**, так как иначе было бы

$$(1, p_1m_1) \sqcup (k + 1, p_1) \subset (1, p_2m_2) \sqcup (k + 1, p_2).$$

Ясно, что прогрессии  $(k + 1, p_1)$  и  $(k + 1, p_2)$  пересекаются в точке  $k + 1$ , то есть по лемме 3 число  $2p_1$  делится на  $p_2$ . Если бы  $p_2$  было равно 2, то по лемме 3 получилось бы, что число  $2p_1$  делится на  $2m_2$ . Но  $2m_2 > k > 2$ , т.е.  $m_2 > 1$  и  $m_2 = p_1$ . А это противоречит тому, что

$$1 + k + p_1 \in (1, p_2m_2) = (1, 2m_2) = (1, 2p_1),$$

ведь  $k$  не делится на  $p_1$ . Значит  $p_1 = p_2$ . Но тогда элементы множеств  $(1, p_1 m_1)$  и  $(k + 1, p_2)$  дают разные остатки по модулю  $p_1$ . Значит

$$(1, p_1 m_1) \subset (1, p_2 m_2) = (1, p_1 m_2),$$

т.е.  $m_2$  является собственным делителем  $m_1$ , что, в силу наложенных на  $(d)$  ограничений, невозможно. **Представитель (4)** не может вкладываться в **представителя (5)**, так как иначе имели бы

$$(1, p_1 m) \sqcup (k + 1, p_1) \subset (k + 1, p_2) \sqcup (1, 0)$$

и  $p_1 m$  делилось бы на  $p_2$ , т.е., из простоты  $p_1$  и  $p_2$ , получаем  $p_1 = p_2$ . А это невозможно, ведь  $k$  не делится на  $p_1$  и элементы из  $(1, p_1 m)$  и  $(k + 1, p_2) = (k + 1, p_1)$  дают разные остатки по модулю  $p_1$ , т.е. множества не пересекаются. **Представитель (5)** не может вкладываться в **представителя (3)**, так как иначе имели бы

$$(1, 0) \sqcup (k + 1, p_1) \subset (1, k) \sqcup (k + x + 1, p_2).$$

Прогрессии  $(k + 1, p_1)$  и  $(1, k)$  пересекаются в точке  $k + 1$  и тогда по лемме 3 число  $2p_1$  делилось бы нацело на  $k$ , но этого быть не может, ведь  $k \neq p_1$  и  $k \neq 2p_1$ . **Представитель (5)** не может вкладываться в **представителя (4)**, так как иначе имели бы

$$(1, 0) \sqcup (k + 1, p_1) \subset (k + 1, p_2) \sqcup (1, p_2 m).$$

Прогрессии  $(k + 1, p_1)$  и  $(k + 1, p_2)$  пересекаются в точке  $k + 1$  и по лемме 3 число  $2p_1$  делится нацело на  $p_2$ . Но  $k$  делится на  $p_1$  и не делится на  $p_2$ , т.е.  $p_1 \neq p_2$  и поэтому  $p_2 = 2$ . Тогда

$$(k + 1 + p_1, 2p_1) \subset (1, 2m)$$

и поэтому  $m = p_1$ . Но, в силу ограничений на  $(e)$ , это невозможно, ведь  $2p_1 = p_2 m \geq k$ . Наконец, **представитель (5)** не может вкладываться в другого **представителя (5)**, так как иначе имели бы

$$(a, 0) \sqcup (a + kb, p_1 b) \subset (a, 0) \sqcup (a + kb, p_2 b),$$

т.е., в силу простоты  $p_1$  и  $p_2$ ,  $p_1 = p_2$ , чего быть не может.

■

**Лемма 10. О точке и внешней полосе.** Пусть  $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$  и

$$P_1 = (a, 0) \sqcup (b, k), \quad k \nmid (a - b).$$

Тогда ребро от  $P_2$  к  $P_1$  в графе  $G$  проводится тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- 1)  $P_2 = (a, 0) \sqcup (b + k, k)$ ;
- 2)  $P_2 = (b, 0) \sqcup (b + k, k)$ ;
- 3)  $P_2 = (a, 0) \sqcup (b, pk)$ ,  $p$  — простое.

*Доказательство.*

Ясно, что  $P_1$  в графе  $G$  соединено ребром с множествами

$$X := (a, 0) \sqcup (b + k, k), \quad Y := (b, 0) \sqcup (b, k),$$

так как они получаются из  $P_1$  удалением одного элемента. Получили **кандидатов (1 – 2)**. Рассмотрим теперь в решетке  $G$  какое-нибудь ребро  $P_2 \rightarrow P_1$  другого типа. Пусть в этом ребре

$$P_2 = (c, d) \sqcup (e, f).$$

Ясно, что  $a, b \in P_2$ . Пусть, без ограничения общности,  $a \in (c, d)$ . И пусть для некоторого  $x \in (b, k)$  верно  $x \in (c, d)$ . Но тогда  $(c, d)$  лежит в  $(b, k)$  и значит  $d$  делится нацело на  $k$ . С другой стороны,  $a, x \in (c, d)$ , т.е.  $x - a$  делится нацело на  $d$ , а значит и на  $k$ . Но  $x \in (b, k)$  и из-за этого по модулю  $k$  дает такой же остаток, как и  $b$ . Поэтому  $b - a$  тоже делится на  $k$ , что неверно. Итак, в последовательности  $(c, d)$  нет других элементов кроме  $a$ , т.е.  $c = a$ ,  $d = 0$ . Значит  $b \in (e, f)$ , поэтому  $e = b$ . При этом,  $f \neq 0$ , так как иначе

$$P_2 = (a, 0) \sqcup (b, 0) \subsetneq (a, 0) \sqcup (b, 2k) \subsetneq P_1.$$

Ясно, что  $f$  делится нацело на  $k$ , то есть  $f = kf_1$ . Рассмотрим произвольный простой делитель  $p$  числа  $f_1$ . Так как выполнено

$$P_2 = (a, 0) \sqcup (b, kf_1) \subseteq (a, 0) \sqcup (b, kp) \subsetneq P_1,$$

то  $f_1 = p$ . Получили **кандидата (3)**.

Осталось проверить, что все  $P_2$  из **серий (1 – 3)** попарно невлости друг в друга. Для **серий (1 – 2)** это очевидно. Так как в  $P_2$  из **серии (3)** есть числа  $a$  и  $b$ , то они не вкладываются в  $P_2$  из

**серий (1 – 2). А представитель (3) не может вкладываться в другого представителя (3), так как иначе мы получили бы**

$$(a, 0) \sqcup (b, p_1 k) \subset (a, 0) \sqcup (b, p_2 k),$$

т.е., из простоты  $p_1$  и  $p_2$ ,  $p_1 = p_2$ , что невозможно. ■

**Лемма 11. О двух несогласованных полосах.** Пусть  $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$ ,

$$P_1 = (a, x) \sqcup (b, y)$$

и последовательности  $(a, x), (b, y)$  не согласованные. Тогда ребро от  $P_2$  к  $P_1$  в графе  $G$  проводится тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- 1)  $P_2 = (a + x, x) \sqcup (b, y)$ ;
- 2)  $P_2 = (a, x) \sqcup (b + y, y)$ ;
- 3)  $P_2 = (a, px) \sqcup (b, y)$ ,  $p$  – простое;
- 4)  $P_2 = (a, x) \sqcup (b, py)$ ,  $p$  – простое.

*Доказательство.*

Ясно, что  $P_1$  в графе  $G$  соединено ребром с множествами

$$X := (a, x) \sqcup (b + y, y), Y := (a + x, x) \sqcup (b, y),$$

так как они получаются из  $P_1$  удалением одного элемента. Получили **кандидатов (1 – 2)**. Рассмотрим теперь в решетке  $G$  какое-нибудь ребро  $P_1 \rightarrow P_2$  другого типа. Пусть в этом ребре

$$P_2 = (c, d) \sqcup (e, f).$$

Очевидно,  $a, b \in P_2$ . Из леммы 4 следует, что  $(c, d)$  или целиком лежит в  $(a, x)$  или целиком лежит в  $(b, y)$ . То же самое можно сказать и про  $(e, f)$ . Тогда, без ограничения общности,  $c = a$ ,  $e = b$ . При этом,  $d \neq 0$ , так как иначе выполнено

$$P_2 = (a, 0) \sqcup (b, f) \subsetneq (a, 2x) \sqcup (b, f) \subsetneq P_1.$$

Аналогично,  $f \neq 0$ . Очевидно, что  $d$  делится нацело на  $x$ , т.е.  $d = xd_1$ . Аналогично,  $f = yf_1$ . Так как  $P_2 \neq P_1$ , то обязательно или  $d_1 >$

1, или  $f_1 > 1$ . Пусть, без ограничения общности, это выполнено для  $d_1$ . Обозначим через  $p$  произвольный простой делитель числа  $d_1$ . Так как выполнено

$$P_2 = (a, xd_1) \sqcup (b, yf_1) \subseteq (a, xp) \sqcup (b, y) \subsetneq P_1,$$

то получили **кандидата (3)**. А если  $d_1 = 1$  и  $f_1$  — простое число, то получаем **кандидата (4)**.

Осталось проверить, что все  $P_2$  из **серий (1 – 4)** попарно невлости друг в друга. Для **серий (1 – 2)** это очевидно. Так как в  $P_2$  из **серий (3 – 4)** есть числа  $a$  и  $b$ , то они не вкладываются в  $P_2$  из **серий (1 – 2)**. **Представитель (3)** не может вкладываться в другого **представителя (3)**, так как иначе мы получили бы

$$(a, p_1x) \sqcup (b, y) \subset (a, p_2x) \sqcup (b, y),$$

т.е., из простоты  $p_1$  и  $p_2$ ,  $p_1 = p_2$ , а это невозможно. Аналогично доказывается, что **представитель (4)** не может вкладываться в другого **представителя (4)**. **Представитель (3)** не может вкладываться в **представителя (4)**, так как иначе было бы

$$(a, p_1x) \sqcup (b, y) \subset (a, x) \sqcup (b, p_2y),$$

а это невозможно, так как в левой части есть число  $b+y$ , а в правой части его нет. Аналогично доказывается, что **представитель (4)** не может вкладываться в **представителя (3)**. ■

**Лемма 12. О двух асинхронных полосах.** Пусть  $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$ ,

$$P_1 = (a, x) \sqcup (b, y)$$

и последовательности  $(a, x), (b, y)$  асинхронные. Тогда ребро от  $P_2$  к  $P_1$  в графе  $G$  проводится тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- 1)  $P_2 = (a + x, x) \sqcup (b, y)$ ;
- 2)  $P_2 = (a, x) \sqcup (b + y, y)$ ;
- 3)  $P_2 = (a, px) \sqcup (b, y)$ ,  $p$  — простое;
- 4)  $P_2 = (a, x) \sqcup (b, py)$ ,  $p$  — простое.

*Доказательство.*

Ясно, что  $P_1$  в графе  $G$  соединено ребром с множествами

$$X := (a, x) \sqcup (b + y, y), Y := (a + x, x) \sqcup (b, y),$$

так как они получаются из  $P_1$  удалением одного элемента. Получили **кандидатов (1 – 2)**. Рассмотрим теперь в решетке  $G$  какое-нибудь ребро  $P_2 \rightarrow P_1$  другого типа. Пусть в этом ребре

$$P_2 = (c, d) \sqcup (e, f).$$

Ясно, что  $a, b \in P_2$ . Далее возможны **варианты**. В первом из них  $d = 0, f = 0$ . Тогда

$$\{c, e\} = \{a, b\},$$

а этого быть не может, так как иначе

$$P_2 = (a, 0) \sqcup (b, 0) \subsetneq (a, x) \sqcup (b, 0) \subsetneq P_1.$$

**Во втором варианте**  $d = 0, f \neq 0$ . Тогда  $c = a, e = b$ . И здесь, по лемме 3, возможны **два случая** –  $(b, f) \subset (b, y)$  или же  $(b, 2f) \subset (b, y), (b + f, 2f) \subset (a, x)$ . **Первый случай** невозможен, так как

$$P_2 = (a, 0) \sqcup (b, f) \subsetneq (a, 2x) \sqcup (b, f) \subsetneq P_1.$$

**Второй случай** невозможен, так как

$$P_2 = (a, 0) \sqcup (b, f) \subsetneq (a, x) \cup (b, f) = (a, x) \sqcup (b, 2f) \subsetneq P_1;$$

здесь левая часть вложения строгая, так как иначе по лемме 4 для зигзага получили бы

$$(a + x, x) = (b + f, 2f), \quad \text{т.е. по лемме 4 } (a, x) \subset (b + \frac{y}{2}, y)^+;$$

аналогично доказывается и строгость правой части вложения. **Третий вариант**  $d \neq 0, f = 0$ , разбирается точно так же. Разберем теперь **четвертый вариант**, когда  $d \neq 0, f \neq 0$ . Здесь возможны **три исхода**. В первом из них

$$(c, d) \subset (a, x), \quad (e, f) \subset (b, y),$$

т.е.  $(c, d)$  и  $(e, f)$  - полосы. Тогда

$$c = a, \quad e = b, \quad d = xd_1, \quad f = yf_1.$$

Так как  $P_2 \neq P_1$ , то обязательно  $d_1 > 1$  или  $f_1 > 1$ . Пусть  $d_1 > 1$ . Обозначим через  $p$  произвольный простой делитель числа  $d_1$ . Тогда

$$P_2 = (a, xd_1) \sqcup (b, yf_1) \subseteq (a, xp) \sqcup (b, y) \subsetneq P_1,$$

т.е.  $d_1 = p$  и  $f_1 = 1$ . Также мог произойти аналогичный случай, когда  $d_1 = 1$  и  $f_1$  - простое число. Получили **кандидатов (3 – 4)**.

**Во втором исходе**

$$(c, d) \subset (a, x), \quad (e, f) \not\subset (b, y).$$

Ясно, что  $(e, f) \cap (b, y) \neq \emptyset$ , так как в противном случае было бы

$$P_2 = (c, d) \sqcup (e, f) \subsetneq (a, x) \sqcup (b, 0) \subsetneq P_1.$$

Поэтому  $(c, d)$  - полоса, а  $(e, f)$  - зигзаг. Значит

$$P_2 = (c, d) \sqcup (e, f) \subset (a, x) \sqcup ((e, f) \cap (b, y)) \subsetneq P_1;$$

здесь правая часть вложения строгая, иначе получили бы

$$(b, y) \subset (e, f), \quad \text{т.е. по лемме 4 } (b, y) \subset (a + \frac{x}{2}, x)^+.$$

Поэтому все такие  $P_2$  были уже получены нами в **первом исходе**.

Наконец, в **третьем исходе**

$$(c, d) \not\subset (b, y), \quad (e, f) \not\subset (b, y).$$

Тогда из лемм 3 и 4 заключаем:

$$P_2 = (c, d) \sqcup (e, f) \subset ((a, x) \cap (b + \frac{y}{2}, y)^+) \sqcup ((b, y) \cap (a + \frac{x}{2}, x)^+) \subsetneq P_1.$$

Значит  $P_2$  равно  $((a, x) \cap (b + \frac{y}{2}, y)^+) \sqcup ((b, y) \cap (a + \frac{x}{2}, x)^+)$ , т.е. оно уже было учтено нами в **первом исходе**.

Проверка попарной невложимости **кандидатов (1 – 4)** друг в друга полностью повторяет аналогичные рассуждения из леммы 11.

■

**Лемма 13. О слабой синхронизации первого типа.** Пусть  $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$ ,

$$P_1 = (1, 2) \sqcup (n + 1, 2n),$$

где  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$  и  $n$  нечетно. Тогда ребро от  $P_2$  к  $P_1$  в графе  $G$  проводится тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- 1)  $P_2 = (3, 2) \sqcup (n + 1, 2n)$ ;
- 2)  $P_2 = (1, 2) \sqcup (3n + 1, 2n)$ ;
- 3)  $P_2 = (1, 2p) \sqcup (n + 1, 2n)$ ,  $p$  — простое,  $p \neq n$ ;
- 4)  $P_2 = (1, 2) \sqcup (n + 1, 2np)$ ,  $p$  — простое;
- 5)  $P_2 = (1, n) \sqcup (2x + 1, 2p)$ ,  $p$  — простое,  $0 < x < p$ ,  $p|n$ .

*Доказательство.*

Ясно, что  $P_1$  в графе  $G$  соединено ребром с множествами

$$X := (3, 2) \sqcup (n + 1, 2n), Y := (1, 2) \sqcup (3n + 1, 2n),$$

так как они получаются из  $P_1$  удалением одного элемента. Получили **кандидатов (1 – 2)**. Рассмотрим теперь в решетке  $G$  какое-нибудь ребро  $P_2 \rightarrow P_1$  другого типа. Пусть в этом ребре

$$P_2 = (c, d) \sqcup (e, f).$$

Ясно, что  $1, n + 1 \in P_2$ . Дальше возможны **варианты. В первом из них**  $d = 0, f = 0$ . Тогда  $c = 1, e = n + 1$ , а этого быть не может, так как иначе

$$P_2 = (1, 0) \sqcup (n + 1, 0) \subsetneq (1, 2) \sqcup (n + 1, 0) \subsetneq P_1.$$

**Во втором варианте**  $d = 0, f \neq 0$  или  $d \neq 0, f = 0$ . Без ограничения общности, считаем, что  $d = 0, f \neq 0$ . Здесь нужно рассмотреть **три случая**. В первом из них  $1, n + 1 \in (e, f)$ . Это возможно только если  $e = 1, f = n$ . Но тогда  $c \in (1, 2)$  и

$$P_2 = (c, 0) \sqcup (1, n) \subsetneq (c, 2n) \sqcup (1, n) \subsetneq P_1,$$

а этого быть не может. Правая часть вложения здесь строгая, так как в  $(c, 2n) \sqcup (1, n)$  при нечетных  $n > 1$  не могут одновременно лежать числа 3 и 5. **Во втором случае**  $1 \in (c, 0), n + 1 \in (e, f)$ .

Это возможно только если  $c = 1, e = n + 1$ . Но тогда  $f$  обязательно кратно  $n$  и

$$P_2 = (1, 0) \sqcup (n + 1, f) \subsetneq (1, n) \sqcup (3, 0) \subsetneq P_1,$$

что невозможно. **В третьем случае**  $n + 1 \in (c, 0), 1 \in (e, f)$ . Это возможно только когда выполнено  $c = n + 1, e = 1$ . Но тогда  $f$  обязательно кратно  $n$ , ведь иначе  $f$  было бы четно и

$$P_2 = (n + 1, 0) \sqcup (1, f) \subsetneq (1, 2) \sqcup (n + 1, 4n) \subsetneq P_1,$$

чего быть не может. А если  $f$  кратно  $n$ , то

$$P_2 = (n + 1, 0) \sqcup (1, f) \subsetneq (1, n) \sqcup (3, 0) \subsetneq P_1,$$

и это снова невозможно. Наконец, **в третьем варианте**  $d \neq 0, f \neq 0$ . И здесь тоже возникают **два исхода**. **В первом из них** одно из чисел  $1, n + 1$  лежит в  $(c, d)$ , а второе - в  $(e, f)$ . Пусть, без ограничения общности,

$$1 \in (c, d), \quad n + 1 \in (e, f).$$

Тогда  $c = 1, e = n + 1$  и  $f$  кратно  $n$ . Если  $d = 2$ , то  $f$  кратно  $2n$ , т.е.  $f = 2nx$ , причем  $x > 1$ . Тогда для любого простого делителя  $p$  числа  $x$  имеем

$$P_2 = (1, 2) \sqcup (n + 1, 2nx) \subset (1, 2) \sqcup (n + 1, 2np) \subsetneq P_1.$$

Получили **кандидата (4)**. Если  $d$  нечетно, то оно обязательно кратно  $n$  и

$$P_2 = (1, d) \sqcup (n + 1, f) \subsetneq (1, n) \sqcup (3, 0) \subsetneq P_1,$$

что невозможно. Пусть теперь  $d$  четно, т.е.  $d = 2d_1$  и  $d_1 > 1$ . Тогда

$$P_2 = (1, 2d_1) \sqcup (n + 1, f).$$

Здесь возможны **три подслучая**. **В одном из них**  $f = n$ . Тогда НОД( $2d_1, f$ ) будет делителем числа  $n$  и по лемме 1 прогрессии  $(1, 2d_1), (n + 1, f)$  пересекаются. **Во втором подслучае**  $f = 2n$ . Тогда для любого простого делителя  $p$  числа  $d_1$  имеем

$$P_2 = (1, 2d_1) \sqcup (n + 1, 2n) \subset (1, 2p) \sqcup (n + 1, 2n) \subsetneq P_1.$$

Значит  $d_1 = p$ . И  $p \neq n$ , так как иначе

$$P_2 = (1, 2n) \sqcup (n + 1, 2n) \subsetneq (1, n) \sqcup (3, 0) \subsetneq P_1.$$

Получили **кандидата (3)**. В третьем подслучае  $f > 2n$ . Тогда

$$P_2 = (1, 2d_1) \sqcup (n + 1, f) \subset (1, 2) \sqcup ((n + 1, f) \cap (n + 1, 2n)) \subsetneq P_1,$$

т.е. такое  $P_2$  или вовсе не соединено ребром с  $P_1$ , или совпадает с одним из **кандидатов (4)**. Во втором исходе числа  $1, n + 1$  одновременно лежат в одной из прогрессий  $(c, d)$ ,  $(e, f)$ . Без ограничения общности, это  $(c, d)$ . Это означает, что  $c = 1$ ,  $d = n$ , т.е.

$$P_2 = (1, n) \sqcup (e, f).$$

Здесь  $e - 1$  четно и не кратно  $n$ ,  $f$  четно. Пусть  $e = 1 + 2x$ . Из леммы 1 следует, что у  $n$  и  $f$  есть простой общий делитель  $p$ , которому не кратно  $2x$ . Так как  $n$  четно, то  $p \neq 2$  и  $x$  не кратно  $p$ . В частности,  $x \neq 0$ ,  $x \neq p$ . Тогда

$$P_2 \subset (1, n) \sqcup (1 + 2x, 2p) \subsetneq P_1.$$

Поэтому  $f = 2p$ . Осталось заметить, что при  $x > p$  было бы

$$P_2 \subsetneq (1, n) \sqcup (1 + 2(x - p), 2p) \subsetneq P_1,$$

что невозможно. Значит  $0 < x < p$ . Получили **кандидата (5)**.

Осталось проверить, что все  $P_2$  из **серий (1 – 5)** попарно невлости друг в друга. Для **серий (1 – 2)** это очевидно. Так как в  $P_2$  из **серий (3 – 5)** есть числа  $1$  и  $n + 1$ , то они не вкладываются в  $P_2$  из **серий (1 – 2)**. Представитель **(3)** не может вкладываться в другого **представителя (3)**, так как иначе мы получили бы

$$(1, 2p_1) \sqcup (n + 1, 2n) \subset (1, 2p_2) \sqcup (n + 1, 2n),$$

т.е., из простоты  $p_1$  и  $p_2$ ,  $p_1 = p_2$ , а это невозможно. Аналогично доказывается, что **представитель (4)** не может вкладываться в другого **представителя (4)**. Представитель **(3)** не может вкладываться в **представителя (4)**, так как иначе было бы

$$(1, 2p_1) \sqcup (n + 1, 2n) \subset (1, 2) \sqcup (n + 1, 2np),$$

а это невозможно, так как в левой части есть число  $3n + 1$ , а в правой части его нет. Аналогично доказывается, что **представитель (4)** не может вкладываться в **представителя (3)**. **Представитель (5)** не может вкладываться в **представителя (3)**, так как иначе было бы

$$(1, n) \sqcup (2x + 1, 2p_1) \subset (1, 2p_2) \sqcup (n + 1, 2n),$$

т.е.

$$(2x + 1, 2p_1) \subset (1, 2p_2).$$

А это невозможно, так как здесь точно  $p_1 = p_2$ , т.е. при  $0 < x < p_1 = p_2$  верно

$$1 < 2x + 1 < 1 + 2p_2.$$

**Представитель (5)** не может вкладываться в **представителя (4)**, так как иначе было бы

$$(1, n) \sqcup (2x + 1, 2p_1) \subset (1, 2) \sqcup (n + 1, 2np_2),$$

а это невозможно, ведь в левой части, в отличие от правой, есть число  $3n + 1$ . **Представитель (5)** не может вкладываться в другого **представителя (5)**, так как из условия

$$(1, n) \sqcup (2x_1 + 1, 2p_1) \subset (1, n) \sqcup (2x_2 + 1, 2p_2)$$

следует

$$(2x_1 + 1, 2p_1) \subset (2x_2 + 1, 2p_2),$$

т.е., из простоты  $p_1$  и  $p_2$ , верно  $p_1 = p_2$ . Но тогда  $x_1 - x_2$  обязательно кратно  $p_1$ , т.е., в силу ограничений

$$0 < x_1 < p_1, \quad 0 < x_2 < p_2 = p_1$$

получаем  $x_1 = x_2$ , чего быть не может. **Представитель (3)** не может вкладываться в **представителя (5)**, так как иначе было бы

$$(1, 2p_1) \sqcup (n + 1, 2n) \subset (1, n) \sqcup (2x + 1, 2p_2),$$

т.е. из леммы 3 число  $4p_1$  делилось бы на нечетное  $n$ , но  $p_1 \neq n$ . Наконец, **представитель (4)** не может вкладываться в **представителя (5)**, так как из условия

$$(1, 2) \sqcup (n + 1, 2np_1) \subset (1, n) \sqcup (2x + 1, 2p_2)$$

по лемме 3 получили бы делимость 4 на нечетное  $n$ , что невозможно.



**Лемма 14. О слабой синхронизации второго типа.** Пусть  $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$ ,

$$P_1 = (1, 2) \sqcup (k, 2n),$$

где  $k, n \in \mathbb{N}$ ,  $k < n + 1$  - чётно,  $n > 1$  - нечётно. Тогда ребро от  $P_2$  к  $P_1$  в графе  $G$  проводится тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- 1)  $P_2 = (3, 2) \sqcup (k, 2n)$ ;
- 2)  $P_2 = (1, 2) \sqcup (k + 2n, 2n)$ ;
- 3)  $P_2 = (1, 2p) \sqcup (k, 2n)$ ,  $p$  - простое,  $p \nmid n$  или  $p \mid k - 1$ ;
- 4)  $P_2 = (1, 2) \sqcup (k, 2np)$ ,  $p$  - простое;
- 5)  $P_2 = (1, 2p) \sqcup (k, n)$ ,  $p$  - простое,  $p \mid n$ ,  $p \nmid k - 1$ .

*Доказательство.*

Ясно, что  $P_1$  в графе  $G$  соединено ребром с множествами

$$X := (3, 2) \sqcup (k, 2n), Y := (1, 2) \sqcup (k + 2n, 2n),$$

так как они получаются из  $P_1$  удалением одного элемента. Получили **кандидатов (1 – 2)**. Рассмотрим теперь в решетке  $G$  какое-нибудь ребро  $P_2 \rightarrow P_1$  другого типа. Пусть в этом ребре

$$P_2 = (c, d) \sqcup (e, f).$$

Ясно, что  $1, k \in P_2$ . Далее возможны **варианты**. В первом из них  $d = 0, f = 0$ . Тогда  $c = 1, e = k$ , а этого быть не может, так как иначе

$$P_2 = (1, 0) \sqcup (k, 0) \subsetneq (1, 2) \sqcup (k, 0) \subsetneq P_1.$$

**Во втором варианте**  $d = 0, f \neq 0$  или  $d \neq 0, f = 0$ . Без ограничения общности, считаем, что  $d = 0, f \neq 0$ . Здесь нужно рассмотреть **три случая**. В первом из них  $1, k \in (e, f)$ . Тогда имеем  $1 + 3k \in (e, f)$ . Но  $k < 1 + 3k < k + 2n$  и  $1 + 3k$  нечётно. Случай невозможен. **Во втором случае**  $1 \in (c, 0), k \in (e, f)$ . Это возможно только если  $c = 1, e = k$ . Но тогда  $f$  обязательно кратно  $n$  и

$$P_2 = (1, 0) \sqcup (k, f) \subsetneq (k, n) \sqcup (3, 0) \subsetneq P_1,$$

что невозможно. В третьем случае  $k \in (c, 0)$ ,  $1 \in (e, f)$ . Это возможно только при  $c = k$ ,  $e = 1$ . Но тогда  $f$  обязательно нечетно, ведь иначе

$$P_2 = (k, 0) \sqcup (1, f) \subsetneq (1, 2) \sqcup (k, 4n) \subsetneq P_1,$$

чего быть не может. А если  $f$  нечетно, то  $1 + f, 1 + 3f \in (k, 2n)$ , т.е.  $f$  делится на  $n$ . Но

$$(1, n) \cap (k, 2n) = \emptyset,$$

так как  $k - 1 < n$ . Случай невозможен. В третьем варианте  $d \neq 0$ ,  $f \neq 0$ . И здесь тоже возникают два исхода. В первом из них числа  $1, k$  одновременно лежат в одной из прогрессий  $(c, d)$ ,  $(e, f)$ . Без ограничения общности, это  $(c, d)$ . Но тогда  $c = 1$ ,  $d = k - 1$  и числа  $1 + d, 1 + 3d$  четны и значит обязаны лежать в  $(k, 2n)$ . Поэтому  $d$  делится на  $n$ , т.е.  $1 + d, 1 + 3d \in (1, n)$ . Но прогрессии  $(1, n)$  и  $(k, 2n)$  не пересекаются, так как  $1 < k < n + 1$ . Противоречие. Во втором исходе одно из чисел  $1, k$  лежит в  $(c, d)$ , а второе - в  $(e, f)$ . Пусть, без ограничения общности,

$$1 \in (c, d), \quad k \in (e, f).$$

Тогда  $c = 1$ ,  $e = k$ ,  $f$  кратно  $n$  и

$$P_2 = (1, d) \sqcup (k, f).$$

Если  $d = 2$ , то  $f$  кратно  $2n$ , т.е.  $f = 2nx$ , причем  $x > 1$ . Тогда для любого простого делителя  $p$  числа  $x$  имеем

$$P_2 = (1, 2) \sqcup (k, 2nx) \subset (1, 2) \sqcup (k, 2np) \subsetneq P_1.$$

Получили кандидата (4). Число  $d$  не может быть нечетным, так как иначе числа  $1 + d, 1 + 3d$  были бы четны и значит лежали бы в  $(k, 2n)$ . Тогда бы  $d$  делилось на  $n$ , т.е.  $1 + d, 1 + 3d \in (1, n)$ . Но прогрессии  $(1, n)$  и  $(k, 2n)$  не пересекаются. Пусть теперь  $d$  четно и  $d \neq 2$ , т.е.  $d = 2d_1$  и  $d_1 > 1$ . Тогда

$$P_2 = (1, 2d_1) \sqcup (k, f).$$

Здесь возможны три подслучая. В одном из них  $f = n$ . Тогда у чисел  $d_1, n$  будет общий простой делитель  $p$  и для него

$$P_2 \subset (1, 2p) \sqcup (k, n) \subsetneq P_1.$$

Чтобы прогрессии здесь не пересекались, нужно потребовать выполнение дополнительного условия  $k - 1 \nmid p$ . Получили **кандидата (5)**. Во втором подслучае  $f = 2n$ . Тогда для любого простого делителя  $p$  числа  $d_1$  имеем

$$P_2 = (1, 2d_1) \sqcup (k, 2n) \subset (1, 2p) \sqcup (k, 2n) \subsetneq P_1,$$

т.е.  $d_1 = p$ . И здесь  $p \nmid n$  или  $p \mid k - 1$ , ведь иначе последовательности  $(1, 2p)$  и  $(k, n)$  не пересекаются и

$$P_2 = (1, 2p) \sqcup (k, 2n) \subset (1, 2p) \sqcup (k, n) \subsetneq P_1,$$

а это уже **кандидат (5)**. Получили **кандидата (3)**. В третьем подслучае  $f > 2n$ . Тогда

$$P_2 = (1, 2d_1) \sqcup (k, f) \subset (1, 2) \sqcup ((k, f) \cap (k, 2n)) \subsetneq P_1,$$

т.е. такое  $P_2$  или вовсе не соединено ребром с  $P_1$ , или совпадает с одним из **кандидатов (4)**.

Осталось проверить, что все  $P_2$  из **серий (1 – 5)** попарно не вложимы друг в друга. Для **серий (1 – 2)** это очевидно. Так как в  $P_2$  из **серий (3 – 5)** есть числа 1 и  $k$ , то они не вкладываются в  $P_2$  из **серий (1 – 2)**. **Представитель (3)** не может вкладываться в другого **представителя (3)**, так как иначе мы получили бы

$$(1, 2p_1) \sqcup (k, 2n) \subset (1, 2p_2) \sqcup (k, 2n),$$

т.е., из простоты  $p_1$  и  $p_2$ ,  $p_1 = p_2$ , а это невозможно. Аналогично доказывается, что **представитель (4)** не может вкладываться в другого **представителя (4)**. **Представитель (3)** не может вкладываться в **представителя (4)**, так как иначе было бы

$$(1, 2p_1) \sqcup (k, 2n) \subset (1, 2) \sqcup (k, 2np),$$

а это невозможно, так как в левой части есть число  $k + 2n$ , а в правой части его нет. Аналогично доказывается, что **представитель (4)** не может вкладываться в **представителя (3)**. **Представитель (5)** не может вкладываться в **представителя (3)**, так как иначе было бы

$$(1, 2p_1) \sqcup (k, n) \subset (1, 2p_2) \sqcup (k, 2n),$$

откуда

$$(1, 2p_1) \subset (1, 2p_2),$$

$$(k + n, 2n) \subset (1, 2p_2).$$

А это невозможно, так как из первого условия следует, что  $p_1 = p_2$ , а из второго - что  $k + n - 1$  делится на  $p_2 = p_1$ . Но  $k - 1$ , в отличие от  $n$ , не делится на  $p_1$ . **Представитель (5)** не может вкладываться в **представителя (4)**, так как иначе было бы

$$(1, 2p_1) \sqcup (k, n) \subset (1, 2) \sqcup (k, 2np_2),$$

а это невозможно, ведь в левой части, в отличие от правой, есть число  $k + 2n$ . Наконец, **представитель (5)** не может вкладываться в другого **представителя (5)**, так как из условия

$$(1, 2p_1) \sqcup (k, n) \subset (1, 2p_2) \sqcup (k, n)$$

и простоты  $p_1$  и  $p_2$  получаем  $p_1 = p_2$ . **Представитель (3)** не может вкладываться в **представителя (5)**, так как иначе было бы

$$(1, 2p_1) \sqcup (k, 2n) \subset (1, 2p_2) \sqcup (k, n),$$

т.е. из леммы 3 число  $4p_1$  делилось бы на  $2p_2$ , но  $p_2 \mid n$ , т.е.  $p_2 \neq 2$  и  $p_1 = p_2$ . А это, в силу наложенных на  $p$  ограничений в **(3, 5)**, невозможно. Наконец, **представитель (4)** не может вкладываться в **представителя (5)**, так как из условия

$$(1, 2) \sqcup (k, 2np_1) \subset (1, 2p_2) \sqcup (k, n)$$

по лемме 3 получили бы делимость 4 на  $2p_2$ , но  $p_2 \mid n$ , т.е.  $p_2 \neq 2$ . ■

**Лемма 15. О слабой синхронизации третьего типа.** Пусть  $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$ ,

$$P_1 = (1, 2) \sqcup (k, 2n),$$

где  $k, n \in \mathbb{N}$ ,  $k > n + 1$  - *четно*,  $n > 1$  - *нечетно*. Тогда ребро от  $P_2$  к  $P_1$  в графе  $G$  проводится тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- 1)  $P_2 = (3, 2) \sqcup (k, 2n)$ ;

- 2)  $P_2 = (1, 2) \sqcup (k + 2n, 2n)$ ;  
 3)  $P_2 = (1, 2p) \sqcup (k, 2n)$ ,  $p$  – простое,  $p \nmid n$  или  $p \mid k - 1$ ;  
 4)  $P_2 = (1, 2) \sqcup (k, 2np)$ ,  $p$  – простое;  
 5)  $P_2 = (1, 2p) \sqcup (k - n, n)$ ,  $p$  – простое,  $p \mid n$ ,  $p \nmid k - 1$ .

*Доказательство.*

Доказательство леммы похоже на доказательство леммы 14. Поэтому будем излагать его подробно только там, где оно отличается.

**Кандидаты (1 – 2)** точно соединены ребром с  $P_1$ . В других кандидатах вида

$$P_2 = (c, d) \sqcup (e, f)$$

точно есть 1 и  $k$ . Одновременно  $d$  и  $f$  равны 0 быть не могут. Если  $d = 0$ ,  $f > 0$ , то возможны **варианты. В первом**  $1, k \in (e, f)$ . Не при всех  $k$  этот вариант вообще возможен. Но в любом случае, если  $c \in (1, 2)$ , то

$$P_2 \subsetneq (1, 2) \sqcup ((e, f) \cap (k, 2n)) \subsetneq P_1.$$

А если  $c \in (k, 2n)$ , то

$$P_2 \subsetneq ((1, 2) \cap (e, f)) \sqcup (k, 2n) \subsetneq P_1.$$

**Во втором варианте**  $c = 1$  и  $k \in (e, f)$ . Если  $(k, 2n) \not\subset (e, f)$ , то

$$P_2 \subsetneq (1, 2) \sqcup ((e, f) \cap (k, 2n)) \subsetneq P_1.$$

Иначе,  $f = n$  или  $f = 2n$ . Если  $f = n$ , то тут возможны **два случая**. Или  $\text{НОД}(k-1, n) > 1$  и тогда для любого общего простого делителя  $p$  чисел  $k - 1$  и  $n$  будет

$$P_2 = (1, 0) \sqcup (e, n) \subset (1, 2p) \sqcup (k, 2n) \subsetneq P_1.$$

Это **кандидат (3)**. Или же  $\text{НОД}(k - 1, n) = 1$  и для любого простого делителя  $p$  числа  $n$  получим

$$P_2 = (1, 0) \sqcup (e, n) \subsetneq (1, 2p) \sqcup (e, n) \subsetneq P_1.$$

Если же  $f = 2n$ , то  $e = k$  и

$$P_2 = (1, 0) \sqcup (k, 2n) \subsetneq (1, 4) \sqcup (k, 2n) \subsetneq P_1.$$

**В третьем варианте**  $c = k$  и  $e = 1$ . Если  $(1, f)$  - зигзаг, то

$$P_2 = (k, 0) \sqcup (1, f) \subset (1, 0) \sqcup (k - n, n) \subsetneq P_1.$$

А это уже **второй вариант**. Если же  $(1, f)$  - полоса, то

$$P_2 = (k, 0) \sqcup (1, f) \subsetneq (1, 2) \sqcup (k, 4n) \subsetneq P_1.$$

Пусть теперь  $d > 0$ ,  $f > 0$ . Если  $(c, d)$  и  $(e, f)$  — **полосы**, то, без ограничения общности,  $c = 1$ ,  $k = e$  и тогда эти  $P_2$  — **кандидаты (3 – 4)**. Пусть теперь  $(c, d)$  и  $(e, f)$  — **полоса и зигзаг**. Без ограничения общности, полосой будет  $(c, d)$ . Если  $(c, d) \subset (1, 2)$ , то

$$P_2 \subset (1, 2) \sqcup ((e, f) \cap (k, 2n)) \subset P_1.$$

Тогда или  $P_2$  уже представлен нами как «полоса+полоса», или же  $(k, 2n) \subset (e, f)$ , т.е.  $f = n$  или  $f = 2n$ . Если  $f = n$ , то  $(e, f) = (k - n, n)$  и  $(c, d) = (1, 2d_1)$ . Тогда по лемме 1 у  $n$  и  $d_1$  есть общий простой делитель  $p$ , на который не делится  $k - 1$ , и

$$P_2 \subset (1, 2p) \sqcup (k - n, n) \subsetneq P_1.$$

Получаем **кандидата (5)**. Если же  $f = 2n$ , то

$$(e, f) = (k, 2n) \text{ и } (c, d) = (1, 2d_1).$$

Берем любой простой делитель числа  $d_1$  и получаем **кандидата (3)**. Осталось разобрать случай, когда  $(c, d)$  и  $(e, f)$  — **зигзаги**. По лемме 4 тогда получаем

$$P_2 \subset (k - n, 2n)^+ \sqcup (k, 2n) \subsetneq P_1,$$

а это уже случай «полоса+полоса».

Доказательство попарной невложимости **представителей** из **(1 – 5)** дословно повторяет соответствующую часть доказательства леммы 14, только с заменой  $(k, n)$  на  $(k - n, n)$ .

■

**Лемма 16. О слабой синхронизации четвертого типа.** Пусть  $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$ ,

$$P_1 = (1, 2n) \sqcup (n + 1, 2),$$

где  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$  и  $n$  нечетно. Тогда ребро от  $P_2$  к  $P_1$  в графе  $G$  проводится тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- 1)  $P_2 = (1 + 2n, 2n) \sqcup (n + 1, 2)$ ;
- 2)  $P_2 = (1, 2n) \sqcup (n + 3, 2)$ ;
- 3)  $P_2 = (1, 2np) \sqcup (n + 1, 2)$ ,  $p$  — простое;
- 4)  $P_2 = (1, 2n) \sqcup (n + 1, 2p)$ ,  $p$  — простое,  $p \neq n$ ;
- 5)  $P_2 = (1, n) \sqcup (2x + n + 1, 2p)$ ,  $p$  — простое,  $0 < x < p$ ,  $p|n$ .

*Доказательство.*

Синхронизация четвертого типа очень похожа на синхронизацию первого типа, приводимую аккуратно в лемме 13. Поэтому дадим здесь лишь неформальное сокращенное доказательство.

Пусть в графе  $G$  проведено ребро от  $P_2$  к  $P_1$  и

$$P_2 = (c, d) \sqcup (e, f).$$

Вариант, когда в  $P_2$  нет 1 или  $n + 1$ , дает нам **кандидатов (1 – 2)**. Пусть теперь эти числа есть в  $P_2$ . Разбираем **случай**. Если  $d = f = 0$ , т.е.  $P_2$  — это «**точка+точка**», то  $P_2$  можно поглотить «полосой+полосой». То же самое верно и в случае, когда  $P_2$  — «**точка+полоса**». Случай, когда  $P_2$  — «**полоса+полоса**» дает нам **кандидатов (3 – 4)**. Только нужно учесть, что  $(1, 2n) \sqcup (n + 1, 2n)$  с  $p = n$  в (4) нам не подходит, так как поглощается **кандидатом (5)**. Разбираем случай, когда  $P_2$  — «**точка+зигзаг**». Если точка (обозначим ее за  $x$ ) лежит в  $(1, n)$ , то по лемме 4 о зигзаге конструкция поглощается  $(1, n) \sqcup (n + 3, 0)$ . А если точки в  $(1, n)$  нет, то конструкция поглощается  $(1, n) \sqcup (x, 2n)$ . Аналогично, в случае, когда  $P_2$  — «**зигзаг+зигзаг**», конструкция по лемме 4 о зигзаге поглощается  $(1, n) \sqcup (n + 3, 0)$ . Осталось разобрать только случай «**полоса+зигзаг**». Если полоса лежит в  $(1, 2n)$ , то конструкция поглощается  $(1, n) \sqcup (n + 3, 0)$ . Значит полоса лежит в  $(n + 1, 2)$ . Далее, если зигзаг не покрывает целиком  $(1, 2n)$ , то конструкция поглощается  $(n + 1, 2) \sqcup ((1, 2n) \cap (\text{зигзаг}))$ . Значит зигзаг покрывает  $(1, 2n)$ , т.е.  $f = n$  или  $f = 2n$ . В первом случае получаем **кандидата (5)**, а второй случай невозможен, так как зигзаг превращается в полосу.

Доказательство попарной невложимости **кандидатов (1 – 5)** повторяет аналогичные рассуждения леммы 13.



**Лемма 17. О слабой синхронизации пятого типа.** Пусть  $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$ ,

$$P_1 = (1, 2n) \sqcup (k, 2),$$

где  $k, n \in \mathbb{N}$ ,  $k < n + 1$  — чётно,  $n > 1$  — нечётно. Тогда ребро от  $P_2$  к  $P_1$  в графе  $G$  проводится тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- 1)  $P_2 = (1 + 2n, 2n) \sqcup (k, 2)$ ;
- 2)  $P_2 = (1, 2n) \sqcup (k + 2, 2)$ ;
- 3)  $P_2 = (1, 2np) \sqcup (k, 2)$ ,  $p$  — простое;
- 4)  $P_2 = (1, 2n) \sqcup (k, 2p)$ ,  $p$  — простое,  $p \nmid n$  или  $p \mid k - 1$ ;
- 5)  $P_2 = (1, n) \sqcup (k, 2p)$ ,  $p$  — простое,  $p \mid n$ ,  $p \nmid k - 1$ .

*Доказательство.*

Как и в предыдущей лемме, случаи «точка+точка», «точка+полоса», «точка+зигзаг» невозможны, а случаи «полоса+полоса», «зигзаг+зигзаг» дают нам **кандидатов (3 – 4)**. А в случае «полоса+зигзаг» полоса лежит в  $(k, 2)$ , так как иначе конструкция поглощается  $(1, n) \sqcup (k, 0)$ . Тогда зигзаг покрывает целиком  $(1, 2n)$ , так как иначе конструкцию можно поглотить множеством  $(k, 2) \sqcup ((1, 2n) \cap (\text{зигзаг}))$ . Значит  $f = n$  и мы получаем **кандидата (5)**.

Доказательство попарной невложимости **кандидатов (1 – 5)** повторяет аналогичные рассуждения леммы 14.

■

**Лемма 18. О слабой синхронизации шестого типа.** Пусть  $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$ ,

$$P_1 = (1, 2n) \sqcup (k, 2),$$

где  $k, n \in \mathbb{N}$ ,  $k > n + 1$  — чётно,  $n > 1$  — нечётно. Тогда ребро от  $P_2$  к  $P_1$  в графе  $G$  проводится тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- 1)  $P_2 = (1 + 2n, 2n) \sqcup (k, 2)$ ;
- 2)  $P_2 = (1, 2n) \sqcup (k + 2, 2)$ ;
- 3)  $P_2 = (1, 2np) \sqcup (k, 2)$ ,  $p$  — простое;
- 4)  $P_2 = (1, 2n) \sqcup (k, 2p)$ ,  $p$  — простое.

*Доказательство.*

Этот тип слабой синхронизации еще проще, чем остальные. Отличие возникает только том в случае «полоса+зигзаг». Здесь точно так же полоса должна лежать в  $(k, 2)$ . А зигзаг по лемме 4 лежит в

$$(k - n, 2n)^+ \sqcup (k, 2n).$$

Но если он не содержит в себе все  $(1, 2n)$ , то конструкцию можно поглотить множеством

$$(k, 2) \sqcup ((1, 2n) \cap (\text{зигзаг})).$$

Ну а если в зигзаге есть  $(1, 2n)$ , то он равен  $(1, n)$ ; но в  $P_1$  нет числа  $n + 1$ . Поэтому варианта с кандидатом вида (5) из предыдущих лемм не возникает.

Доказательство попарной невложимости кандидатов (1 – 4) уже много раз было доказано в других леммах.

■

**Лемма 19. О сильной синхронизации.** Пусть  $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$ ,

$$P_1 = (1, 2) \sqcup (k, 2),$$

где  $k \geq 6$  — четно. Тогда ребро от  $P_2$  к  $P_1$  в графе  $G$  проводится тогда и только тогда, когда выполнено одно из семи условий:

- 1)  $P_2 = (3, 2) \sqcup (k, 2)$ ;
- 2)  $P_2 = (1, 2) \sqcup (k + 2, 2)$ ;
- 3)  $P_2 = (1, 2p) \sqcup (k, 2)$ ,  $p$  — простое,  $2p < k - 2$ ;
- 4)  $P_2 = (1, 2) \sqcup (k, 2p)$ ,  $p$  — простое;
- 5)  $P_2 = (1, 0) \sqcup (k - 1, 1)$ ;
- 6)  $P_2 = (1, k - 1) \sqcup (x, n)$ ,  $3 \leq x \leq k - 3$  — нечетное,  $n \in A(x, k)$ ;
- 7)  $P_2 = (1, n) \sqcup (x, k - x)$ ,  $3 \leq x \leq k - 3$  — нечетное,  $n \in B(x, k)$ .

*Доказательство.*

Необходимость наличия в списке условий (1 – 2) очевидна. Пусть в графе  $G$  проведено ребро от  $P_2$  к  $P_1$  и

$$P_2 = (c, d) \sqcup (e, f).$$

Как и ранее, это не могут быть «точка+точка», и «точка+полоса». Вариант «полоса+полоса» дает нам кандидатов (3 – 4). Важно лишь учесть, что серия « $P_2 = (1, 2p) \sqcup (k, 2)$ »,  $p$  – простое» при  $2p \geq k - 2$  пропадает, так как в этом случае

$$(1, 2p) \sqcup (k, 2) \subsetneq (1, 0) \sqcup (k - 1, 1).$$

Рассмотрим вариант «точка+зигзаг». Если зигзаг не накрывает целиком ни одну из прогрессий  $(1, 2)$ ,  $(k, 2)$ , то конструкцию можно накрыть «полосой+полосой». Поэтому в этом варианте шаг зигзага равен 1, а сам зигзаг, как следствие, равен  $(k - 1, 1)$ . Но тогда точкой точно будет число 1. Получили кандидата (5). Рассмотрим вариант «полоса+зигзаг». Как и в предыдущем случае, для того, чтобы наша конструкция не накрывалась «полосой+полосой», зигзаг должен иметь шаг 1. Но тогда он точно пересекает нашу полосу, что невозможно. Разберем теперь последний вариант «зигзаг+зигзаг». Чтобы конструкция не накрывалась кандидатами  $(1, 2, 5)$ , в ней должны быть числа 1,  $k$  и хоть одно из чисел  $3, 5, \dots, k - 3$ . При этом, шаги  $d, f$  зигзагов должны быть нечетны, иначе они бы стали полосами. Возможны только два исхода. В первом числа 1,  $k$  попадают в один и тот же зигзаг. Тогда это точно  $(1, k - 1)$ . И начало  $e$  второго зигзага должно лежать в  $\{1, 3, \dots, k - 3\}$ . Получили

$$P_2 = (1, k - 1) \sqcup (x, n), \quad 3 \leq x \leq k - 3 - \text{нечетное}, \quad n - \text{нечетное}.$$

Покажем, что  $n \in A(x, k)$ , т.е. выполнены условия

$$n > k - x, \quad \text{НОД}(n, k - 1) \nmid x - 1, \quad \text{НОД}(n, x - 1, k - 1) = 1$$

и что для любого собственного делителя  $t$  числа  $n$  имеет место или условие  $t < k - x$ , или условие  $\text{НОД}(t, k - 1) \mid x - 1$ . Условие  $n > k - x$  следует из того, что  $n + x$  четно, а  $k$  – минимальное четное число в  $P_1$ . И  $n \neq k - x$  из-за непересечения последовательностей в  $P_2$ . Из этого же непересечения по лемме 1 получаем  $\text{НОД}(n, k - 1) \nmid x - 1$ . Условие  $\text{НОД}(n, x - 1, k - 1) = 1$  выполнено, так как иначе для любого общего простого делителя  $p$  чисел  $n, x - 1, k - 1$  получаем

$$(1, k - 1) \sqcup (x, n) \subset (1, 2p) \cup (k, 2) \subsetneq P_1.$$

Наконец, если для некоторого собственного делителя  $t$  числа  $n$  имеет место неравенство  $t \geq k - x$  и  $\text{НОД}(t, k - 1) \nmid x - 1$ , то

$$(1, k - 1) \sqcup (x, n) \subset (1, k - 1) \cup (x, t) \subsetneq P_1.$$

Получили кандидата (6). Во втором исходе числа  $1, k$  попадают в разные зигзаги. Тогда зигзаг с 1 проходит мимо чисел  $3, 5, \dots, k-3$ . И ровно одно из них лежит в зигзаге с  $k$ . С этого числа, которое обозначаем за  $x$ , зигзаг и начинается. Получили

$$P_2 = (1, n) \sqcup (x, k-x), \quad 3 \leq x \leq k-3 - \text{нечетное, } n - \text{нечетное.}$$

Покажем, что  $n \in B(x, k)$ , т.е. выполнены условия

$$n > k-1, \quad \text{НОД}(n, k-x) \nmid x-1, \quad \text{НОД}(n, k-x, k-1) = 1$$

и что для любого собственного делителя  $t$  числа  $n$  имеет место или условие  $t < k-1$ , или условие  $\text{НОД}(t, k-x) \mid x-1$ . Условие  $n > k-1$  следует из того, что  $n+1$  четно, а  $k$  — минимальное четное число в  $P_1$ . И  $n \neq k-1$  из-за непересечения последовательностей в  $P_2$ . Из этого же непересечения по лемме 1 получаем  $\text{НОД}(n, k-x) \nmid x-1$ . Условие  $\text{НОД}(n, k-x, k-1) = 1$  выполнено, так как иначе для любого общего простого делителя  $p$  чисел  $n, k-x, k-1$  получаем

$$(1, n) \sqcup (x, k-x) \subset (1, 2p) \cup (k, 2) \subsetneq P_1.$$

Наконец, если для некоторого собственного делителя  $t$  числа  $n$  имеет место неравенство  $t \geq k-1$  и  $\text{НОД}(t, k-x) \nmid x-1$ , то

$$(1, n) \sqcup (x, k-x) \subset (1, t) \cup (x, k-x) \subsetneq P_1.$$

Получили кандидата (7).

Покажем теперь попарную невозможность кандидатов (1–7). Для (1–2) все очевидно. Также тривиальны сравнения внутри (3–4). Разбираем оставшиеся случаи, в которых задействованы (5–7). Представитель (3) не может вкладываться в представителя (5), так как из условия

$$(1, 2p) \sqcup (k, 2) \subset (1, 0) \sqcup (k-1, 1)$$

следовало бы  $1+2p \geq k-1$ , т.е.  $2p \geq k-2$ . Представитель (3) не может вкладываться в представителя (6), так как из условия

$$(1, 2p) \sqcup (k, 2) \subset (1, k-1) \sqcup (x, n)$$

по лемме 4 о зигзаге получили бы  $k-1 \mid 4$ , но  $k-1$  — нечетно и больше 1. Точно также, представитель (3) не может вкладываться в представителя (7), так как из условия

$$(1, 2p) \sqcup (k, 2) \subset (1, n) \sqcup (x, k-x)$$

по лемме 4 о зигзаге получили бы  $k-x \mid 4$ , но  $k-x$  нечетно и больше 1. **Представитель (4)** не может вкладываться в **представителя (5)**, так как в левой части гипотетического вложения

$$(1, 2) \sqcup (k, 2p) \subset (1, 0) \sqcup (k-1, 1)$$

есть число 3, а в правой части его нет. **Представитель (4)** не может вкладываться в **представителей (6 – 7)** по тем же соображениям, что и **(3)**. **Представитель (5)** не может вкладываться в **представителя (3)**, так как из условия

$$(1, 0) \sqcup (k-1, 1) \subset (1, 2p) \sqcup (k, 2)$$

следует  $(k-1, 2) \subset (1, 2p)$ , что невозможно. **Представитель (5)** не может вкладываться в **представителя (4)**, так как из условия

$$(1, 0) \sqcup (k-1, 1) \subset (1, 2) \sqcup (k, 2p)$$

следует  $(k, 2) \subset (k, 2p)$ , что невозможно. **Представитель (5)** не может вкладываться в **представителя (6)**, так как из условия

$$(1, 0) \sqcup (k-1, 1) \subset (1, k-1) \sqcup (x, n)$$

по лемме 4 о зигзаге следует  $k-1 \mid 2$ , но  $k \geq 6$ . Аналогично, **представитель (5)** не может вкладываться в **представителя (7)**, так как из условия

$$(1, 0) \sqcup (k-1, 1) \subset (1, n) \sqcup (x, k-x)$$

по лемме 4 о зигзаге следует  $n \mid 2$ , но  $n > k-1 \geq 5$ . Покажем, что **представитель (6)** не может вкладываться в **представителя (3)**. Иначе было бы

$$(1, k-1) \sqcup (x, n) \subset (1, 2p) \sqcup (k, 2),$$

т.е.

$$(1, 2k-2) \sqcup (x, 2n) \subset (1, 2p).$$

Но тогда числа  $k-1$ ,  $x-1$  и  $n$  делятся на  $p$ , что невозможно из-за ограничения  $\text{НОД}(n, x-1, k-1) = 1$ . **Представитель (7)** не может вкладываться в **представителя (3)**, иначе было бы

$$(1, n) \sqcup (x, k-x) \subset (1, 2p) \sqcup (k, 2),$$

т.е.

$$(1 + n, 2n) \sqcup (k, 2k - 2x) \subset (1, 2p).$$

В этом случае числа  $n, k - 1, k - x$  делятся на  $p$ , но

$$\text{НОД}(n, k - x, k - 1) = 1.$$

**Представитель (6)** не может вкладываться в **представителя (4)**, иначе было бы

$$(1, k - 1) \sqcup (x, n) \subset (1, 2) \sqcup (k, 2p),$$

т.е.

$$(k, 2k - 2) \sqcup (x + n, 2n) \subset (k, 2p).$$

Тогда числа  $k - 1, x + n - k, n$  делятся на  $p$ . Значит и число  $x - 1$  делится на  $p$ , а это, как уже было показано выше, невозможно.

**Представитель (7)** не может вкладываться в **представителя (4)**, иначе было бы

$$(1, n) \sqcup (x, k - x) \subset (1, 2p) \sqcup (k, 2),$$

т.е.

$$(1, 2n) \sqcup (x, 2k - 2x) \subset (1, 2p).$$

Тогда числа  $n, x - 1, k - x$  делятся на  $p$ . Значит и число  $k - 1$  делится на  $p$ , а это невозможно. **Представители (6 – 7)** не могут вкладываться в **представителя (5)**, так как в них есть одно из чисел  $3, 5, \dots, k - 3$ . **Представитель (6)** не может вкладываться в другого **представителя (6)**, так как иначе

$$(1, k - 1) \sqcup (x_1, n_1) \subset (1, k - 1) \sqcup (x_2, n_2),$$

т.е.

$$(x_1, n_1) \subset (x_2, n_2).$$

Тогда  $x_1 = x_2$  и  $n_2$  - собственный делитель числа  $n_1$ . Но мы знаем, что для любого собственного делителя  $t$  числа  $n_1$  имеет место  $t < k - x_1$  или  $\text{НОД}(t, k - 1) \mid x_1 - 1$ . Получили противоречие, ведь  $n_2 \geq k - x_2 = k - x_1$  и  $\text{НОД}(n_2, k - 1) \nmid x_2 - 1 = x_1 - 1$ . Аналогично, **представитель (7)** не может вкладываться в другого **представителя (7)**, так как иначе

$$(1, n_1) \sqcup (x_1, k - x_1) \subset (1, n_2) \sqcup (x_2, k - x_2).$$

Здесь точно  $x_1 = x_2$ . Поэтому

$$(1, n_1) \subset (1, n_2)$$

и  $n_2$  - собственный делитель числа  $n_1$ . Далее рассуждения повторяют предыдущий случай. **Представитель (6)** не может вкладываться в **представителя (7)**, так как иначе

$$(1, k - 1) \sqcup (x_1, n_1) \subset (1, n_2) \sqcup (x_2, k - x_2)$$

и по лемме 4 о зигзаге  $2(k - 1)$  делится на  $n_2$ . Так как  $n_2$  нечетно, то  $k - 1$  делится на  $n_2$ . Но  $n_2 > k - 1$ . Противоречие. Наконец, **представитель (7)** не может вкладываться в **представителя (6)**, так как иначе

$$(1, n_1) \sqcup (x_1, k - x_1) \subset (1, k - 1) \sqcup (x_2, n_2).$$

Тогда обязательно  $x_1 = x_2$ . Значит по лемме 4 о зигзаге  $2(k - x_1)$  делится на  $n_2$ . Так как  $n_2$  нечетно, то  $k - x_1$  делится на  $n_2$ . Но  $n_2 > k - x_2 = k - x_1$ . Противоречие.

■

## Доказательство основной теоремы

Доказательство будет проходить перебором по всем возможным вариантам для  $P_1$  (с учетом замечания к лемме 2.) Пусть

$$P_1 = (a, b) \sqcup (c, d).$$

Если  $P_1$  — объединение двух точек, т.е.  $b = d = 0$ , то в  $P_2$  вообще не существует собственных подмножеств  $P_1$ . Если  $P_1$  — объединение точки и полосы, т.е., без ограничения общности,  $b = 0, d > 0$ , то возможны случаи. Если  $a \in (c, d)^+$ , то  $P_1$  можно преобразованием подобия перевести в  $(1, 0) \sqcup (x, 1)$ . При  $x = 2$  получаем условие 1, описанное в лемме 7. При  $x = 3$  получаем условие 2, описанное в лемме 8 о точке и полосе отступа 2. При  $x > 3$  получаем условие 3, описанное в лемме 9 о точке и полосе отступа больше 2. Если же  $a \notin (c, d)^+$ , то получаем условие 4, описанное в лемме 10 о точке и

внешней полосе. Пусть теперь  $b > 0, d > 0$ . Здесь тоже возможны варианты. Если последовательности  $(a, b)$  и  $(c, d)$  не согласованные, то получаем условие 5, описанное в лемме 11 о двух несогласованных полосах. Если последовательности  $(a, b)$  и  $(c, d)$  согласованные, но не синхронные, то получаем условие 6, описанное в лемме 12 о двух асинхронных полосах. Если последовательности  $(a, b)$  и  $(c, d)$  слабо синхронны, то по лемме 5 об общем виде слабой синхронизации  $P_1$  можно преобразованием подобия перевести в одно из множеств вида

$$(1, 2) \sqcup (k, 2n), \quad (1, 2n) \sqcup (k, 2),$$

где  $k, n \in \mathbb{N}$ ,  $k$  — четно,  $n > 1$  — нечетно. Если это  $(1, 2) \sqcup (k, 2n)$ , то при  $k = n + 1$  по лемме 13 о слабой синхронизации первого типа получаем условие 7. А при  $k \neq n + 1$  из лемм 14, 15 о слабой синхронизации второго и третьего типов выводится условие 8. Если же  $P_1$  подобно множеству  $(1, 2n) \sqcup (k, 2)$ , то при  $k = n + 1$  по лемме 16 о слабой синхронизации четвертого типа получаем условие 9. При  $k < n + 1$  из леммы 17 о слабой синхронизации пятого типа выводится условие 10. Наконец, при  $k > n + 1$  из леммы 18 о слабой синхронизации шестого типа выводится условие 11. Остался не разобранным последний случай, в котором последовательности  $(a, b)$  и  $(c, d)$  сильно синхронны. По лемме 6 об общем виде сильной синхронизации  $P_1$  можно преобразованием подобия перевести в множество вида

$$(1, 2) \sqcup (k, 2),$$

где  $k \in \mathbb{N}$  и  $k$  — четно. Если  $k = 2$  или  $k = 4$ , то эти случаи уже описаны нами в условиях 1 и 2. А если  $k \geq 6$ , то по лемме 19 о сильной синхронизации получаем условие 12. Все случаи рассмотрены.

■

## Список литературы

- [1] П. С. Дергач, Э. С. Айрапетов. *О прогрессивном разбиении некоторых подмножеств натурального ряда*. Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 3, М., Сс. 79-86.

- [2] П. С. Дергач. *О каноническом регулярном представлении  $S$ -тонких языков*. Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 1, М., Сс. 211-242.
- [3] П. С. Дергач. *О проблеме вложения допустимых классов*. Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 2, М., Сс. 143-174.
- [4] П. С. Дергач. *О двух размерностях спектров тонких языков*. Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 3, М., Сс. 155-174.
- [5] П. С. Дергач, Э. С. Айрапетов. *О прогрессивном разбиении последовательности натуральных чисел, имеющей пропуск длины 2*. Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 2, М., Сс. 67-86.
- [6] Е. Д. Данилевская, П. С. Дергач. *О покрытиях и разбиениях натуральных чисел, имеющих два последовательных пропуска длины 1*. Интеллектуальные системы, 2017. Т.21, вып. 1, М., Сс.187-230.
- [7] Д. Е. Александров. *Эффективные методы реализации проверки содержания сетевых пакетов регулярными выражениями*. Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 1, М., Сс. 37-60.
- [8] Д. Н. Бабин. *Частотные регулярные языки*. Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 1, М., Сс. 205-210.
- [9] Д. Е. Александров. *Об оценках автоматной сложности распознавания классов регулярных языков*. Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 4, М., Сс. 161-190.
- [10] В. М. Дементьев. *О звездной высоте регулярного языка и циклической сложности минимального автомата*. Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 4, М., Сс. 215-222.
- [11] И. Е. Иванов. *О сохранении периодических последовательностей автоматами с магазинной памятью с однобуквенным магазином*. Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 1, М., Сс. 145-160.
- [12] А. А. Петюшко. *О контекстно-свободных биграммных языках*. Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 2, М., Сс. 187-208.

- [13] И. Е. Иванов. *Нижняя оценка на максимальную длину периода выходной последовательности автономного автомата с магазинной памятью*. Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 3, М., Сс. 175-194.
- [14] В. А. Орлов. *О конечных автоматах с максимальной степенью различимости состояний*. Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 1, М., Сс. 213-222.
- [15] П. С. Дергач. *О проблеме проверки однозначности алфавитного декодирования в классе регулярных языков с полиномиальной функцией роста*. Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 2, М., Сс. 147-202.
- [16] А. М. Миронов. *Основные понятия теории вероятностных автоматов*. Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 2, М., Сс. 283-330.
- [17] А. А. Петюшко, Д. Н. Бабин. *Классификация Хомского для матриц биграммных языков*. Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 2, М., Сс. 331-336.
- [18] С. Б. Родин. *О связи линейно реализуемых автоматов и автоматов с максимальной вариативностью относительно кодирования состояний*. Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 2, М., Сс. 337-348.

# Оценки мощности плоских схем, реализующих монотонные функции.

Калачев Г.В.

В работе доказаны универсальные нижние оценки функции Шеннона мощности плоских схем, а также найден порядок роста функции Шеннона мощности схем, реализующих монотонные функции. В качестве меры мощности рассматривается максимальный потенциал, он равен максимальному количеству выходов элементов, выдающих единицу на заданном входном наборе схемы, где максимум берётся по всем входным наборам. В работе показано, что порядок роста функции Шеннона максимального потенциала для монотонных функций равен  $2^{n/2}/\sqrt[4]{n}$ , а порядок среднего потенциала равен  $2^{n/2}/\sqrt[4]{n^3}$ .

**Ключевые слова:** схемы из функциональных элементов, плоские схемы, клеточные схемы, потенциал, мощность, функция Шеннона, верхние оценки, нижние оценки, монотонные булевы функции.

## Введение.

В данной работе исследуется сложность реализации монотонных булевых функций плоскими схемами. Плоская схема является моделью чипа с учётом его укладки на плоскость. Обычно в качестве модели, описывающей работу чипа, используют структурные автоматы. Структурный автомат моделирует логическую структуру чипа. По теории автоматов имеется множество работ, например, [1]-[21]. Однако в модели на основе структурного автомата не отражено размещение логических элементов в кристалле, разводка проводов и энергопотребление.

Основная доля площади и энергопотребления для почти всех автоматов приходится на часть схемы, реализующей функцию перехода автомата. Функция перехода является булевой функцией или операторов. Поэтому с точки зрения теории сложности основной интерес представляет реализация плоскими схемами булевых функций и операторов.

Плоские схемы (или схемы из клеточных элементов), являются моделью микросхемы, в которой учитывается размещение логических элементов на плоскости и разводку проводов, в ней могут быть определены такие меры сложности, как площадь и мощность (энергопотребление). Впервые плоские схемы были введены Кравцовым С.С. в работе [22].

Плоские схемы – один из типов управляющих. К управляющим системам также относятся автоматы, схемы из функциональных элементов (далее СФЭ), контактные схемы и информационные графы. По теории управляющих систем публикуется множество работ, например, [23]-[29]. В теории управляющих систем часто ставится задача минимизации некоторой меры сложности. Основной мерой сложности плоских схем, СФЭ и контактных схем является число элементов схемы (или контактов), эта величина характеризует площадь чипа. Для плоских схем и СФЭ также важным параметром является мощность (или активность) схемы, она характеризует энергопотребление схемы. Для контактных схем аналогом активности является время моделирования. В отличие от схем, информационные графы моделируют не чипы, а структуры данных и алгоритмы поиска в них. Для информационных графов на первое место часто ставится среднее время ответа на запрос, а второй мерой сложности является число рёбер графа (соответствует памяти для хранения базы данных).

В теории управляющих систем часто исследуется зависимость какой-нибудь меры сложности от базиса. О. М. Касим-Заде в [31] показал, например, что существует базис, в котором одновременная минимизация сложности и мощности невозможна. Для информационных графов такого рода результат был получен Е. М. Перпером в работе [24]. Он показал, что для задачи поиска подстрок существует такое базовое множество, что не существует информационного графа, оптимального одновременно по времени и по памяти.

Однако с точки зрения порядка мощности плоских схем базис не играет такой роли. В работе [32] была введена переключательная

мощность и было показано, что она сохраняется с точностью до константы при замене базиса. Также было показано, что при отсутствии ограничений на базис эта мера с точностью до константы совпадает с потенциалом, рассматриваемым в этой работе. Переключательная мощность лучше отражает энергопотребление схемы и совпадает с потенциалом без ограничений на базис, его мы и исследуем в данной работе.

С. С. Кравцов [22] показал, что для реализации произвольной булевой функции плоской схемой требуется  $O(2^n)$  элементов, причём существуют функции, для реализации которых необходимо  $\Omega(2^n)$  элементов. В работе [30] О. В. Черемисин показал, что в классе прямоугольных схем невозможна одновременная минимизация площади и мощности плоских схем, реализующих систему всех конъюнкций. В статье [32] определены две меры мощности схем, и показана связь между ними, а также доказано, что произвольную булеву функцию от  $n$  переменных можно реализовать схемой площадью  $O(2^n)$  и мощностью  $O(2^{n/2})$ .

В работах [33] и [34] был получен порядок роста мощности плоских схем, реализующих частичные булевы операторы. В работе [35] найден порядок роста максимального потенциала схем, реализующих функции с малым числом единиц в зависимости от ограничений на расположение входов схемы.

В данной работе получен порядок функции Шеннона потенциала монотонных булевых функций от  $n$  переменных. В процессе доказательства основного результата также получены универсальные нижние оценки функции Шеннона для среднего и максимального потенциала для произвольного класса булевых функций.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю д.ф.-м.н., профессору Э.Э. Гасанову за постановку задачи и внимание к работе.

## Определения и обозначения.

### Плоские схемы

Клеточным элементом будем называть булев оператор, у которого в сумме не более четырёх входов и выходов, причём каждому его входу и каждому выходу сопоставлена некоторая метка из множества  $\{l, r, t, b\}$ , причём метки не повторяются.

Метки будем также называть сторонами элемента:

- $l$  — левая сторона;
- $r$  — правая сторона;
- $t$  — верхняя сторона;
- $b$  — нижняя сторона.

Клеточный элемент будем изображать в виде единичного квадрата на плоскости. При этом входам и выходам элемента сопоставляются стороны квадрата в соответствии с присвоенными им метками. Метки, присвоенные входам (выходам) оператора будем называть входами (выходами) элемента. Метки, не присвоенные ни входам, ни выходам, будем называть изоляторами. Множество входов (выходов) элемента  $e$  будем обозначать  $in(e)$  ( $out(e)$ ). Входы и выходы элемента будем называть его контактами.

Заметим, что это определение немного отличается от обычного тем, что допускается, чтобы на разных выходах реализовывались разные нетождественные функции.

Если на всех выходах элемента реализуются тождественные функции, то будем называть элемент коммутационным, иначе — логическим.

Коммутационный элемент соответствует либо проводнику в микросхеме, либо пересечению проводов, либо тождественной функции, служащей для усиления сигнала.

Описывать элемент будем уравнениями, которые задают его оператор, заменяя все переменные в них на сопоставленные им метки ( $l, r, t$  или  $b$ ). Тогда в левой части каждого уравнения будет стоять выходная метка, а в правую будут входить только входные метки. На рисунке 1 приведены примеры клеточных элементов.

Для удобства введем пустой клеточный элемент — изолирующий (будем обозначать  $\lambda$ ).

Всюду далее значок  $:=$  будет обозначать «по определению равно». За  $E$  обозначим множество всех клеточных элементов.

Сетью из клеточных элементов на множестве  $M \subset \mathbb{Z}^2$  над множеством  $E' \subseteq E$  будем называть отображение  $K : M \rightarrow E'$ , при этом  $E'$  будем называть базисом сети. Элемент  $K(x, y)$  будем называть элементом схемы  $K$  с координатами  $(x, y)$ . Элемент с приписанными ему координатами будем называть элементом схемы. Левой, правой, верхней и нижней сторонами элемента  $e$  с координатами

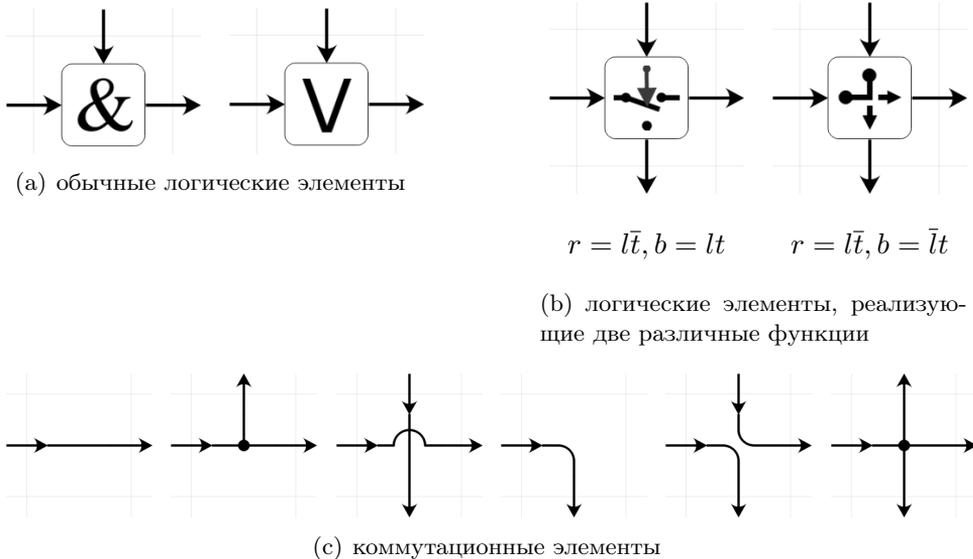


Рис. 1: Примеры клеточных элементов.

$(x, y)$  будем называть точки с координатами  $(x - \frac{1}{2}, y)$ ,  $(x + \frac{1}{2}, y)$ ,  $(x, y - \frac{1}{2})$  и  $(x, y + \frac{1}{2})$  соответственно (на рисунках ось  $y$  будет направлена вниз).

Будем говорить, что сеть  $K$  из клеточных элементов корректна, если для любых двух элементов  $x$  и  $y$  схемы  $K$  верно, что если сторона  $a$  элемента  $x$  совпадает со стороной  $b$  элемента  $y$ , то выполнено одно из условий:

- один из элементов  $x, y$  — изолирующий,
- стороны  $a$  и  $b$  являются изоляторами,
- либо среди них одна является входом, другая — выходом, например,  $a$  — выход, а  $b$  — вход, в таком случае будем говорить, что выход  $a$  подключён к входу  $b$ ;

Множество  $M$  будем называть носителем сети  $K$ .

Введем понятие графа корректной сети из клеточных элементов  $K$  (будем обозначать  $G_K$ ).  $G_K$  — ориентированный граф, вершинами которого являются входы и выходы элементов схемы. Если выход одного элемента подключён ко входу другого, то им будет соответствовать одна и та же вершина графа (будем говорить, что эта

вершина является выходом первого элемента и входом второго). Из вершины  $a$  в вершину  $b$  ведёт ребро в том и только том случае, когда существует элемент  $e$  такой, что  $a$  является его входом,  $b$  — выходом, причём функция, реализуемая на выходе  $b$ , существенно зависит от входа  $a$ .

Плоской схемой или схемой из клеточных элементов на множестве  $M \subset \mathbb{Z}^2$  над базисом  $E' \subseteq E$  будем называть корректную сеть из клеточных элементов с носителем  $M$ , в графе которой нет ориентированных циклов. Множество  $M$  будем называть носителем схемы  $K$ .

Далее везде по умолчанию используем базис  $E$ , то есть считаем, что у нас есть все клеточные элементы.

Если вход (выход) элемента не подключён к выходу (входу) другого элемента, будем его называть входом (выходом) схемы. Контактами схемы будем называть ее входы и выходы. Множество входов (выходов) схемы  $K$  будем обозначать  $In(K)$  ( $Out(K)$ ). Узлами схемы  $K$  будем называть вершины графа  $G_K$ . Если  $M$  —

носитель схемы  $K$ , то количество элементов множества  $M$  будем называть площадью схемы  $K$  и обозначать  $S(K)$ . Расстоянием между узлами схемы будем называть расстояние между соответствующими вершинами в  $G_K$ . Расстояние от узла  $a$  до узла  $b$  на схеме  $K$  будем обозначать  $\rho_K(a, b)$ . Подсхемой схемы  $K$  с носителем  $M_0 \subseteq M$  будем называть схему  $K|_{M_0}$ , получающуюся из  $K$  выбрасыванием клеточных элементов, соответствующих множеству  $M \setminus M_0$ . Если схема  $K$  фиксирована, то иногда будем говорить просто подсхема  $M_0$ .

Каждой плоской схеме  $K$  можно сопоставить схему из функциональных элементов  $Circ(K)$  следующим образом:

- 1) каждой функции  $f_{s,i}$ , которую реализует  $i$ -й выход элемента  $s$  клеточной схемы, сопоставим функциональный элемент  $e_{s,i}$ , реализующий  $f_{s,i}$ ; если  $i$ -й и  $j$ -й выходы являются выходами одной и той же функции, то им будет соответствовать один и тот же функциональный элемент;
- 2) если  $i$ -й выход  $s_1$  подключён к  $j$ -му входу  $s_2$  соединим выход элемента  $e_{s_1,i}$  с  $j$ -ми входами элементов  $e_{s_2,k}$  для всех  $k$ , для которых  $f_{s_2,k}$  зависит от  $j$ -го аргумента;

3) удалим из схемы все тождественные функции, подсоединив их вход ко всем их выходам.

Будем говорить, что схема  $K$  реализует булев оператор  $F_K$ , если схема из функциональных элементов  $Circ(K)$  реализует  $F_K$ .

Минимальную площадь плоской схемы, реализующей оператор  $F$  обозначим за  $S(F)$ .

Будем говорить, что плоские схемы  $K_1$  и  $K_2$  равны и писать  $K_1 = K_2$ , если существует параллельный перенос плоскости, который позволяет совместить схемы  $K_1$  и  $K_2$ , иначе будем говорить, что  $K_1$  и  $K_2$  различны.

**Замечание.** Мы здесь не предполагаем, что схема имеет форму прямоугольника. При доказательстве верхних оценок мы используем прямоугольные схемы, а доказанные нижние оценки верны для схем произвольной формы.

### Мощность схем.

Для каждой схемы  $K$  зафиксируем некоторую нумерацию ее узлов. На  $i$ -м узле реализуется некоторая функция  $g_i$  от входных переменных схемы  $K$  (на входах считаем, что реализуются тождественные функции).

Везде далее будем считать, что схема  $K$  имеет  $n$  входов,  $l$  узлов и  $g_i$  — функция, реализуемая в  $i$ -м узле схемы  $K$ .

Состоянием схемы  $K$  на входном наборе  $x$  назовём вектор

$$s_K(x) := (g_1(x), \dots, g_l(x)).$$

Если  $v = (v_1, \dots, v_q) \in \{0, 1\}^q$ , обозначим  $|v| := v_1 + v_2 + \dots + v_q$ .

Если есть частичная булева функция или оператор  $f$  и всюду определённая функция или оператор  $F$ , и некоторое доопределение  $f$  получается из  $F$  добавлением фиктивных переменных и перестановкой аргументов и компонент оператора, то будем писать  $F \doteq f$ .

Пусть схема  $K$  имеет  $n$  входов. Тогда Потенциалом схемы  $K$  на входном наборе  $x \in \{0, 1\}^n$  назовём величину  $u_K(x) := |s_K(x)|$ .

Максимальным потенциалом схемы  $K$  на множестве входных наборов  $\mathcal{D} \subseteq \{0, 1\}^n$  назовём  $\hat{U}_{\mathcal{D}}(K) := \max_{x \in \mathcal{D}} u_K(x)$ .

Средним потенциалом схемы  $K$  на множестве входных наборов  $D \subseteq \{0, 1\}^n$

назовём  $U_D(K) := \frac{1}{|D|} \sum_{x \in D} u_K(x)$ . В случае  $D = \{0, 1\}^n$  средний потенциал будем обозначать просто  $U(K)$ , то есть  $U(K) = U_{\{0,1\}^n}(K)$ . Пусть  $f : D \rightarrow \{0, 1\}$  — частичная булева функция. Определим средний и максимальный потенциал функции  $f$ .

$$U_D(f) := \min_{K: F_K \doteq f} U_D(K), \quad \widehat{U}_D(f) := \min_{K: F_K \doteq f} \widehat{U}_D(K).$$

Введём функции Шеннона для среднего и максимального потенциала в классе  $\mathcal{F}$  булевых функций

$$U_D(\mathcal{F}) := \max_{f \in \mathcal{F}} U_D(f), \quad \widehat{U}_D(\mathcal{F}) := \max_{f \in \mathcal{F}} \widehat{U}_D(f).$$

С целью сделать формулы менее громоздкими, условимся использовать сокращённые обозначения. В случае  $D = \{0, 1\}^n$  индекс  $D$  будем опускать ( $n$  — число входов схемы или аргументов функции, определяется из контекста).

## Результаты.

**Теорема 1.** *Для любой булевой функции  $f$ , отличной от константы, выполнена оценка*

$$\widehat{U}(f) \geq \frac{\sqrt{S(f)}}{4\sqrt{2}}.$$

Учитывая простую мощностную нижнюю оценку функции Шеннона для площади плоских схем, получим

**Следствие 1.** *Пусть  $\mathcal{F}$  — некоторый класс булевых функций,  $\mathcal{F}(n) := \mathcal{F} \cap P_2(n)$ . Тогда доля функций  $f \in \mathcal{F}(n)$ , для которых верна оценка*

$$\widehat{U}(f) \geq C_1 \sqrt{\log |\mathcal{F}(n)| - n \log n},$$

*стремится к 1 при  $n \rightarrow \infty$ . Здесь  $C_1 > 0$  — некоторая константа.*

Теперь сформулируем универсальную нижнюю оценку для среднего потенциала.

Для булевых функций от  $n$  переменных определим

- $|f| := |\{x : f(x) = 1\}|$  — вес булевой функции
- $\text{dist}(f, g) := |f \oplus g|$  — метрика на множестве булевых функций

Пусть  $\mathcal{F}$  — класс булевых функций. Обозначим через  $\varphi_n(\mathcal{F}, t)$  максимальное количество функций из  $\mathcal{F}(n)$ , попадающих в шар радиуса  $2^{nt}$ ,

$$\varphi_n(\mathcal{F}, t) = \max_{f_0 \in P_2(n)} \#\{f \in \mathcal{F}(n) : \text{dist}(f, f_0) \leqslant tn\}.$$

**Теорема 2.** Пусть задан класс функций  $\mathcal{F}$  такой, что  $n \log n = o(\log |\mathcal{F}(n)|)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда для любой невозрастающей последовательности  $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ ,  $t_n \in (0, 1]$  доля функций  $f \in \mathcal{F}_n$ , для которых верна оценка

$$U(f) \geqslant t_n \sqrt{\log_2 \frac{|\mathcal{F}_n|}{\varphi_n(\mathcal{F}, t_n)}},$$

стремится к 1 при  $n \rightarrow \infty$ .

Следующее утверждение можно получить как из предыдущей теоремы, так и из нижней оценки для частичных булевых функций.

**Утверждение 1.** Если  $\mathcal{F}(n)|_{\mathcal{D}_n} = P_2(\mathcal{D}_n)$  для некоторого семейства областей  $\mathcal{D}_n \subseteq \{0, 1\}^n$ , то при  $n \rightarrow \infty$  выполнена оценка

$$U(\mathcal{F}(n)) \geqslant \frac{|\mathcal{D}_n|^{3/2}}{2^n}.$$

**Теорема 3.** Для класса монотонных функций верны следующие оценки.

$$\widehat{U}(M(n)) \asymp \frac{2^{n/2}}{\sqrt[4]{n}},$$

$$U(M(n)) \asymp \frac{2^{n/2}}{n^{3/4}} \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

## Доказательство

### Нижние оценки.

Пусть  $M$  — подсхема схемы  $K$ . Введём несколько обозначений.

- Входы и выходы подсхемы  $M$ , не являющиеся входами и выходами схемы  $K$ , назовем граничными контактами подсхемы  $M$  относительно схемы  $K$ . Множество граничных контактов будем обозначать  $(M|K)$  и называть разрезом.

- За  $In(M|K)$  обозначим множество входов схемы  $M$ , которые лежат на разрезе  $(M|K)$  (такие входы будем называть граничными), то есть

$$In(M|K) = In(M) \cap (M|K) = In(M) \setminus In(K).$$

- За  $In(MK)$  обозначим множество входов схемы  $M$ , являющихся входами схемы  $K$ . То есть,

$$In(MK) = In(M) \cap In(K) = In(M) \setminus (M|K).$$

- За  $Out(M|K)$  обозначим множество выходов схемы  $M$ , которые лежат на разрезе  $(M|K)$  (такие выходы будем называть граничными), то есть

$$Out(M|K) = Out(M) \cap (M|K) = Out(M) \setminus Out(K).$$

- За  $Out(MK)$  обозначим множество выходов  $K_0$ , которые являются выходами  $K$ , то есть

$$Out(MK) = Out(M) \cap Out(K) = Out(M) \setminus (M|K).$$

Для фиксированной схемы  $K$  введём следующие обозначения.

- $B_r$  — множество клеток на плоскости, отстоящих от выходных элементов (тех, входы которых являются выходами схемы) не более чем на  $r - 1$  по манхеттеновской метрике.
- $K_r$  — множество элементов схемы  $K$ , лежащие в множестве  $B_r$ .

*Доказательство теоремы 1.* Рассмотрим произвольную функцию  $f \in P_2$ , отличную от константы и схему  $K$ , которая реализует функцию  $f$  с наименьшим максимальным потенциалом (из всех схем с одинаковым потенциалом выберем схему с наименьшим количеством узлов).

Тогда в схеме  $K$  все входы соответствуют существенным переменным функции  $f$ , иначе можно было бы удалить несущественный вход, уменьшив количество узлов схемы и не увеличив максимальный потенциал. Аналогично, каждый узел схемы  $K$  зависит существенно от некоторого входа схемы, иначе он равен константе, и его можно удалить, уменьшив число узлов схемы. Здесь существенно,

что базис не ограничен, поэтому константный узел можно удалить, изменяя соответствующим образом функцию, реализуемую элементом, для которого этот узел является входом.

Пусть  $n$  — количество входов схемы  $K$ . Рассмотрим выход схемы  $\alpha$  и самый дальний от него узел схемы  $\beta$ , а также вход  $\gamma$ , от которого  $\beta$  существенно зависит. Без ограничения общности будем считать, что на вход  $\beta$  подаётся первая переменная функции. Поскольку  $\alpha$  и  $\gamma$  существенно зависят от  $\beta$ , то существуют наборы  $a, b \in \{0, 1\}^{n-1}$  такие, что  $\varphi_\alpha(0, a) = f(0, a) \neq f(1, a) = \varphi_\alpha(1, a)$ ,  $\varphi_\gamma(0, a) \neq \varphi_\gamma(1, a)$ . Поскольку у наборов  $(0, a)$  и  $(1, a)$  различается только первая компонента (вход  $\beta$ ), а значения в узле  $\alpha$  различны, то существует цепочка узлов  $[\beta = t_0, t_2, \dots, t_l = \alpha]$  такая, что  $\varphi_{t_i}(0, a) \neq \varphi_{t_i}(1, a)$  для всех  $i = 0, \dots, l$ . Причём  $t_i \neq t_j$  при  $i \neq j$  и для каждого  $i = 0, \dots, l-1$  узлы  $t_i$  и  $t_{i+1}$  — соответственно вход и выход некоторого элемента.  $l$  не может быть меньше расстояния  $\rho_K(\alpha, \beta)$ . Это означает, что

$$u_K(0, a) + u_K(1, a) \geq \sum_{i=0}^l (\varphi_{t_i}(0, a) + \varphi_{t_i}(1, a)) = l + 1 \geq \rho_K(\beta, \alpha) + 1.$$

Аналогично получим, что

$$u_K(0, b) + u_K(1, b) \geq \rho_K(\beta, \gamma) + 1.$$

Тогда по неравенству треугольника

$$\begin{aligned} u_K(0, a) + u_K(1, a) + u_K(0, b) + u_K(1, b) &\geq \\ &\geq \rho_K(\beta, \alpha) + \rho_K(\beta, \gamma) + 2 \geq \rho_K(\alpha, \gamma) + 2. \end{aligned}$$

Поскольку круг радиуса  $r$  по манхэттенской метрике имеет площадь  $< 2(r + 1)^2$ , а  $\gamma$  — самый дальний узел от  $\alpha$ , то вся схема помещается в круг с центром в клетке снаружи схемы, на границе которой находится выход  $\alpha$ , радиуса  $r := \rho_K(\alpha, \gamma)$ . Отсюда  $2(r + 1)^2 > s \geq S(f)$ ,

$$\rho_K(\alpha, \gamma) > \frac{\sqrt{s}}{2} - 1 \geq \frac{\sqrt{S(f)}}{2} - 1.$$

Отсюда получаем требуемую оценку

$$\begin{aligned}\widehat{U}(f) = \widehat{U}(K) &\geq \max(u_K(0, a), u_K(1, a), u_K(0, b), u_K(1, b)) \geq \\ &\geq \frac{u_K(0, a) + u_K(1, a) + u_K(0, b) + u_K(1, b)}{4} \geq \\ &\geq \frac{\rho_K(\alpha, \gamma) + 2}{4} > \frac{\sqrt{S(f)}/2}{4} = \frac{\sqrt{S(f)}}{4\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Теорема доказана.  $\square$

*Доказательство теоремы 2.* Каждой функции  $f \in \mathcal{F}$  сопоставим некоторую схему  $K^f$ , реализующую  $f$  с наименьшим средним потенциалом. Введём множество  $L(r, n, t) \subseteq \mathcal{F}(n)$  — множество функций, для которых значения на разрезе  $(K_r^f | K^f)$  отличны от 0 на области  $\mathcal{D}_r^f$  состоящей из не более, чем  $R := t \cdot 2^n$  наборов. Для каждой такой функции определим функцию  $f'_r$ , которая реализуется схемой  $K_r^{f'}$ , которая получена из  $K_r^f$  заменой всех входов  $In(K_r^f | K^f)$  на 0 и удалением всех выходов  $Out(K_r^f | K^f)$ . По построению, на всех  $x \in \{0, 1\}^n \setminus \mathcal{D}_r^f$   $f'_r(x) = f(x)$ , поскольку схема  $K_r^{f'}$  и подсхема  $K_r^f$  схемы  $K^f$  на этих наборах функционируют одинаково. Это означает, что  $\text{dist}(f, f'_r) \leq |\mathcal{D}_r^f| \leq R$ .

Оценим мощность множества  $l(r, n, t)$ . Каждая  $f \in l(r, n, t)$  лежит в шаре радиуса  $R$  с центром в некоторой функции  $f'_r$ , которая реализуется схемой  $K_r^{f'}$ . Схема  $K_r^{f'}$  помещающейся в круг радиуса  $r$ , откуда  $S(f'_r) \leq S(K_r^{f'}) = O(r^2)$ .

- 1) Существует не более  $A^{O(r^2)}$  схем площади  $O(r^2)$ , где  $A > 0$  — некоторая константа.
- 2) Каждая схема определяет функцию с точностью до перестановки переменных. Таким образом, каждой схеме соответствует не более  $n!$  различных функций.
- 3) По определению функции  $\varphi_n$ , существует не более  $\varphi_n(\mathcal{F}, t)$  функций из  $\mathcal{F}$ , которые могут попасть в шар радиуса  $t \cdot 2^n$ .

Итак,

$$|l(r, n, t)| \leq A^{O(r^2)} n! \varphi_n(\mathcal{F}, t).$$

Введём множество  $L(r, n, t) := \bigcup_{i=1}^r l(i, n, t)$ . Тогда

$$|L(r, n, t)| \leq r A^{O(r^2)} n! \varphi_n(\mathcal{F}, t) \leq B^{r^2} n! \varphi_n(\mathcal{F}, t),$$

где  $B > 0$  — некоторая константа. Тогда при  $r = \sqrt{\frac{1}{2 \log_2 B} \log_2 \frac{|\mathcal{F}_n|}{\varphi_n(\mathcal{F}, t)}}$  имеем

$$\begin{aligned} \log_2 |L(n, r, t)| &< \log_2 r + n \log_2 n + \frac{1}{2} \log_2 \frac{|\mathcal{F}_n|}{\varphi_n(\mathcal{F}, t)} + \log_2 \varphi_n(\mathcal{F}, t) = \\ &= \log_2 r + n \log_2 n + \log_2 |\mathcal{F}_n| - r \sqrt{\frac{\log_2 B}{2}} \leq \\ &\leq \log_2 |\mathcal{F}_n| - Cr \text{ при достаточно большом } n. \end{aligned}$$

Здесь  $C$  — некоторая константа. Теперь заметим, что для всех  $f \in \mathcal{F}_n \setminus L(r, n, t)$  для всех  $i = 1, \dots, r$  на разрезе  $(K_i^f | K^f)$  есть хотя бы один ненулевой узел более, чем на  $R$  наборах, значит  $U(K_i^f | K^f) > R/2^n = t$ . Отсюда

$$U(f) = U(K^f) \geq \sum_{i=1}^r U(K_i^f | K^f) \geq rt = C_1 t \sqrt{\log_2 \frac{|\mathcal{F}_n|}{\varphi_n(\mathcal{F}, t)}}.$$

Осталось показать, что доля функций  $f \in L(r, n, t)$  в классе  $\mathcal{F}_n$  стремится к 0.

$$\frac{|L(r, n, t)|}{|\mathcal{F}_n|} = \frac{2^{\log_2 |\mathcal{F}_n| - Cr}}{|\mathcal{F}_n|} = 2^{-Cr} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

поскольку  $r = \Omega(\log_2 \frac{\mathcal{F}_n}{\varphi_n(\mathcal{F}, t)}) = \omega(n \log n) \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Теорема доказана.  $\square$

*Доказательство утверждения 1.* Сразу отметим, что в случае  $|\mathcal{D}_n|^{3/2} < 2^n$  утверждение очевидно и несодержательно, поэтому далее рассматриваем случай  $|\mathcal{D}_n|^{3/2} \geq 2^n$ .

По теореме [33, Теорема 1], при достаточно большом  $n$  существует  $f \in P_2(\mathcal{D}_n)$  такая, что  $U_{\mathcal{D}_n}(f) \geq C_1 \sqrt{|\mathcal{D}_n|}$ , где  $C_2 > 0$  — некоторая константа. Поскольку  $P_2(\mathcal{D}_n) = \mathcal{F}(n)|_{\mathcal{D}_n}$ , то существует функция  $f' \in \mathcal{F}$  такая, что  $f'|_{\mathcal{D}_n} = f$ . Это означает, что

$$C_1 \sqrt{|\mathcal{D}_n|} \leq U_{\mathcal{D}_n}(f) \leq U_{\mathcal{D}_n}(f') \leq \frac{2^n}{|\mathcal{D}_n|} U(f') \leq \frac{2^n}{|\mathcal{D}_n|} U(\mathcal{F}(n)).$$

Отсюда сразу следует требуемая оценка. Утверждение доказано.  $\square$

*Доказательство нижней оценки в теореме 3.*

Положим  $\mathcal{D}_n = \{x \in \{0, 1\}^n : |x| = \lfloor n/2 \rfloor\}$  — множество наборов, находящихся на среднем слое булева куба. Рассмотрим подкласс монотонных функций  $M'(n) \subseteq M(n)$ , все нижние единицы и верхние нули которых расположены в множестве  $\mathcal{D}_n$ . Такие функции полностью задаются своими значениями на  $\mathcal{D}_n$ , поэтому  $|M'(n)| = C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}$ . Применяя следствие 1 получим

$$\begin{aligned} \widehat{U}(M(n)) &\geq \widehat{U}(M'(n)) \geq C_1 \sqrt{\log C_n^{\lfloor n/2 \rfloor} - n \log n} = \\ &= \Omega \left( \sqrt{\frac{2^n}{\sqrt{n}}} \right) = \Omega \left( \frac{2^{n/2}}{\sqrt[4]{n}} \right). \end{aligned}$$

Для оценки среднего потенциала воспользуемся утверждением 1. Поскольку все наборы в множестве  $\mathcal{D}_n$  несравнимы, то значения монотонной функции на них можно задать произвольно, значит  $M'(n)|_{\mathcal{D}_n} = P_2(\mathcal{D}_n)$ . Из утверждения 1 получим

$$U(M(n)) \geq C_1 \frac{|\mathcal{D}_n|^{3/2}}{2^n} \asymp \frac{(2^n/\sqrt{n})^{3/2}}{2^n} = \frac{2^{n/2}}{n^{3/4}}.$$

Нижние оценки доказаны. □

### Реализация монотонных функций.

Как и в предыдущих работах [34] и [35], будем использовать базис  $\{\vee, \&, \oplus, 1\}$ .

Введём длину и ширину схемы  $K$ .

*Длиной* схемы  $K$  называется длина наименьшего прямоугольника, содержащего все непустые элементы схемы  $K$ , обозначается  $l(K)$ .

*Шириной* схемы  $K$  называется ширина наименьшего прямоугольника, содержащего все непустые элементы схемы  $K$ , обозначается  $h(K)$ .

Для блоков, повернутых на  $90^\circ$ , будем добавлять верхний индекс  $\top$  к названию блока, чтобы явно подчеркнуть, что его длина равна ширине исходного блока и наоборот. Вообще говоря, ориентация блока обычно однозначно устанавливается исходя из расположения его входов и выходов. Поэтому отражённые и перевёрнутые блоки будем обозначать так же, как и исходный блок.

Введём также несколько обозначений.

- Если  $x$  – булева переменная,  $\alpha$  – булева величина, то  $x^\alpha := x \oplus \bar{\alpha}$ .
- Если  $x = (x_1, \dots, x_k)$  и  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  – булевы вектора, то  $x^\alpha := \bigwedge_{i=1}^k x_i^{\alpha_i}$ .
- Если  $i$  – неотрицательное целое число,  $k \in \mathbb{N}$ , то  $\bar{i}^{(k)}$  – булев вектор, составленный первых  $k$  цифр в двоичной записи числа  $i$ , начиная с младшего разряда. То есть  $i \equiv \bar{i}_1^{(k)} + 2\bar{i}_2^{(k)} + \dots + 2^{k-1}\bar{i}_k^{(k)} \pmod{2^k}$ .  $j$ -ю цифру числа  $i$  будем обозначать просто  $\bar{i}_j$  без верхнего индекса.
- Если  $x = (x_1, \dots, x_k)$  – булев вектор,  $i$  – неотрицательное целое число, то  $x^{\bar{i}} := x^{\bar{i}^{(k)}}$ .

Мы будем использовать метод декомпозиции монотонных булевых функций, который использовался в [36, Теорема 10.9] при построении схемы из функциональных элементов для монотонных функций. Нам потребуются аналоги лемм [36, Леммы 10.13-10.15]. Для доказательства нам понадобится несколько определений из [36]. При доказательстве этих лемм будем полагать, что  $n$  – чётное.

Пара вершин  $n$ -мерного булева куба называется ребром, если эти вершины различаются ровно в одном разряде. Пусть  $f$  – монотонная булева функция. Ребро  $(x, y)$  называется непостоянным, если  $f(x) \neq f(y)$ . Будем говорить, что ребро  $(x, y)$  проходит в  $i$ -м направлении, если наборы  $x$  и  $y$  различаются в  $i$ -м разряде.

**Лемма 1** ([36], Лемма 10.12). *У любой  $n$ -местной монотонной булевой функции число непостоянных рёбер не превосходит  $\frac{n}{2}C_n^{n/2}$ .*

**Лемма 2** (Аналог леммы 10.13, [36]). *Для любой  $n$ -местной монотонной булевой функции и любого  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$  найдутся такие направления  $i_1, \dots, i_k$ , что число непостоянных рёбер, проходящих в этих направлениях, не превосходит  $\frac{k}{2}C_n^{n/2}$ .*

*Доказательство.* Пусть  $r_i$  – число непостоянных рёбер, проходящих в  $i$ -м направлении. Упорядочим все направления по возрастанию  $r_i$ . В качестве  $i_j$  возьмём  $j$ -й элемент в полученной последовательности. Тогда  $r_{i_1} \leq r_{i_2} \leq \dots \leq r_{i_n}$ . Для доказательства нам нужно показать, что  $\sum_{j=1}^k r_{i_j} \leq \frac{k}{2}C_n^{n/2}$ .

Среднее значение первых  $k$  элементов не больше среднего значения всех элементов последовательности  $(r_{i_j})_{j=1}^n$ , то есть

$$\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k r_{i_j} \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n r_{i_j}.$$

По лемме 1 число непостоянных рёбер не больше  $\frac{n}{2} C_n^{n/2}$ . Отсюда

$$\sum_{j=1}^k r_{i_j} \leq \frac{k}{n} \sum_{j=1}^n r_{i_j} \leq \frac{k}{n} \cdot \frac{n}{2} C_n^{n/2} = \frac{k}{2} C_n^{n/2}.$$

Лемма доказана.  $\square$

Символом  $f_{i_1 \dots i_k}^{\alpha_1, \dots, \alpha_k}(x)$ ,  $\alpha_i \in \{0, 1\}$  обозначим функцию от  $(n - k)$  переменных, получающуюся из функции  $f$  от  $n$  переменных подстановкой констант  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  вместо аргументов с номерами  $i_1, \dots, i_k$ . Символом  $x_{i_1 \dots i_k}^{\alpha_1, \dots, \alpha_k}$  обозначим набор длины  $n$ , у которого разряды с номерами  $i_1, \dots, i_k$  равны  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  и который после удаления этих разрядов превращается в набор  $x$  длины  $n - k$ . Таким образом, выполнено равенство

$$f_{i_1 \dots i_k}^{\alpha_1, \dots, \alpha_k}(x) = f(x_{i_1 \dots i_k}^{\alpha_1, \dots, \alpha_k}).$$

**Лемма 3** (Аналог леммы 10.14, [36]). *Для любой  $n$ -местной монотонной булевой функции  $f$  и числа  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$  найдутся такие  $i_1, \dots, i_k$ , что  $f_{i_1 \dots i_k}^{1 \dots 1}(x) \neq f_{i_1 \dots i_k}^{0 \dots 0}(x)$  не более чем для  $\frac{1}{2} C_n^{n/2}$  различных наборов  $x$  длины  $n - k$ .*

*Доказательство.* По лемме 2 существуют направления  $i_1 \dots i_k$ , вдоль которых в сумме проходит не более  $\frac{k}{2} C_n^{n/2}$  непостоянных рёбер. За  $X$  обозначим множество наборов  $x \in \{0, 1\}^{n-k}$ , для которых  $f_{i_1 \dots i_k}^{1 \dots 1}(x) \neq f_{i_1 \dots i_k}^{0 \dots 0}(x)$ .

Рассмотрим произвольный  $x \in X$ . В  $k$ -мерном булевом подкубе  $x_{i_1 \dots i_k}^y$ ,  $y \in \{0, 1\}^k$ , имеется  $k$  непересекающихся по рёбрам цепей из вершины  $x_{i_1 \dots i_k}^{0 \dots 0}$  в  $x_{i_1 \dots i_k}^{1 \dots 1}$ . Поскольку

$$f(x_{i_1 \dots i_k}^{0 \dots 0}) = f_{i_1 \dots i_k}^{0 \dots 0}(x) < f_{i_1 \dots i_k}^{1 \dots 1} = f(x_{i_1 \dots i_k}^{1 \dots 1}),$$

то в каждой из цепей из  $x_{i_1 \dots i_k}^{0 \dots 0}$  в  $x_{i_1 \dots i_k}^{1 \dots 1}$  есть непостоянное ребро. Таким образом, каждому  $x \in X$  соответствует не менее  $k$  различных непостоянных рёбер. Причём рёбра, соответствующие разным  $x$  не могут совпадать.

Это означает, что число непостоянных рёбер по крайней мере в  $k$  раз больше, чем число элементов множества  $X$ . Отсюда

$$|X| \leq \frac{1}{k} \cdot \frac{k}{2} C_n^{n/2} = \frac{1}{2} C_n^{n/2}.$$

Лемма доказана.  $\square$

Символом  $x_{i_1 \dots i_k}$  обозначим набор длины  $n - k$ , получающийся из набора  $x$  длины  $n$  удалением разрядов с номерами  $i_1, \dots, i_k$ .

**Лемма 4** (Аналог леммы 10.15, [36]). *Пусть  $n$  делится на 2. Тогда для любой функции  $f \in M(n)$  существуют различные номера  $i_1, \dots, i_k$  и функции  $p, q \in M(n - k)$  такие, что мощность множества*

$$\mathcal{D} = \left\{ x : \overline{p(x_{i_1 \dots i_k})} q(x_{i_1 \dots i_k}) = 1 \right\}$$

*не превосходит  $2^{k-1} C_n^{n/2}$ , и существует частичная функция  $f_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \rightarrow \{0, 1\}$  такая, что*

$$f(x) = p(x_{i_1 \dots i_k}) \vee \overline{p(x_{i_1 \dots i_k})} q(x_{i_1 \dots i_k}) f_{\mathcal{D}}(x). \quad (1)$$

*Доказательство.* По лемме 3 существуют номера  $i_1 \dots i_k$ , что  $f_{i_1 \dots i_k}^{1 \dots 1}(x) \neq f_{i_1 \dots i_k}^{0 \dots 0}(x)$  не более чем для  $\frac{1}{2} C_n^{n/2}$  различных наборов  $x$  длины  $n - k$ . Положим

$$p = f_{i_1 \dots i_k}^{0 \dots 0}, \quad q = f_{i_1 \dots i_k}^{1 \dots 1}, \quad \mathcal{D} = \left\{ x \mid \overline{p(x_{i_1 \dots i_k})} q(x_{i_1 \dots i_k}) = 1 \right\}, \quad f_{\mathcal{D}} = f|_{\mathcal{D}}.$$

Для каждому набору  $x_{i_1 \dots i_k} \in E_k^{n-k}$ , для которого  $\overline{p(x_{i_1 \dots i_k})} q(x_{i_1 \dots i_k}) = 1$ , соответствует  $2^k$  наборов из  $|\mathcal{D}|$ , получающихся из  $x_{i_1 \dots i_k}$  произвольным выбором значений переменных  $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ . Значит

$$|\mathcal{D}| \leq 2^k \cdot \frac{1}{2} C_n^{n/2} = 2^{k-1} C_n^{n/2}.$$

Осталось проверить, что для выбранных  $p, q$  и  $f_{\mathcal{D}}$  выполнено представление (1).

Для произвольного  $x \in \{0, 1\}^{n-k}$  имеем

$$p(x_{i_1 \dots i_k}) = f_{i_1 \dots i_k}^{0 \dots 0}(x_{i_1 \dots i_k}) \leq f(x) \leq f_{i_1 \dots i_k}^{1 \dots 1}(x_{i_1 \dots i_k}) = q(x_{i_1 \dots i_k}).$$

Рассмотрим 3 случая.

- 1) Если  $p(x_{i_1 \dots i_k}) = 1$ , то  $f(x) = 1$ , таким образом (1) выполнено.
- 2) Если  $q(x_{i_1 \dots i_k}) = 0$ , то  $p(x_{i_1 \dots i_k}) = f(x) = 0$ , значит (1) выполнено.
- 3) Остался случай  $p(x_{i_1 \dots i_k}) = 0$ ,  $q(x_{i_1 \dots i_k}) = 1$ . Тогда

$$\overline{p(x_{i_1 \dots i_k})}q(x_{i_1 \dots i_k}) = 1,$$

значит  $x \in \mathcal{D}$ , и определена функция  $f_{\mathcal{D}}(x)$ , причём  $f_{\mathcal{D}}(x) = f(x)$ . Таким образом, (1) в этом случае также выполнено.

Лемма доказана. □

В представлении (1) используется частичная булева функция, для её реализации будем использовать схему, построенную в работе [34]. Эта схема является оптимальной (по порядку) по площади, мощности и глубине.

Для удобства реализации функций  $p$  и  $q$  одной схемой введём операцию слияния двух схем. Неформально, при этой операции элементы каждой схемы раздвигаются, при этом элементы первой схемы размещаются в клетках с чётными координатами, а элементы второй схемы — в клетках с нечётными координатами (см. рисунок 2)

Разместим схемы  $K_1$  и  $K_2$  на плоскости таким образом, чтобы координаты всех элементов были неотрицательными, но для каждой из координат были элементы с нулевыми значениями этой координаты. Слиянием схем  $K_1$  и  $K_2$  будем называть схему  $K = K_1 \uplus K_2$  построенную следующим образом. Напомним, что схему мы определяли, как отображение из некоторого множества  $M$  в множество  $E \cup \{\lambda\}$ . Доопределим это отображение на  $\mathbb{Z}^2 \setminus M$  значением  $\lambda$ .

- 1)  $K(2i, 2j) = K_1(i, j)$ .
- 2)  $K(2i + 1, 2j + 1) = K_2(i, j)$ .
- 3) Элемент  $K(2i + 1, 2j)$  соединяет элементы  $K(2i, 2j)$  и  $K(2i + 2, 2j)$ , если точка  $(i + 1/2, j)$  является узлом схемы  $K_1$ , а также соединяет элементы  $K(2i + 1, 2j - 1)$  и  $K(2i + 1, 2j + 1)$ , если точка  $(i, j - 1/2)$  является узлом схемы  $K_2$ .
- 4) Элемент  $K(2i, 2j + 1)$  соединяет элементы  $K(2i - 1, 2j + 1)$  и  $K(2i + 1, 2j + 1)$ , если точка  $(i - 1/2, j)$  является узлом схемы  $K_2$ , а также соединяет элементы  $K(2i, 2j)$  и  $K(2i, 2j + 2)$ , если точка  $(i, j + 1/2)$  является узлом схемы  $K_1$ .

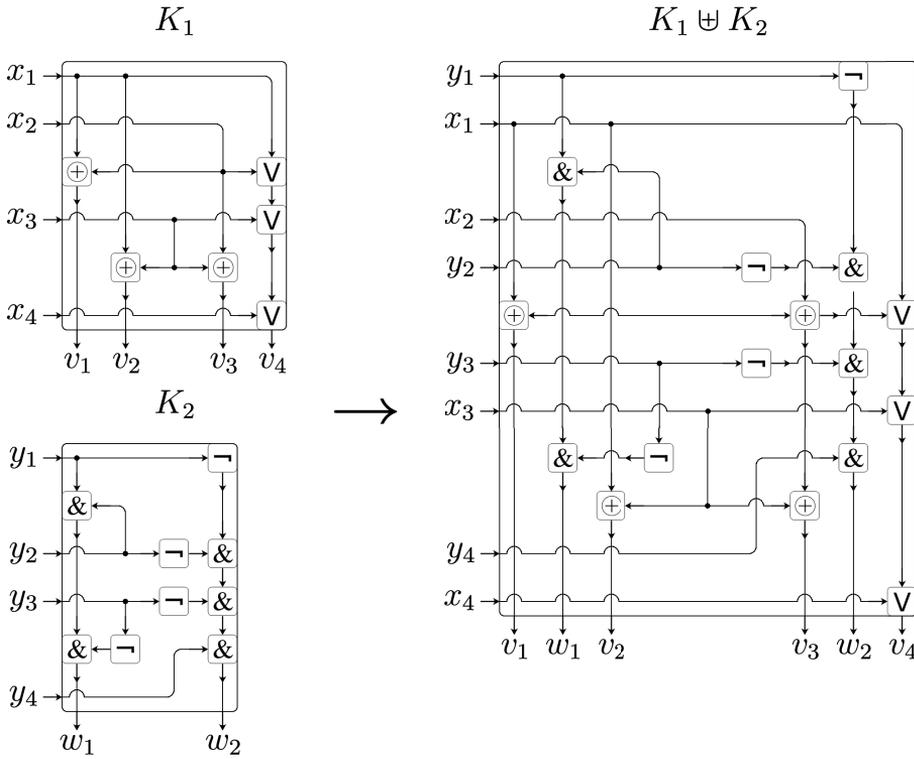


Рис. 2: Пример применения операции слияния.

Если схема  $K_1$  реализовывала оператор  $f_1$ , а схема  $K_2$  — оператор  $f_2$ , то схема  $K_1 \uplus K_2$  реализует оператор  $f(x, y) = (f_1(x), f_2(y))$ . При этом каждому узлу схем  $K_1$  и  $K_2$  соответствуют 2 узла схемы  $K_1 \uplus K_2$ . Носителем схемы  $K_1 \uplus K_2$  является множество ячеек  $(i, j)$  таких, что  $(K_1 \uplus K_2)(i, j) \neq \lambda$ .

Легко видеть, что параметры схемы  $K_1 \uplus K_2$  удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned}
 l(K_1 \uplus K_2) &\leq 2 \max(l(K_1), l(K_2)), \\
 h(K_1 \uplus K_2) &\leq 2 \max(h(K_1), h(K_2)), \\
 U(K_1 \uplus K_2) &\leq 2(U(K_1) + U(K_2)), \\
 \widehat{U}(K_1 \uplus K_2) &\leq 2(\widehat{U}(K_1) + \widehat{U}(K_2)).
 \end{aligned}$$

При этом если  $K_1$  и  $K_2$  были прямоугольными и все входы и вы-

ходы схем  $K_1$  и  $K_2$  были слева, то схема  $K_1 \uplus K_2$  также будем прямоугольной, и её входы и выходы также будут слева.

Для построения схемы, реализующей монотонную функцию, нам понадобятся вспомогательные блоки, описанные в [34].

У некоторых блоков есть вход, который обозначается  $z$ . Внутри блоков используются только элементы, сохраняющие 0. Это гарантирует нам, что на нулевом входном векторе состояние блока будет нулевым, то есть потенциал на нулевом входном векторе равен 0.

Будем говорить, что блок(подсхема)  $K'$  схемы  $K$  неактивна на входном наборе  $\vec{x}$ , если все входы  $K'$  равны 0 при подаче  $\vec{x}$  на входы схемы  $K$ . В противном случае будем говорить, что блок  $K'$  активен на входном наборе  $\vec{x}$ .

В [34] параметры нужных нам боков являются промежуточными результатами. Сформулируем это в виде леммы.

**Лемма 5.** Для любого натурального  $n$  и константы  $k \in \mathbb{N}$  существуют схема  $D'_{n,k}$  с  $nk + 1$  входом и  $2^nk$  выходами, а также схема  $D'^{-1}_{n,k}$  с  $2^nk$  входом и  $nk + 1$  выходом. При этом

$$D'^{-1}_{n,k}(D'_{n,k}(1, x_1, \dots, x_{nk})) = (1, x_1, \dots, x_{nk}).$$

Блоки  $D'_{n,k}$  и  $D'^{-1}_{n,k}$  при фиксированном  $k$  имеют следующие параметры

$$\begin{aligned} l(D'_{n,k}) &= O(2^n), & h(D'_{n,k}) &= O(n^2) \\ l(D'^{-1}_{n,k}) &= O(2^n), & h(D'^{-1}_{n,k}) &= O(n^2) \end{aligned}$$

Входы и выходы блоков  $D'_{n,k}$  и  $D'^{-1}_{n,k}$  расположены, как показано на рисунке 3.

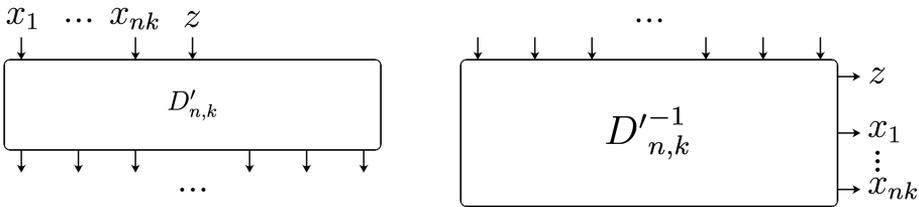


Рис. 3: Блоки  $D'_{n,k}$  и  $D'^{-1}_{n,k}$ .

Также нам понадобится блок, реализующий частичную функцию вида  $zf_{\mathcal{D}}(x)$ , где  $f_{\mathcal{D}}(x)$  — произвольная частичная булева функция, определённая на множестве  $\mathcal{D}$ . Следующая лемма является промежуточным результатом в [34, Доказательство теоремы 1].

**Лемма 6.** *Если  $\mathcal{D} \subseteq \{0, 1\}^n$ , причём  $n^2 = O(|\mathcal{D}|)$  при  $n \rightarrow \infty$ , то для любой частичной функции  $f : \mathcal{D} \rightarrow \{0, 1\}$  существует прямоугольная схема  $S'_{f_{\mathcal{D}}}$  в базе из элементов, сохраняющих 0, реализующая оператор  $f$  такая, что*

$$l(K) = O(\sqrt{|\mathcal{D}|}), \quad h(K) = O(\sqrt{|\mathcal{D}|}), \quad \widehat{U}(K) = O\left(\max\left(n \log_2^2 n, \sqrt{|\mathcal{D}|}\right)\right).$$

*Доказательство.* Для доказательства этой леммы достаточно рассмотреть схему  $Q_f$  из доказательства [34, теорема 1] при  $m = 1$  и элемент 1 заменить на вход  $z$ . Поскольку все вспомогательные блоки, из которых построена схема  $Q_f$  построены из элементов  $\oplus$ ,  $\&$ ,  $\vee$  и проводов, значит единственным элементом, не сохраняющим 0 в  $Q_f$  является элемент 1, вместо которого мы сделали вход схемы  $z$ .  $\square$

Итак, мы описали все вспомогательные блоки из [34], которые нам понадобятся, и можем приступить к построению схем, реализующих монотонные функции.

**Лемма 7.** *Если  $n$  кратно 6, то для произвольной монотонной функции от  $n$  переменных существует реализующая её схема  $M_f$  со следующими параметрами*

$$\begin{aligned} l(M_f) &\leq C_1 \frac{2^{n/2}}{\sqrt[4]{n}}, & h(M_f) &\leq C_1 \frac{2^{n/2}}{\sqrt[4]{n}}, \\ \widehat{U}(M_f) &\leq C_2 \frac{2^{n/2}}{\sqrt[4]{n}}, & U(M_f) &\leq C_3 \frac{2^{n/2}}{n^{3/4}}. \end{aligned}$$

Здесь  $C_1, C_2, C_3$  — некоторые константы.

*Доказательство.* Будем доказывать лемму индукцией по числу переменных.

**База индукции.** При  $n \leq 18$  множество функций конечно, поэтому можно просто взять константы  $C_1, C_2$  и  $C_3$  достаточно большими, чтобы утверждение леммы выполнялось для оптимальных по площади схем, реализующих эти функции.

**Шаг индукции.** Возьмём произвольную функцию  $f$  от  $n$  переменных и применим к ней лемму 4, подставляя  $k = 6$ . По лемме 4 существуют такие функции  $p, q \in M(n - 6)$  такие, что

$$f(x) = p(x_{i_1 \dots i_6}) \vee \overline{p(x_{i_1 \dots i_6})} q(x_{i_1 \dots i_6}) f_D(x_{i_1 \dots i_6}), \quad (2)$$

где  $\mathcal{D} = \left\{ x : \overline{p(x_{i_1 \dots i_6})} q(x_{i_1 \dots i_6}) = 1 \right\}$ ,  $|\mathcal{D}| \leq 2^5 C_n^{n/2}$ .

Поскольку при реализации функции схемой мы можем менять местами аргументы функции, выбирая, какой выход какому аргументу соответствует, без ограничения общности будем считать, что  $i_1 = 1, \dots, i_6 = 6$ . Тогда  $x_{i_1 \dots i_6} = (x_7, \dots, x_n)$ .

По предположению индукции существуют схемы  $M_p$  и  $M_q$ , реализующие функции  $p$  и  $q$  соответственно, с параметрами

$$\begin{aligned} l, h &\leq C_1 \frac{2^{(n-6)/2}}{\sqrt[4]{n-6}} = \frac{1}{8} \sqrt[4]{\frac{n}{n-6}} C_1 \frac{2^{n/2}}{\sqrt[4]{n}} \leq \frac{1}{6} C_1 \frac{2^{n/2}}{\sqrt[4]{n}}, \\ \widehat{U} &\leq C_2 \frac{2^{(n-6)/2}}{\sqrt[4]{n-6}} = \frac{1}{6} C_2 \frac{2^{n/2}}{\sqrt[4]{n}}, \\ U &\leq C_3 \frac{2^{(n-6)/2}}{(n-6)^{3/4}} = \frac{1}{8} \left( \frac{n}{n-6} \right)^{3/4} C_3 \frac{2^{n/2}}{n^{3/4}} \leq \frac{1}{6} C_3 \frac{2^{n/2}}{n^{3/4}}. \end{aligned}$$

По лемме 6 существует схема  $S'_{f, \mathcal{D}}$  реализующая функцию  $f'_{\mathcal{D}}(z, x) = z f_{\mathcal{D}}(x)$  с параметрами

$$l, h, U, \widehat{U} = O\left(\sqrt{|\mathcal{D}|}\right) = O\left(\sqrt{32C_n^{n/2}}\right) = O\left(\frac{2^{n/2}}{\sqrt[4]{n}}\right) \leq C_4 \frac{2^{n/2}}{\sqrt[4]{n}}.$$

Построим схему  $M_f$ , как показано на рисунке 4. В этой схеме блоки  $M_p$  и  $M_q$  объединены при помощи операции слияния. Фактически, схема  $M_f$  реализует функцию  $f$  по формуле (2), только в ней добавлены блок конъюнкций, а также блоки  $D'_{n/6,6}$  и  $D'^{-1}_{n/6,6}$ , вычисляющие взаимно обратные операторы, с целью уменьшения потенциала на проводах.

Проверим, что  $M_f$  реализует функцию  $f$ , и оценим потенциал части схемы  $M_f$ , включающей в себя блоки  $D'_{n/6,6}$ ,  $D'^{-1}_{n/6,6}$  и  $S'_{f, \mathcal{D}}$  и соединяющие их провода.

- 1) Если  $\overline{p(x_1, \dots, 6)} q(x_1, \dots, 6) = 0$ , то  $f(x_1, \dots, x_n) = p(x_1, \dots, 6)$ . В этом случае на вход блока конъюнкций подаётся 0, поэтому

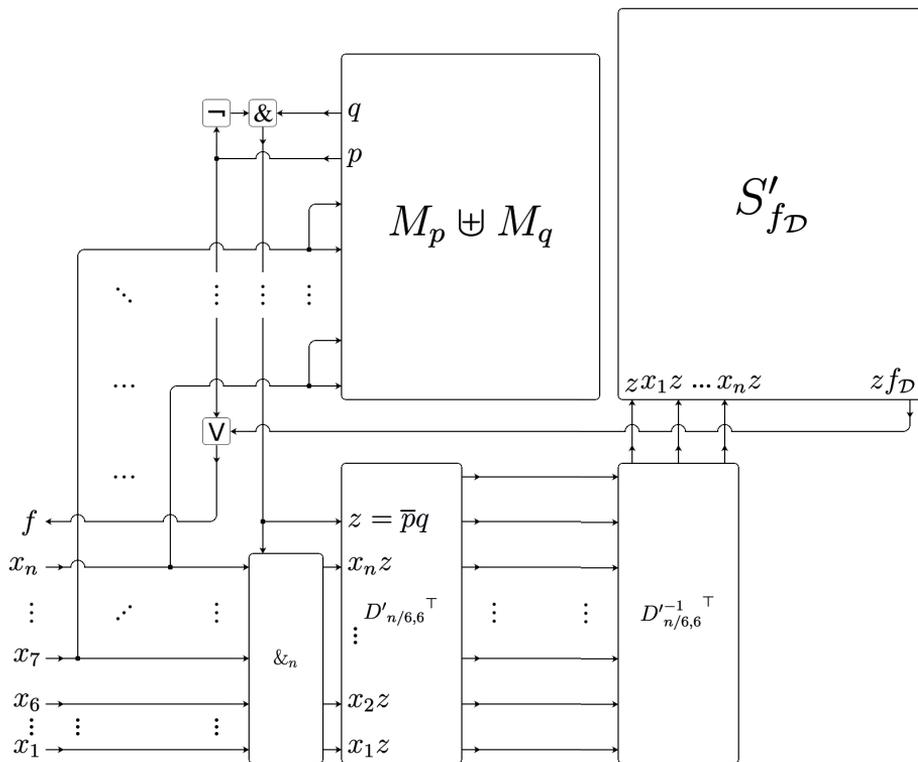


Рис. 4: Схема  $M_f$ , реализующая функцию  $f$ .

на все выходы этого блока также выдают 0. Значит блоки  $D'_{n/6,6}$ ,  $D'^{-1}_{n/6,6}$  и  $S'_{f_D}$  вместе с соединяющими их проводами неактивны, и их потенциал равен 0. Выход блока  $S'_{f_D}$  также неактивен, а значит значение на выходе  $f$  схемы  $M_f$  равно  $p = p(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$ .

- 2) Если  $\overline{p(x_1, \dots, x_n)q(x_1, \dots, x_n)} = 1$ , то  $p = p(x_1, \dots, x_n) = 0$ , поэтому

$$f(x_1, \dots, x_n) = \overline{p(x_1, \dots, x_n)q(x_1, \dots, x_n)} f_D(x_1, \dots, x_n) = f_D(x_1, \dots, x_n).$$

В этом случае блок конъюнкций пропускает значения  $x_1, \dots, x_n$  на вход блока  $D'_{n/6,6}$ , при этом на вход  $z$  этого блока подаётся  $\overline{p}q = 1$ . Проходя через блоки  $D'_{n/6,6}$  и  $D'^{-1}_{n/6,6}$ , вычисляющие взаимно обратные операторы, значения  $x_1, \dots, x_n$  и управляющее значение  $z = \overline{p}q = 1$  подаются на вход схемы

$S'_{f_D}$ . На выходе блок  $S'_{f_D}$  выдаёт значение  $z f_D(x_1, \dots, x_n) = f_D(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$ . Значение на выходе  $f$  схемы  $M_f$  равно  $p \vee f_D(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$ .

В этом случае потенциал блока  $S_{f_D}$  не превосходит его максимального потенциала, то есть  $C_4 \frac{2^{n/2}}{\sqrt[4]{n}}$ . Потенциалы блоков  $D'_{n/6,6}$  и  $D'^{-1}_{n/6,6}$  по порядку не превосходят их площади, то есть

$$\begin{aligned} \widehat{U}_D(D'_{n/6,6}) + \widehat{U}_D(D'^{-1}_{n/6,6}) &= O(S(D'_{n/6,6}) + S(D'^{-1}_{n/6,6})) = \\ &= O(2^{n/6} \cdot n^2) = O(2^{n/4}). \end{aligned}$$

Провода, соединяющие блоки  $D'_{n/6,6}$  и  $D'^{-1}_{n/6,6}$ , имеют длину  $l(M_p \uplus M_q) \leq 2 \cdot \frac{1}{6} C_1 \frac{2^{n/2}}{\sqrt[4]{n}}$ , причём не более 6 из этих проводов активны. Провод, идущий от выхода блока  $S'_{f_D}$ , имеет ту же длину. Поэтому общий потенциал проводов этой части схемы не превосходит  $\frac{7}{3} C_1 \frac{2^{n/2}}{\sqrt[4]{n}}$ .

Итак, мы показали, что в обоих случаях схема  $M_f$  работает корректно.

Оценим теперь размеры и потенциал всей схемы  $M_f$ . При достаточно большом  $C_1$  имеем

$$\begin{aligned} l(M_f) &\leq n + 1 + l(\&_n) + \max \left( l(D'_{n/6,6}{}^\top) + l(D'^{-1}_{n/6,6}{}^\top), l(M_p \oplus M_q) \right) + \\ &\quad + l(S'_{f_D}) = O(n^2) + 2 \cdot \frac{1}{6} C_1 \frac{2^{n/2}}{\sqrt[4]{n}} + C_4 \frac{2^{n/2}}{\sqrt[4]{n}} \leq C_1 \frac{2^{n/2}}{\sqrt[4]{n}}, \\ h(M_f) &= h(D'_{n/6,6}{}^\top) + 1 + \max (h(S'_{f_D}), h(M_p \uplus M_q)) < \\ &< h(S'_{f_D}) + h(D'_{n/6,6}{}^\top) + 1 + h(M_p \uplus M_q) = \\ &= C_4 \frac{2^{n/2}}{\sqrt[4]{n}} + O(2^{n/6}) + 2 \cdot \frac{1}{6} C_1 \frac{2^{n/2}}{\sqrt[4]{n}} < C_1 \frac{2^{n/2}}{\sqrt[4]{n}}. \end{aligned}$$

Оценим потенциал оставшейся части схемы, то есть блока  $M_p \uplus M_q$ , блока конъюнкций и ведущих к ним проводов.

- Ведущие к блоку  $M_p \uplus M_q$  провода, а также ведущие от него провода вместе с двумя логическими элементами и блоком конъюнкций помещаются в прямоугольник со сторонами  $O(n)$ , поэтому их суммарный потенциал составляет  $O(n^2)$ .

- Пользуясь предположением индукции для оценки потенциала блоков  $M_p$  и  $M_q$ , получим

$$\begin{aligned}\widehat{U}(M_p \uplus M_q) &\leq 2(\widehat{U}(M_p) + \widehat{U}(M_q)) \leq 4 \cdot \frac{1}{6} C_2 \frac{2^{n/2}}{\sqrt[4]{n}} = \frac{2}{3} C_2 \frac{2^{n/2}}{\sqrt[4]{n}}, \\ U(M_p \uplus M_q) &\leq 2(U(M_p) + U(M_q)) \leq 4 \cdot \frac{1}{6} C_3 \frac{2^{n/2}}{n^{3/4}} = \frac{2}{3} C_3 \frac{2^{n/2}}{n^{3/4}}.\end{aligned}$$

Итак, для всей схемы  $M_f$  потенциал вне области  $\mathcal{D}$  (где  $\bar{p}q = 0$ ) при достаточно большом  $C_2$  можно оценить следующим образом.

$$\begin{aligned}\widehat{U}_{\overline{\mathcal{D}}}(M_f) &= O(n^2) + \frac{2}{3} C_2 \frac{2^{n/2}}{\sqrt[4]{n}} < C_2 \frac{2^{n/2}}{\sqrt[4]{n}}, \\ U_{\overline{\mathcal{D}}}(M_f) &= O(n^2) + \frac{2}{3} C_3 \frac{2^{n/2}}{n^{3/4}} < C_3 \frac{2^{n/2}}{n^{3/4}}.\end{aligned}$$

Внутри области  $\mathcal{D}$  к этому ещё прибавится потенциал  $S'_{f_{\mathcal{D}}}$  и вспомогательных блоков.

$$\widehat{U}_{\mathcal{D}}(M_f) = O(n^2) + \frac{2}{3} C_2 \frac{2^{n/2}}{\sqrt[4]{n}} + C_4 \frac{2^{n/2}}{\sqrt[4]{n}} + O(2^{n/4}) < C_2 \frac{2^{n/2}}{\sqrt[4]{n}}.$$

Отсюда сразу получается оценка максимального потенциала. При достаточно большом  $C_3$  выполнена цепочка неравенств

$$\begin{aligned}U(M_f) &= \frac{|\overline{\mathcal{D}}|}{2^n} U_{\overline{\mathcal{D}}}(M_f) + \frac{|\mathcal{D}|}{2^n} U_{\mathcal{D}}(M_f) \leq U_{\overline{\mathcal{D}}}(M_f) + \frac{|\mathcal{D}|}{2^n} \widehat{U}_{\mathcal{D}}(M_f) \leq \\ &\leq O(n^2) + \frac{2}{3} C_3 \frac{2^{n/2}}{n^{3/4}} + \underbrace{\frac{32C_n^{n/2}}{2^n}}_{\leq C_5/\sqrt{n}} \cdot C_2 \frac{2^{n/2}}{\sqrt[4]{n}} \leq \\ &\leq O(n^2) + \left( \frac{2}{3} C_3 + C_5 C_2 \right) \frac{2^{n/2}}{n^{3/4}} < C_3 \frac{2^{n/2}}{n^{3/4}}.\end{aligned}$$

Лемма доказана.  $\square$

*Доказательство верхней оценки теоремы 3.* Возьмём произвольную  $n$ -местную монотонную функцию  $f$  и построим схему с требуемыми параметрами. Введём  $6 - (n \bmod 6)$  (всего не более 5) фиктивных переменных и обозначим новую функцию за  $f'$ .  $n' = n + 6 - (n \bmod 6)$  — количество переменных функции  $f'$ . Тогда  $n'$

кратно 6, значит к  $f'$  можно применить лемму 7. По лемме существует схема  $M_{f'}$ , реализующая функцию  $f'$  с параметрами

$$\begin{aligned}
 l(M_{f'}) &\leq C_1 \frac{2^{n'/2}}{\sqrt[4]{n'}} \leq 2^{5/2} \cdot C_1 \frac{2^{n/2}}{\sqrt[4]{n}} = O\left(\frac{2^{n/2}}{\sqrt[4]{n}}\right), \\
 h(M_{f'}) &\leq C_1 \frac{2^{n'/2}}{\sqrt[4]{n'}} = O\left(\frac{2^{n/2}}{\sqrt[4]{n}}\right), \\
 \widehat{U}(M_f) &\leq C_2 \frac{2^{n'/2}}{\sqrt[4]{n'}} = O\left(\frac{2^{n/2}}{\sqrt[4]{n}}\right), \\
 U(M_{f'}) &\leq C_3 \frac{2^{n'/2}}{n'^{3/4}} \leq 2^{5/2} \cdot C_3 \frac{2^{n/2}}{n^{3/4}} = O\left(\frac{2^{n/2}}{n^{3/4}}\right).
 \end{aligned}$$

Удаляя фиктивные входы из схемы  $M_{f'}$ , получим схему  $M_f$ , реализующую функцию  $f$ . Удаление фиктивных входов не увеличивает площадь и потенциал, поэтому для  $M_f$  верны те же верхние оценки, что и для  $M_{f'}$ . Верхняя оценка доказана.  $\square$

## Список литературы

- [1] Алешин С.В. Полугруппы и группы автоматов // Интеллектуальные системы. — 2013. — Т. 17, вып. 1–4. — С. 129–141.
- [2] Александров Д.Е. Эффективные методы реализации проверки содержания сетевых пакетов регулярными выражениями // Интеллектуальные системы. — 2014. — Т. 18, вып. 1. — С. 37–60.
- [3] Титова Е.Е. Конструирование движущихся изображений клеточными автоматами // Интеллектуальные системы. — 2014. — Т. 18, вып. 1. — С. 153–180.
- [4] Бабин Д.Н. Частотные регулярные языки // Интеллектуальные системы. — 2014. — Т. 18, вып. 1. — С. 205–210.
- [5] Иванов И.Е. О некоторых свойствах автоматов с магазинной памятью // Интеллектуальные системы. — 2014. — Т. 18, вып. 1. — С. 243–252.
- [6] В.Б.Кудрявцев. Кафедра математической теории интеллектуальных систем (MaTIC) // Интеллектуальные системы. — 2014. — Т. 18, вып. 2. — С. 5–30.

- [7] Часовских А.А. Условия полноты линейно- $p$ -автоматных функций // Интеллектуальные системы. — 2014. — Т. 18, вып. 3. — С. 203–252.
- [8] Александров Д.Е. Об оценках автоматной сложности распознавания классов регулярных языков // Интеллектуальные системы. — 2014. — Т. 18, вып. 4. — С. 161–190.
- [9] Дементьев В.М. О звездной высоте регулярного языка и циклической сложности минимального автомата // Интеллектуальные системы. — 2014. — Т. 18, вып. 4. — С. 215–222.
- [10] Кучеренко И.В. О минимизации монофункциональных классов бинарных клеточных автоматов с неразрешимым свойством обратимости. — 2014. — Т. 18, вып. 4. — С. 227–295.
- [11] Якимец К.К. Об инвариантности характеристик конфигураций однородных структур. — 2014. — Т. 18, вып. 4. — С. 347–356.
- [12] Иванов И.Е. О сохранении периодических последовательностей автоматами с магазинной памятью с однобуквенным магазином // Интеллектуальные системы. — 2015. — Т. 19, вып. 1. — С. 145–160.
- [13] Летуновский А.А. Выразимость линейных автоматов относительно расширенной суперпозиции // Интеллектуальные системы. — 2015. — Т. 19, вып. 1. — С. 161–170.
- [14] Гербус В.Г. О связи функций автомата и автоматной функции // Интеллектуальные системы. — 2015. — Т. 19, вып. 2. — С. 109–116.
- [15] Миронов А.М. Критерий реализуемости функций на строках вероятностными автоматами Мура с числовым выходом // Интеллектуальные системы. — 2015. — Т. 19, вып. 2. — С. 149–160.
- [16] Терехина И.Ю. Модель невлияния для квантовых автоматов // Интеллектуальные системы. — 2015. — Т. 19, вып. 2. — С. 183–190.

- [17] Бабин Д.Н., Летуновский А.А. О возможностях суперпозиции, при наличии в базисе автоматов фиксированной добавки из булевых функций и задержки // Интеллектуальные системы. — 2015. — Т. 19, вып. 3. — С. 71–78.
- [18] Бабин Д.Н. Автоматы с суперпозициями, пример нерасширяемости до предполного класса // Интеллектуальные системы. — 2015. — Т. 19, вып. 3. — С. 87–94.
- [19] Э.Э.Гасанов, А.А.Мастихина Прогнозирование общерегулярных сверхсобытий автоматами // Интеллектуальные системы. — 2015. — Т. 19, вып. 3. — С. 127–154.
- [20] Иванов И.Е. Нижняя оценка на максимальную длину периода выходной последовательности автономного автомата с магазинной памятью // Интеллектуальные системы. — 2015. — Т. 19, вып. 3. — С. 175–194.
- [21] А.А.Часовских. Критериальные системы в классах линейно-автоматных функций над конечными полями // Интеллектуальные системы. — 2015. — Т. 19, вып. 3. — С. 195–207.
- [22] Кравцов С.С. О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов. // Проблемы кибернетики. Вып. 19. М.: Наука, 1967. С. 285–293.
- [23] Гасанов Э.Э., Ефремов Д.В. Фоновый алгоритм решения двумерной задачи о доминировании // Интеллектуальные системы. — 2014. — Т. 18, вып. 3. — С. 133–158.
- [24] Е. М. Перпер. Нижние оценки временной и объёмной сложности задачи поиска подслова // Дискретная математика, 2014, том 26:2, 58–70.
- [25] Шуткин Ю.С. Моделирование схемных управляющих систем // Интеллектуальные системы. — 2014. — Т. 18, вып. 3. — С. 253–261.
- [26] Перпер Е.М. Порядок сложности задачи поиска в множестве слов вхождений подслова // Интеллектуальные системы. — 2014. — Т. 19, вып. 1. — С. 99–116.

- [27] Плетнев А.А. Информационно-графовая модель динамических баз данных и ее применение // Интеллектуальные системы. — 2014. Т. 18, Вып. 1. — С. 111-140.
- [28] Плетнев А.А. Динамическая база данных, допускающая параллельную обработку произвольных потоков запросов // Интеллектуальные системы. — 2015. Т. 19, Вып. 1. — С. 117-145.
- [29] Плетнев А.А. Логарифмическая по сложности параллельная обработка автоматами произвольных потоков запросов в динамической базе данных // Интеллектуальные системы. — 2015. Т. 19, Вып. 1. — С. 171-213.
- [30] Черемисин О. В. Об активности схем из клеточных элементов, реализующих систему всех конъюнкций // Дискретная математика. — 2003. — Т. 15, вып. 2. — С. 113-122
- [31] Касим-Заде О. М. О влиянии базиса на мощность схем из функциональных элементов. - Москва : ИПМ, 1979. - 28 с. : схем.; 21 см. - (Препринт / Ин-т прикл. математики им. М.В. Келдыша АН СССР; №122).
- [32] Калачев Г.В. Порядок мощности плоских схем, реализующих булевы функции // Дискретная математика. — 2014. — Т. 26, № 1. — С. 49-74.
- [33] Калачев Г.В. Нижние оценки мощности плоских схем, реализующих частичные булевы операторы // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2014. — Т. 18, № 2. — С. 279-322.
- [34] Калачев Г.В. Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2016. — Т. 20, № 2. — С. 203-266.
- [35] Калачев Г.В. Оценки мощности плоских схем, реализующих функции с ограниченным числом единиц // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2017. — Т. 21, № 1. — С. 25-87.
- [36] Чашкин А.В. Лекции по дискретной математике // М.: МГУ Мехмат, 2007.

- [37] Жуков Д.А. О вычислении частичных булевых функций клеточными схемами. // Дискретный анализ и исследование операций.

# Об аналитическом представлении функции сложности минимальной схемы в базисе из штриха Шеффера.

Носов М.В.

В работе представлены формулы промежуточного типа, задающие сложность минимальной схемы, в базисе из штриха Шеффера.

**Ключевые слова:** сложность минимальной схемы, штрих Шеффера.

Пусть  $m$  такое натуральное число, что для любая булевская функция от  $n$  переменных реализуется схемой в базисе из штриха Шеффера, сложности не более  $m - n$ . Элементы схемы перенумеруем числами  $n+1, \dots, m$ , входы системы имеют номера  $1, \dots, n$ . Тройка  $\{i_l, j_l, l\}$  определяет соединение  $l$ -ого элемента с выходами предыдущих элементов или входов системы с номерами  $i_l$  и  $j_l$ . Роль выходов системы будут последовательно выполнять выходы элементов  $n+1, \dots, m$ . Если элемент с номером  $p$  является выходом системы, то может случиться так, что некоторые элементы с меньшими номерами фактически не используются, так как их выходы соединены со входами элементов, номер которых превышает  $p$ . Для булевской функции  $f$ , отличной от селектора, первая схема появится, т.е. существует набор троек(соединений), при  $p = L_{\{\}}(f)$  и, очевидно, что для любого большего номера всегда можно построить схему, реализующую  $f$ . Пусть  $Y_m$ - матрица размером  $2^n \times m$ , у которой первые  $n$  столбцов есть вектора  $E_2^n$ , а остальные элементы - свободные переменные, принимающие значения 0 или 1. Имеет место

следующая формула

$$L_{\{\}}(f) = \sum_{p=n+1}^m \prod_{\substack{\{(i_l, j_l, l)\} \\ (l=n+1, \dots, m)}} Y_m \prod \left( 1 - \prod_{k=1}^{2^n} \prod_{l=n+1}^m ((1 - (y_{kp} - \right. \quad (0.1) \\ \left. - f(y_{k1}, \dots, y_{kn})^2 \times \times (1 - (y_{kl} - 1 + y_{ki} y_{kj}))^2) \right).$$

Количество различных способов соединений  $A_m$ , т.е. количество троек с учётом порядка входов, задается равенством

$$A_m = |\{(i_l, j_l, l), l = n + 1, \dots, m\}| = \prod_{l=n+1}^m (l - 1)^2 = \left( \frac{(m - 1)!}{(n - 1)!} \right)^2,$$

количество различных матриц  $|Y_m|$  задается равенством

$$|Y_m| = 2^{(m-n)2^n}.$$

Переводя произведение в суммы, с учетом значений скобок 0 или 1, получается следующее представление

$$L_{\{\}}(f) = \sum_{p=n+1}^m \frac{1}{(A_m |Y_m|)!} \sum_{q=0}^{A_m |Y_m|} s(A_m |Y_m| + 1, q + 1) \times \\ \times \left( A_m |Y_m| - \sum_{\substack{\{(i_l, j_l, l)\} \\ (l=n+1, \dots, m)}} \sum_{Y_m} \prod_{k=1}^{2^n} \prod_{l=n+1}^m \left( (1 - (y_{kp} - f(y_{k1}, \dots, y_{kn}))^2) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (1 - (y_{kl} - 1 + y_{ki} y_{kj}))^2 \right) \right)^q,$$

где  $s(A_m |Y_m| + 1, q + 1)$  - числа Стирлинга первого рода. С учетом того, что выход системы берется с выхода  $p$ -ого элемента, а при фиксированном наборе соединений выходы определяются однозначно по входам получается сокращение суммирования

$$L_{\{\}}(f) = \sum_{p=n+1}^m \frac{1}{(A_m |Y_m|)!} \sum_{q=0}^{A_m |Y_m|} s(A_m |Y_m| + 1, q + 1) \times \\ \times \left( A_m |Y_m| - \left( \frac{(m-1)!}{(p-1)!} \right)^2 \sum_{\substack{\{(i_l, j_l, l)\} \\ (l=n+1, \dots, p)}} \sum_{Y_p} \prod_{k=1}^{2^n} \prod_{l=n+1}^p \right)$$

(0.2)

$$\left( \left( 1 - (y_{kp} - f(y_{k1}, \dots, y_{kn}))^2 \right) \times \right. \\ \left. \times \left( 1 - (y_{kl} - 1 + y_{ki}y_{kj})^2 \right) \right)^q,$$

Нетрудно заметить, что величина

$$K_{\{\}}(f, p) = \sum_{\substack{\{(i_l, j_l, l)\} \\ (l=n+1, \dots, p)}} \sum_{Y_p} \prod_{k=1}^{2^n} \prod_{l=n+1}^p \left( \left( 1 - (y_{kp} - f(y_{k1}, \dots, y_{kn}))^2 \right) \times \right. \\ \left. \times \left( 1 - (y_{kl} - 1 + y_{ki}y_{kj})^2 \right) \right)$$

задает количество схем, реализующих функцию  $f$  глубины не более  $p$ . Обозначения

$$N = \{1, \dots, 2^n\},$$

$$\prod_{\substack{k \in \gamma \\ \gamma \subseteq N}} y_{kj} = y_{\gamma j},$$

$$\|Y_p\| = \sum_{l=n+1}^p \sum_{k=1}^{2^n} y_{kl}.$$

Ниже следуют два представления функции  $K_{\{\}}(f, p)$

$$K_{\{\}}(f, p) = \sum_{\gamma, \gamma \subseteq N} (-1)^{|\gamma|} \left( \sum_{\substack{\beta_{n+1}, \dots, \beta_{p-1} \\ \beta_i \subseteq N, i=1, \dots, p-1}} \sum_{\substack{\beta_p, \beta_p \subseteq N \\ C \beta_p \subseteq \gamma}} \right. \\ \left. (-1)^{|\beta_{n+1}| + \dots + |\beta_p|} \sum_{Y_p} \left( (-1)^{\|Y_{p-1}\|} \times \prod_{k \in C\gamma} (1 - y_{kp}) \prod_{l=n+1}^p \right. \right. \\ \left. \left. (y_{C\beta_l} \left( \sum_{r=1}^{l-1} y_{\beta_l r} \right)^2 \right) \right) \prod_{k \in \gamma} f(y_{k1}, \dots, y_{kn}), \right. \quad (0.3)$$

$$\begin{aligned}
K_{\{\}}(f, p) = & 2^{2^n} (-1)^{|N_f|} \sum_{Y_{p-1}} \left( (-1)^{\|Y_{p-1}\|} \left( \right. \right. & (0.4) \\
& \sum_{\beta_p, \beta_p \subseteq N} \frac{(-1)^{|\beta_p|}}{2^{|N_f \cup C\beta_p|}} \left( \sum_{r=1}^{p-1} y_{\beta_p r} \right)^2 \Big) \times \\
& \times \prod_{l=n+1}^{p-1} \left( \sum_{\beta_l, \beta_l \subseteq N} (-1)^{|\beta_l|} y_{C\beta_l} \left( \sum_{r=1}^{l-1} y_{\beta_l r} \right)^2 \right)
\end{aligned}$$

где  $N_f$  - множество единиц функции  $f$ .

# TABLE OF CONTENTS

**Baranovich A. E.** Algebras on indicators  $k$ -booleans of sets ..... 6

*Abstract:* We study the isomorphism of algebras on  $k$ -Booleans sets in axiomatic theory  $ZFU$  and corresponding to them  $k$ -hyperspace of indicators over  $GF[2]$ . Gives an estimate complexity of solving problems search in  $k$ -Booleans of sets. The results are projected onto a model of  $k$ -hyperspaces semiotic chromatic hypertopographs in axiomatic system  $[G]^1$ . The latter is the basis of computer architecture of capacitive paracomputer of knowledge management of intelligent system

*Keywords:* algebras morphisms, capacitive complexity of algorithms, operating complexity of algorithms, hypertopographs semiotic chromatic, generalizations of graph theory, single-object paradigm of graph theory, knowledge management, indicators of sets,  $k$ -topologization of sets (- carriers),  $k$ -Boolean of sets, indicators  $k$ -Booleans of sets, capacitive paracomputer, Search on the sets, intelligent system, discrete topology's with finite support,  $k$ -hyperspace boolean.

**Chernov A. V.** About one modification of the fast gradient method for solving the entropy-linear programming problem ..... 24

*Abstract:* In this paper a modification of the fast gradient method is considered. Its prime-duality is shown as the ability to reconstruct the solution of a prime problem by solving a dual problem. Theoretical results on its convergence both for unconstrained minimization problems and for conditional minimization problems with linear constraints-equalities and linear inequality constraints are obtained on the example of the problem of entropy-linear programming. The strict and strong convexity of the dual functional of the latter is proved, and it is shown that the gradient of the dual functional satisfies the Lipschitz condition.

*Keywords:* fast gradient method, entropy-linear programming problem, conditional minimization, unconstrained minimization, prime-dual methods.

**Dergach P. S.** About the direct embedding structure of 2-complex progressive sets ..... 117

*Abstract:* This article is devoted to the studying of the direct embedding structure for the class  $\mathbb{P}_2$  of progressive sets with complexity not more then 2. We give a full and not excessive description of the set of edges of this structure. To do so we introduce 12 types of classification. To describe this types we need to give the concepts of asynchrony, weak and strong synchronicity to the pairs of arithmetic progressions in the natural series. This problem is new and wasn't investigated earlier by any other scientists.

*Keywords:* progressive set, arithmetic progression, direct embedding structure.

**Ishchenko R. A.** Graphs of group automata ..... 111

*Abstract:* In this paper we introduce the notion of automaton graphs. The problem of determining the belonging of an automaton to the class of group automata by its graph is considered. The property of graphs of group automata is given. A theorem on the existence of a group automaton with a graph of a given form is proved.

*Keywords:* Automaton, graph, group automaton.

**Kalachev G. V.** Bounds on planar circuit power for monotone Boolean functions ..... 163

*Abstract:* In this paper we derive some general lower bounds for Shannon function of planar circuits power and find growth rate of the power for monotone functions. Circuit potential for vector  $x$  is defined as number of gate outputs that return 1 when circuit input equals  $x$ . Circuit maximal potential is considered as power measure. We prove that for monotone functions the growth rate of Shannon fuction of maximal potential is equal to  $2^{n/2}/n^{1/4}$ , while for average potential it equals  $2^{n/2}/\sqrt[4]{n^3}$ .

*Keywords:* Boolean circuits, planar circuits, circuit power, circuit complexity, Shannon function, upper bounds, lower bounds, monotone Boolean functions.

**Kan A. N.** Completeness problems in the class of piecewise-linear continuous functions ..... 46

*Abstract:* The class of all piecewise-linear continuous functions of two variables is considered. It is proved that this class contained in the class of matched functions. Completeness criterion in this class was found.

*Keywords:* Class of piecewise-linear functions, the class of piecewise-linear continuous functions, the class of matched functions, class of finitely-parallel functions, the Heaviside function, the operation of superposition, signature vector.

**Mazurenko I. L., Petyushko A. A.** A method of the optimal nonlinear stretching of symmetric matrices for recognition. . . . . 75

*Abstract:* This paper deals with self-comparison matrices of a 1D signal (particularly, speech signal). A method for nonlinear stretching of symmetric self-comparison matrices is proposed to find the optimal distance between these matrices in terms of corresponding signals similarity.

*Keywords:* 1D signal, self-comparison matrix, nonlinear stretching.

**Figurnov M. V., Struminsky K. A., Vetrov D. P.** Noise-robust method for training of variational autoencoder . . . . . 90

*Abstract:* Variational autoencoder (VAE) is a probabilistic unsupervised method that uses deep learning. We propose a robust approach to training of VAE using a modified likelihood function. We propose and analyse two variational lower bound objectives. Effectiveness of the method is experimentally shown by artificially introducing noise objects.

*Keywords:* unsupervised learning, generative modeling, variational autoencoder, importance weighted autoencoder, robustness, robustness to noise.

**Mikin V. A.** Digital image analysis based on the formalism of many interacting particles . . . . . 15

*Abstract:* In this paper, an image sequence clustering algorithm is proposed, based on generating clusters from minimal 2-simplexes, formed by data to classify in multidimensional feature space. Pseudo-realtime and postprocessing clustering modes are discussed.

*Keywords:* image clustering, scene change detection, video mining, key-frame extraction, realtime clustering.

**Mikin V. A., Postov S. C., Smirnov E. V.** Digital image analysis based on the formalism of many interacting particles . . . . . 57

*Abstract:* In this paper we introduce the model of digital image as a dynamical system of interacting particles. Based on this model

the algorithm for digital image processing is developed. Image transformations are studied depending on interaction type and choice of model parameters.

*Keywords:* digital image, interaction potential, many-particle theory, visual distinguishability of image.

**Nosov M. V.** On the analytical representation of the function of the complexity of the minimum scheme in the basis of the Sheffer stroke 193

*Abstract:* The paper presents the formulas of intermediate type, which specifies the minimum complexity of the scheme, in the basis of the Sheffer stroke operator.

*Keywords:* minimal complexity circuits, the Sheffer stroke operator.

## **К сведению авторов публикаций в журнале «Интеллектуальные системы. Теория и приложения»**

В соответствии с требованиями ВАК РФ к изданиям, входящим в перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых могут быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук, статьи в журнал «Интеллектуальные системы. Теория и приложения» предоставляются авторами в следующей форме:

1. Статьи предоставляются в электронном виде, набранные в пакете  $\text{\LaTeX}$  или в формате Microsoft Word (в случае отсутствия математических формул). Рисунки (только черно-белые, правильная передача оттенков серого цвета не гарантируется) прилагаются в виде отдельных файлов в формате JPEG или PNG с разрешением не менее 300 dpi. Обязательно предоставление вычитанной автором контрольной распечатки статьи или файла в формате PDF.
2. К статье прилагаются файлы, содержащие название статьи на русском и английском языках, аннотацию на русском и английском языках (не более 50 слов), список ключевых слов на русском и английском языках (не более 20 слов), информация об авторах: Ф.И.О. полностью, место работы, должность, ученая степень и/или звание (если имеется), контактные телефоны (с кодом города и страны), e-mail, почтовый адрес с индексом города (домашний или служебный).
3. Список литературы оформляется в едином формате, установленном системой Российского индекса научного цитирования.
4. За публикацию статей в журнале «Интеллектуальные системы. Теория и приложения» с авторов (в том числе аспирантов высших учебных заведений) статей, рекомендованных к публикации, плата не взимается. Оттиски статей авторам не предоставляются. Журнал распространяется по подписке, экземпляры журнала рассылаются подписчикам наложенным платежом. Условия подписки публикуются в каталоге НТИ «Роспечать», индекс журнала 64559.
5. Доступ к электронной версии последнего вышедшего номера осуществляется через НЭБ «Российский индекс научного цитирования». Номера, вышедшие ранее, размещаются на сайте [www.intsysjournal.org](http://www.intsysjournal.org), и доступ к ним бесплатный. Там же будут размещены аннотации всех публикуемых статей.

---

Подписано в печать: 15.06.2017

Дата выхода: 30.06.2017

Тираж: 200 экз.

Цена свободная

Свидетельство о регистрации СМИ: ПИ № ФС77-58444 от 25 июня 2014 г.,  
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных  
технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).