# Оценка длины периода выхода для автономного автомата с однобуквенным магазином

И. Е. Иванов (МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва)

Ранее автор доказал, что автоматные функции с магазинной памятью сохраняют множество периодических последовательностей, и привел экспоненциальную от характеристик автомата оценку удлинения периода. В данной работе для автоматов с однобуквенным магазином эту оценку удалось понизить до квадратичной.

**Ключевые слова:** автомат с магазинной памятью с однобуквенным магазином, детерминированная функция, периодические последовательности.

## Введение

Первые упоминания автоматов с дополнительной памятью в виде стека начали появляться в 50-х годах прошлого века. Они возникали преимущественно в контексте задач обработки естественного языка. Формализовали определение автомата с магазинной памятью Эттингер[1] и Шютценберже [2] уже в 60-х годах. Эквиваленность автоматов с магазинной памятью и контекстно-свободных грамматик была показана Хомским[3] и Эви[4].

Очень скоро стало понятно, что класс контекстно-свободных языков устроен сложнее класса регулярных. В работах [5, 6] появились примеры алгоритмически неразрешаемых проблем, которые были успешно разрешены для регулярных языков. Оказалось, что многие техники работы с конечными автоматами и регулярными языками для автоматов с магазинной памятью не работают. В частности, было показано, что классы языков, разпознаваемых детерминированными автоматами с магазинной памятью, не равен классу всех контекстно-свободных языков, а является его собственным подмножеством [7, 2].

Полученные отрицательные результаты мотивировали математиков рассматривать более простые подклассы автоматов с магазинной памятью. Хорошим примером такого класса является класс детерминированных автоматов с магазинной памятью с однобуквенным магазином. С одной стороны, этот класс автоматов является естественным расширением класса конечных автоматов, с другой стороны, он является довольно содержательным, так как, например, содержит язык правильных скобочных записей. Лишь в 70-80-х годах для этого класса автоматов была успешно решены проблема эквивалентности, а также проверка языка на регулярность [8, 9]. Исследование этого класса автоматов продолжается до сих пор. Нельзя не отметить работу [10], в которой была получена сложность проверки двух автоматом с однобуквенным магазином на эквивалентность.

Несмотря на довольно большие успехи в изучении автоматов с магазинной памятью в большинстве работ никак не изучается функциональные свойства этих автоматов, как, например, это было сделано для конечных автоматов. Основные результаты можно найти в [11]. Отдельно хотелось бы отметить результат Д.Н. Бабина — решение им аналога 13-ой проблемы Гильберта для автоматных функций [12]. Аналогичных работ, изучающих свойства автоматов с магазинной памятью как преобразователей последовательностей, почти не встречается в литературе. Поэтому автором была предпринята попытка разобраться в данной области.

В работе [13] было доказано, что автоматы с магазинной памятью сохраняют периодические последовательности. Автором приводится экспоненциальная верхняя оценка на максимальную длину периода в зависимости от периода входной последовательности и характеристик автомата и доказывается, что если в алфавите магазина разрешается использовать хотя бы два символа, то существенно понизить экспоненциальную оценку нельзя [14].

В данной работе удалось понизить верхнюю оценку до квадратичной от количества состояний в случае автономного автомата с однобуквенным магазином.

Работа состоит из 7 разделов, включая введение, заключение и список литературы. Во втором разделе даются основные определения и постановка задачи. В третьем — приводятся основные резлуьтаты. В четверном разделе доказывается нижняя оценка путем построения примера. В пятом — доказывается асимптотическая верхняя оценка. Далее следует заключение и библиография. В последний раздел (дополнений) вынесены простые, но технически громоздкие утверждения.

## Определения

Будем говорить, что $P_0 = \{Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0\}$ — инициальный автомат с магазинной памятью без входа (автономный), где Q — конечное множество состояний, B — выходной алфавит, Γ — алфавит памяти (алфавит ленты магазина), $\varphi : Q \times (\Gamma \cup \lambda) \to Q$ — функция переходов, $\psi : Q \times (\Gamma \cup \lambda) \to B$ — функция выхода, $\eta : Q \times (\Gamma \cup \lambda) \to \Gamma^*$ — функция памяти, $q_0 \in Q$ — начальное состояние, $\gamma_0 \in \Gamma^*$ — начальная запись в магазине. Функционирование автомата $P_0$ удовлетворяет системе канонических уравнений:

$$\begin{cases} q(0) = q_0 \\ \gamma(0) = \gamma_0 \\ z(t) = LS(\gamma(t)) \\ q(t+1) = \varphi(q(t), z(t)) \\ \gamma(t+1) = S(\gamma(t))\eta(q(t), z(t)) \\ b(t) = \psi(q(t), z(t)) \end{cases} \tag{1}$$

где $LS : \Gamma^* \to \Gamma \cup \{\lambda\}$ возвращает последний символ при подаче непустого слова и $LS(\lambda) = \lambda$, а $S : \Gamma^* \to \Gamma^*$— стирает последний символ входного слова и $S(\lambda) = \lambda$.

Пусть $n = |Q|$, $m = |\Gamma|$, $k = \max\limits_{(q,z) \in Q \times \Gamma \cup \{\lambda\}} |\eta(q, z)|$. Обозначим множество автоматов с магазинной памятью без входа с заданными $n$, $m$, $k$ через $\mathcal{M}_0(n, m, k)$.

В работе [13] было показано, что автоматы с магазинной памятью сохраняют периодические последовательности. Откуда следует, что выходом автономного автомата будет периодическая последовательность. Для автомата с магазинной памятью без входа обозначим $L(P)$ минимальную длину периода периодической последовательности, которую он генерирует. Далее под длиной периода будем понимать именно минимальную, то есть $L(P)$. Нас будет интересовать максимальная длина периода в классе автоматов $\mathcal{M}_0(n, m, k)$, а именно:

$$L(n, m, k) = \max_{P \in \mathcal{M}_0(n,m,k)} L(P).$$

Для получения оценок на $L(n,1,k)$ введем дополнительные ограничения на рассматриваемые автоматы. Пусть $P$ — автономный автомат с магазинной памятью с однобуквенным магазином. Будем считать, что $P$ генерирует периодическую последовательность без предпериода и все состояния достижимые и встречаются бесконечное число раз в последовательности $q(t)$, заданной каноническими уравнениями. Заметим, что если в последовательности $\gamma(t)$ пустое слово встречается лишь конечное число раз, то из-за отсутствия предпериода магазин не бывает пустым. Поэтому в этом случае $P$ функционируют в точности как автомат без магазина, то есть конечный автомат. Разумеется, этот случай нас не интересует. Поэтому будем считать, что пустое слово в последовательности $\gamma(t)$ будет встречаться бесконечное число раз. Для удобства будем считать, что начальная запись в магазине пустая, то есть $\gamma_0 = \lambda$. Будем рассматривать наиболее общую функцию выхода $\psi(q,z) = (q,z)$, то есть $B = Q \times \Gamma \cup \{\lambda\}$. Очевидно, что наложение описанных ограничений на класс автоматов не меняют максимальную длину периода внутри класса автоматов.

Обозначим через $\mathcal{M}'_0(n,1,k)$ множество автоматов $P$ из $\mathcal{M}'_0(n,1,k)$, для которых выполнены описанные выше ограничения, а именно:

- периодическая последовательность, сгенерированная $P$, не имеет предпериода;
- все состояния достижимы бесконечное число раз;
- $\gamma_0 = \lambda$;
- $B = Q \times \Gamma \cup \{\lambda\}$ и $\psi(q,z) = (q,z)$.

Очевидно, что выполнено

$$L(n,1,k) = \max_{P \in \mathcal{M}'_0(n,1,k)} L(P),$$

поэтому далее будем рассматривать автоматы только из $\mathcal{M}'_0(n,1,k)$.

Введем еще несколько определений, необходимых для дальнейших рассуждений. Для автомата $P$ выделим множество стирающих состояний

$$S = \{q \in Q \mid \eta(q,1) = \lambda\}.$$

Если $q \in W = Q \backslash S$, то будем говорить, что состояние пишущее. В множестве пишущих состояний выделим подмножество нейтральных состояний

$$N = \{q \in Q \mid \eta(q, 1) = 1\},$$

то есть таких, при прохождении через которые непустое слово, записанное в магазине, не изменяет свою длину.

Если в автомате $P$ найдётся множество состояний $C = \{c_1, ..., c_\ell\} \subseteq Q$ такое, что выполнено $\varphi(c_i, 1) = c_{i+1}$ для $i = 1, .., l-1$ и $\varphi(c_\ell, 1) = c_1$, то будем говорить, что $C$ является автоматным циклом. Длиной автоматного цикла $C$ будем называть число состояний в этом цикле.

Для автомата $P$ однозначно определены последовательности состояний и состояний магазина согласно (1). Будем говорить, что автоматный цикл $C$ достижим, если найдется такой номер $t_1$, что выполнены следующие условия:

1) $\{q(t_1), q(t_1 + 1), ..., q(t_1 + |C| - 1)\} = C$;

2) $z(t_1) = z(t_1 + 1) = ... = z(t_1 + |C| - 1) = 1.$

Каждому автоматному циклу сопоставим индекс — число, на которое изменится длина памяти магазина при одном проходе по нему. Будем называть автоматный цикл стирающим, если индекс отрицательный, то есть количество символов в магазине при одном проходе по циклу уменьшается. Если индекс автоматного цикла неотрицательный, то будем говорить, что автоматный цикл пишущий.

Будем называть конфигурацией автомата пару его состояние и состояние магазина $(t) = (q(t), \gamma(t))$. Будем говорить, что конфигурация $c_2$ достижима из конфигурации $c_1$, и писать $c_1 \Rightarrow c_2$, если автомат с магазинной памятью из конфигурации $c_1$ перейдет в конфигурацию $c_2$ через конечное число тактов.

В некоторых случаях нас будет интересовать поведение автомата при непустом магазине. В таких случаях будем говорить, что конфигурация $c_2$ достижима без опустошения магазина из конфигурации с непустым магазином $c_1$, и писать $c_1 \Rrightarrow c_2$. Заметим, что и $c_1$, и $c_2$ могут иметь пустой магазин.

## Основные результаты

Основным результатом работы является доказательство следующей теоремы.

**Теорема 1.** *При* $k > 1$ *и* $n \to \infty$

$$L(n,1,k) = \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2(1+o(1)).$$

# Доказательство нижней оценки L(n,1,k)

**Пример 1.**

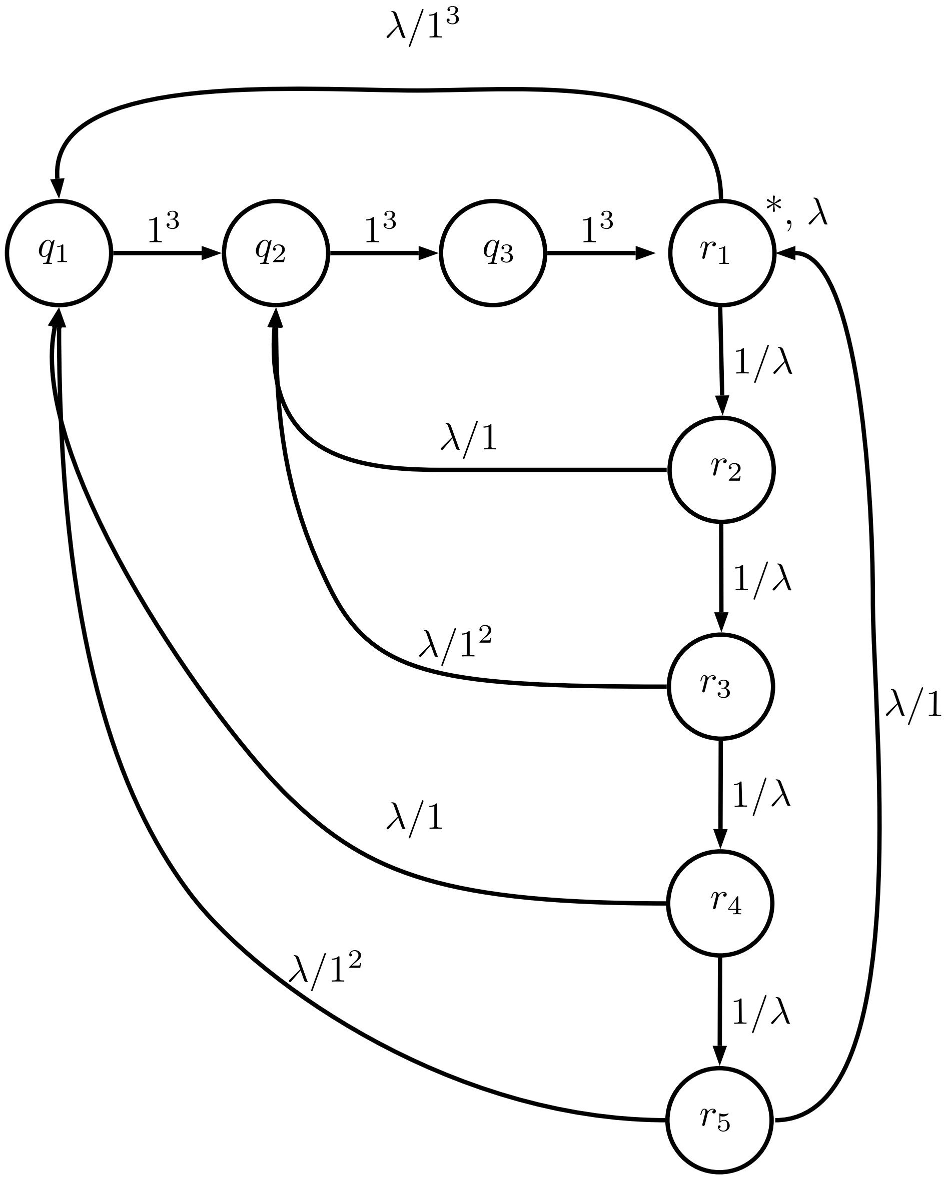
Пусть автономный автомат с магазинной памятью $P(s) = \{Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, r_h, \lambda\} \in \mathcal{M}_0(n,1,k)$, где $0 < s < n$, $B = \{0,1\}$, $Q = \{q_1, ..., q_{n-s}, r_1, ..., r_s\}$, $\Gamma = \{1\}$, $h = (((k-1)(n-s+1)+2) \mod s)+1$

$$\psi(q,z) = \begin{cases} 1, & q = q_h,\ z = \lambda, \\ 0, & \end{cases}$$

$$\varphi(q,z) = \begin{cases} q_{i+1}, & q = q_i,\ i \neq n-s, \\ r_1, & q = q_{n-s}, \\ r_{i+1}, & q = r_i,\ z = 1, \\ q_1, & q = r_h,\ z = \lambda, \\ q_{1+[\frac{(h-1-i) \mod s}{k-1}]}, & q = r_i,\ i \neq h,\ z = \lambda, \\ q, & \end{cases}$$

$$\eta(q,z) = \begin{cases} 1^k, & q = q_i, \\ 1^k, & q = r_h,\ z = \lambda, \\ 1^{k-1-((h-1-i) \mod s) \mod (k-1)}, & q = r_i,\ i \neq h,\ z = \lambda, \\ \lambda, & \end{cases}$$

Ниже приведем диаграмму этого автомата для $n = 8$, $k = 3$ и $s = 5$. Переходы автомата описываются следующим шаблоном $z/\eta$, то есть из данного состояния, при значении верхнего символа магазина z, автомат записывает на выходную ленту пару $(q,z)$, а в магазине стирает последний символ и дописывает слово $\eta$. Следующее состояние указывает стрелка.




Опишем функционирование описанного выше автомата $P(s)$ и поясним его канонические уравнения. Автомат начинает работу из состояния $r_h$ и с пустым магазином. Далее автомат максимально заполняет магазин, проходя по состояниям $q_1, ..., q_{n-s}$ до тех пор, пока не попадает в стирающий цикл $r_1, ..., r_s$. В состоянии $r_1$ в магазине записано

$(k-1)(n-s+1)+1$ символов. Так как дальше при каждом заполнении магазина мы будем уменьшать на единицу количество записываемых символов, то состояния, в которых, магазин становится пустым, будут меняться последовательно. То есть если мы стартовали из состоянии $r_{i+1}$ при пустом магазине, то, заполнив и опустошив магазин, автомат окажется в состоянии $r_i$. Исходя из этого, мы и получаем формулу для номера начального состояния. Мы подберем $r_h$ таким, чтобы, заполняя магазин максимально возможным количеством символов, после стирания их попасть в состояние $r_{h-1}$. Отсюда получаем, что

$$h = (((k-1)(n-s+1)+2) \mod s) + 1.$$

Следующим требующем объяснения моментом в описании уравнений автомата является его поведение при опустошении магазина, то есть в состояниии $r_i$ и $z = \lambda$. По сказанному выше в состоянии $r_h$ автомат пишет максимально возможное количество символов в магазин. Значит, из этого состояния при пустом магазине автомат должен перейти в состояние $q_1$ и записать при этом слово длины $k$ в магазин. При следующем опустошении магазина мы окажемся в состоянии $r_{h-1}$. Из этого состояния начинается заполнение магазина. Причем автомат должен записать на единицу меньше символов в магазин. Следовательно, из состояния $r_{h-1}$ автомат перейдет в состояние $q_1$, и в магазин будет записано слово длины $k-1$. Продолжая опустошать магазин, автомат будет писать на 1 символ меньше и переходить в состояние $q_1$ до тех пор, пока не придётся записать один символ. После этого мы уже не сможем перейти в состояние $q_1$, так как зациклимся. Следовательно, мы должны будем перейти в состояние $q_2$ и записать в магазин $k-1$ символ по той же причине. И далее при переходе из стирающего цикла мы будем писать от $k-1$ до 1 символа в магазин, после чего будем менять состояние перехода.

Подсчитаем длину периода $L(P(s))$. Удобно считать стирающие такты и записывающие по отдельности:

$$L(P(s)) = \tau + \tau,$$

где

$$\tau = \sum_{i=0}^{s-1}((n-s)(k-1)+1-i) = s(k-1)(n-s+1) + s - \frac{s(s-1)}{2},$$

$$\tau = s(n-s+1) - \sum_{i=0}^{s-2}[\frac{i}{k-1}].$$

Таким образом, длина периода сгенерированной им последовательности равна

$$L(P(s)) = sk(n-s+1) + s - \frac{s(s-1)}{2} - \sum_{i=0}^{s-2}[\frac{i}{k-1}]$$

**Лемма 1.** *Для натуральных $s$, $k > 1$ выполнено*

$$\frac{s^2}{2(k-1)} - s \leq \sum_{i=0}^{s-2}[\frac{i}{k-1}] \leq \frac{s^2}{2(k-1)} + \frac{3s}{2}$$

*Доказательство.* Пусть $f(s) = \sum\limits_{i=0}^{s-2}[\frac{i}{k-1}]$. Тогда

$$f(s) = (k-1)\sum_{i=0}^{[\frac{s}{k-1}]-1} i + [\frac{s}{k-1}](s \mod (k-1)) =$$

$$= (k-1)\frac{[\frac{s}{k-1}]([\frac{s}{k-1}]-1)}{2} + [\frac{s}{k-1}](s \mod (k-1))$$

Отсюда получаем, что

$$f(s) \leq (k-1)\frac{\frac{s}{k-1}(\frac{s}{k-1}-1)}{2} = \frac{s^2}{2(k-1)} - \frac{s}{2}$$

и

$$f(s) \geq (k-1)\frac{(\frac{s}{k-1}+1)\frac{s}{k-1}}{2} + s = \frac{s^2}{2(k-1)} + \frac{3s}{2}.$$

Так как

$$\sum_{i=0}^{s-2}[\frac{i}{k-1}] = f(s) - [\frac{s-1}{k-1}],$$

то

$$\frac{s^2}{2(k-1)} - s \leq \sum_{i=0}^{s-2}[\frac{i}{k-1}] \leq \frac{s^2}{2(k-1)} + \frac{3s}{2},$$

что и требовалось доказать.

$\square$

Применяя лемму, получаем, что

$$L(P(s)) \geq sk(n-s+1)+s-\frac{s(s-1)}{2}-\frac{s^2}{2(k-1)}-\frac{3s}{2} = sk(n-s+1)-\frac{ks^2}{2(k-1)}$$

Полагая $P = P(s)$ при $s = [\frac{k-1}{2k-1}n]$, получаем, что

$$L(P) \geq [\frac{k-1}{2k-1}n]k(n-[\frac{k-1}{2k-1}n]+1)-\frac{k([\frac{k-1}{2k-1}n])^2}{2(k-1)} \geq$$

$$\geq (\frac{k-1}{2k-1}n-1)k(n-\frac{k-1}{2k-1}n+1)-\frac{k(\frac{k-1}{2k-1}n)^2}{2(k-1)} =$$

$$= \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2-\frac{1}{2k-1}n-1.$$

Данный пример доказывает нижнии оценки на $L(n,1,k)$.

**Теорема 2.** *При $k > 1$ и $n \to \infty$*

$$L(n,1,k) \geq \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2(1+o(1)).$$

**Теорема 3.** *При $n > 1$ и $k \to \infty$*

$$L(n,1,k) \geq \frac{n^2}{4}k(1+o(1)).$$

# Доказательство верхней оценки L(n,1,k)

Сформулируем и докажем несколько вспомогательных утверждений.

**Лемма 2.** *Пусть $P$ — автомат с магазинной памятью из $\mathcal{M}'_0(n,1,k)$. Тогда существует автомат с магазинной памятью $P'$ из $\mathcal{M}'_0(n,1,k)$, который в процессе функционирования не бывает с пустым магазином два такта подряд, и периоды выходных последовательностей автоматов $P$ и $P'$ отличаются не более чем на $n$.*

*Доказательство.* Пусть автомат $P$ при очередном такте стирает последний символ из магазина, оказываясь в некотором состоянии $q$, и далее проходит еще несколько состояний, не делая записей в магазин. После чего попадает в состояние $q_1$, в котором пишет непустое слово $1^\ell$ и переходит в состояние $q_2$. Тогда можно трансформировать автомат $P$ так, чтобы из состояния $q$ автомат сразу переходил в $q_2$ и писал при этом в магазин $1^\ell$. Делая такую трансформацию для всех аналогичных состояний, получаем автомат $P'$, который удовлетворяет условием леммы, так как внутри одного периода автомат может быть с пустым магазином не более $n$ раз. □

## Простая верхняя оценка

Теперь непосредственно приступим к доказательству верхней оценки на $L(n, 1, k)$.

**Лемма 3.** *Пусть $P$ — автомат с магазинной памятью из класса $\mathcal{M}'_0(n, 1, k)$. Тогда*

$$L(P) \leq n(h_{max} + 1),$$

*где $h_{max} = \max_t |\gamma(t)|$ — максимальное количество символов, которое может быть записано в магазине.*

*Доказательство.* Заметим, что из определения класса автоматов $\mathcal{M}'_0(n, 1, k)$ следует, что $h_{max}$ всегда существует, то есть $h_{max} < \infty$. Внутри одного периода автомат может находиться в состоянии $q$ только с разными состояниями магазина от пустого до содержащего $h_{max}$ символов. Суммируя по всем состояния, получаем требуемую оценку. □

**Утверждение 1.** *При $k > 1$*

$$L(n, 1, k) \leq (k-1)n^2 + 2n.$$

*Доказательство.* Так как среди $n$ состояний должно быть хотя бы одно стирающее, то $n-1$ пишущее состояние не может записать больше $n(k-1)+1$, то есть $h_{max} \leq n(k-1)+1$. Подставляя эту оценку в предыдущую лемму, получаем требуемое. □

## Случай пишущего автоматного цикла

**Лемма 4.** *Пусть $P$ — автомат с магазинной памятью из $\mathcal{M}'_0(n, 1, k)$. Если в $P$ есть достижимый пишущий автоматный цикл, то период сгенерированной $P$ последовательности равен длине этого цикла.*

*Доказательство.* Если в $P$ есть достижимый пишущий цикл, то автомат не может его покинуть, так как магазин уже никогда не будет пустым в силу неотрицательности индекса. Значит, период будет равен длине цикла. □

**Замечание.** В силу доказанной леммы далее не имеет смысл рассматривать автоматы с достижимыми пишущими циклами. Будем считать, что если в автомате есть достижимый цикл, то он стирающий.

## Случай без автоматных циклов

В этом разделе будет дана оценка на максимальную длину периода выходной последовательсти для автомата без стирающих циклов.

**Лемма 5.** *Пусть $P$ — автомат с магазинной памятью из класса $\mathcal{M}'_0(n,1,k)$. Если $P$ не имеет автоматных циклов, то период сгенерированной $P$ последовательности не превосходит $\frac{k-1}{k}n^2+2n$.*

*Доказательство.* Оценим $h_{max}$. Так как в $P$ нет автоматных циклов, то $h_{max}$ не может быть большим. Максимально возможное значение $h_{max}$ можно получить следующем образом. Необходимо в автомате иметь максимально возможное число $w$ пишущих по $k$ символов состояний, так чтобы оставшихся $s=n-w$ состояний хватило, чтобы стереть то, что было записано. Все стирания должы быть сделаны в разных состояниях, так как стирающих циклов нет. Отсюда получаем следующее условие:

$$h_{max} \leq (w+1)(k-1)+1 = s.$$

Решая, получаем, что

$$h_{max} \leq s = \frac{k-1}{k}n+1.$$

Подставляя $h_{max}$ в полученную выше оценку, получаем требуемое.

□

Обозначим $L_0(n,k) = \frac{k-1}{2k}n^2+5n$

**Утверждение 2.** *Пусть $P$ — автомат с магазинной памятью из класса $\mathcal{M}'_0(n,1,k)$. Если $P$ не имеет автоматных циклов или имеет только недостижимые пищущие автоматные циклы, то период сгенерированной $P$ последовательности не превосходит $L_0(n,k)$.*

*Доказательство.* При функционировании автомата $P$ найдется последовательность тактов от $t_1$ до $t_2$, когда из пустого магазина автомат заполняет магазин до уровня в $h_{max}$ символов, то есть $\gamma(t_1)=\lambda$, $\gamma(t_2)=1^{h_{max}}$ и $\gamma(t)\neq\lambda$ при $t_1<t\leq t_2$. Очевидно, что каждое состояние $q(t)$ при $t_1<t\leq t_2$ не может встречаться в одном периоде больше, чем

$|\gamma(t)|+1$ раз в силу определения $h_{max}$. Пусть $h_{max}=1+h_0+h_1(k-1)$, где $0\le h_0<k-1$. Нетрудно видеть, что в отрезке от $t_1+1$ до $t_2$ найдутся такие $t_i$, что будет выполнено $|\gamma(t_i)|\le(k-1)i+1$ при $i=1,...,h_1$ и $q(t_i)\in W$. Учитывая это, получаем, что

$$L(P)\le(h_{max}+1)(n-h_1)+\sum_{i=1}^{h_1}(2+i(k-1))=$$

$$=(h_{max}+1)n-\sum_{i=1}^{h_1}(h_{max}-2-i(k-1))=$$

$$=(h_{max}+1)n-\sum_{i=1}^{h_1}(h_0+(h_1-i)(k-1)-1)=$$

$$=(h_{max}+1)n+h_1-h_0h_1-\frac{(k-1)h_1(h_1-1)}{2}=$$

$$=(h_{max}+1)n+\frac{h_1(k+2-h_0-h_{max})}{2}\le(h_{max}+1)n+\frac{h_{max}(k+2-h_{max})}{2(k-1)}.$$

Каждому состоянию $q$ сопоставим число $h(q)$, равное максимальному числу символов в магазине, которое может быть при достижении этого состояния. Заметим, что оценку удалось улучшить за счет уточнения функции $h(q)$ для некоторых пишущих состоятий $q$ пользуясь тем, что автомат за один такт может писать ограниченное количество символов. Теперь сделаем аналогичное уточнение при стирании магазина, то есть для стирающих состояний.

Покажем, что в $P$ для любого натурального $d$ такого, что $1\le d<h_{max}$, найдется такое стирающее $q$, что $h(q)=d$. Рассмотрим последовательность тактов от $t_2$ до $t_3$, когда автомат стирает магазин от $h_{max}$ до пустого, то есть $\gamma(t_2)=1^{h_{max}}$, $\gamma(t_3)=\lambda$ и $\gamma(t)\ne\lambda$ при $t_2<t<t_3$. В этом отрезке найдется такой номер $t'$, что $q(t')=q_0\in S$ и $|\gamma(t')|=d$. Если $h(q_0)=d$, то заканчиваем процедуру поиска. Если $h(q_0)>d$, то это означает, что найдется момент времени $t_4$ такой, что $q(t_4)=q_0$ и $|\gamma(t_4)|>d$. Тогда пусть $t_5$ таково, что $\gamma(t_5)=\lambda$ и при $t_4<t<t_5$ $\gamma(t_5)\ne\lambda$. На этом новом отрезке выберем аналогичным образом $t''$ такое, что $q(t'')=q_1\in S$ и $|\gamma(t')|=d$ и так далее. Возможны два результата работы этой процедуры: мы найдем такое $q_i$, что $h(q_i)=d$ или последовательность $q_0,q_1,...,q_\ell$ зациклится. Если последовательность зациклилась, то это означает, что

в автомате есть стирающий автоматный цикл, что противоречит условию. Значит, данная процедура всегда приводит к нахождению требуемого состояния.

Таким образом, мы можем понизить верхнюю оценку еще на $\frac{h_{max}(h_{max}-1)}{2}$, то есть получаем, что выполнено:

$$L(P) \le (h_{max}+1)n + \frac{h_{max}(k+2-h_{max})}{2(k-1)} - \frac{h_{max}(h_{max}-1)}{2}.$$

Максимизируя выражение по $h_{max}$ при условии, что $0 \le h_{max} \le \frac{(k-1)n}{k} + 1$, получаем, что $L(P) \le \frac{k-1}{2k}n^2 + 5n$, что и требовалось доказать.

□

**Пример 2.**

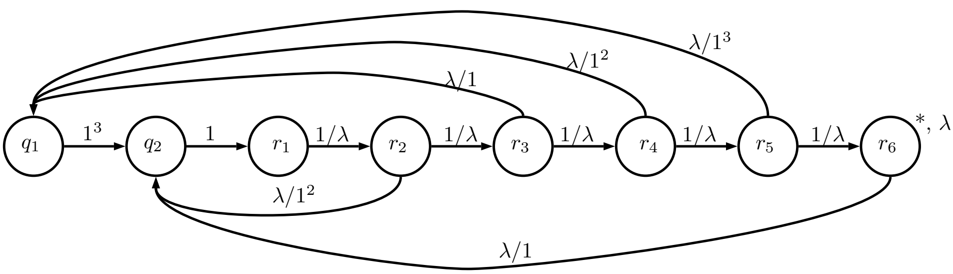
Для $n \ge 3$ и $k \ge 2$ рассмотрим автономный автомат с магазинной памятью $P_0 = \{Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, r_s, \lambda\} \in \mathcal{M}_0(n, 1, k)$, где $s = n - 1 - [\frac{n-3}{k}]$, $x = s - 1 - (k-1)(n-s-1)$, $B = \{0, 1\}$, $Q = \{q_1, ..., q_{n-s}, r_1, r_2 ..., r_s\}$, $\Gamma = \{1\}$,

$$\psi(q, z) = \begin{cases} 1, & q = r_2,\ z = \lambda, \\ 0, & \end{cases}$$

$$\varphi(q, z) = \begin{cases} q_{i+1}, & q = q_i,\ i \ne n-s, \\ r_1, & q = q_{n-s}, \\ r_{i+1}, & q = r_i,\ i \ne s,\ z = 1, \\ q_{n-s}, & q = r_s,\ z = \lambda, \\ q_1, & q = r_{s-1},\ z = \lambda, \\ q_{n-s-[\frac{i-1}{k-1}]}, & q = r_i,\ 1 < i < s-1,\ z = \lambda, \\ q, & \end{cases}$$

$$\eta(q,z)=\begin{cases}1^k, \quad q=q_i,\ i\neq n-s,\\ 1, \quad q=q_{n-s},\\ \lambda, \quad q=r_i,\ z=1,\\ 1, \quad q=r_s,\ z=\lambda,\\ 1^x, \quad q=r_{s-1},\ z=\lambda,\\ 1^{k-1}, \quad q=r_i,\ z=\lambda,\ i \mod (k-1)=0,\\ 1^{i \mod (k-1)}, \quad q=r_i,\ z=\lambda,\ i \mod (k-1)\neq 0,\\ \lambda,\end{cases}$$

Ниже приведем диаграмму этого автомата для $n=8$ и $k=3$. Переходы автомата описываются следующим шаблоном $z/\eta$, то есть из данного состояния, при значении верхнего символа магазина z, автомат записывает на выходную ленту пару $(q,z)$, а в магазине стирает последний символ и дописывает слово $\eta$. Следующее состояние указывает стрелка.




Опишем функционирование описанного выше автомата $P_0$ и поясним его канонические уравнения. Состояния автомата поделены на две группы: $\{q_1,...,q_{n-s}\}$ — состояния в которых происходит наполнение магазина, и состояния $\{r_1,...,r_s\}$ — в которых происходит опустошение магазина. Автомат начинает свою работу из состояния $r_s$ с пустым магазином. Далее автомат переходит в первую группу состояний, где происходит запись в магазин, после заполнения автомат переходит во вторую группу состояний, а именно: в состояние $q_1$ с одном записанным символом в магазине. Далее происходит опустошение. После чего подобные итерации повторяется с той лишь разницей, что каждую последующую итерацию количество записанных в магазин символов увеличивается на 1 вплоть до значения $s-1$. После стирания $s-1$ символа автомат опять попадает в состояние $r_s$.

Аналогично предыдущему примеру получаем, что

$$L(P_0) = \frac{(s-1)s}{2} + (s-1)(n-s) + x - \sum_{i=0}^{s-2-x} [\frac{i}{k-1}]$$

Оценим $L(P_0)$, пользуясь леммой из предыдущего примера, и упростим выражение:

$$L(P_0) \geq \frac{(s-1)s}{2} + (s-1)(n-s) + x - \frac{(s-x)^2}{2(k-1)} - \frac{3(s-x)}{2} \geq sn - \frac{s^2 k}{2(k-1)} - s.$$

Далее подставим оценки на $s$:

$$L(P_0) \geq n(n-2-\frac{n-3}{k}) - \frac{(n-1-\frac{n-3}{k})^2 k}{2(k-1)} + (n-1-\frac{n-3}{k}) \geq \frac{k-1}{2k} n^2 - 3n - 2.$$

**Замечание.** Нижняя оценка, полученная в примере, асимптотически совпадает с доказанной верхней оценкой при $n \to \infty$.

## Дополнительные определения

Перейдем к рассмотрению основного случая, когда в автомате с магазинной памятью есть стирающие автоматные циклы.

Пусть в автомате $P$ из $\mathcal{M}'_0(n,1,k)$ есть хотя бы один автоматный цикл. Выберем любой и обозначим $C$. Тогда для $q \in C$ определим множество состояний $W(q) \subseteq Q \setminus C$, из которых можно попасть в стирающий цикл через $q$:

$$W(q) = \{q' \in Q \setminus C \mid \exists t_1, t_2 :\ q(t_1) = q',\ q(t_2) = q,\ \forall t :\ t_1 \leq t < t_2,$$

$$\gamma(t) \neq \lambda,\ q(t) \notin C\}.$$

Заметим, что для различных $q_1 \in C$ и $q_2 \in C$ выполнено $W(q_1) \cap W(q_2) = \emptyset$. Для всех состояний из $W(q)$ будем говорить, что $q$ является точкой входа в автоматный цикл.

Для стирающего цикла $C$ определим множество состояний $W(C)$, которые попадают в автоматный цикл $C$:

$$W(C) = \bigcup_{q \in C} W(q).$$

Заметим, что для двух стирающих циклов $C_1$ и $C_2$ выполнено $W(C_1) \cap W(C_2) = \emptyset$.

Назовем окресностью стирающего цикла множество состояний $U(C) = C \cup W(C)$. Обозначим $U_0$ — множество состояний, которые не лежат ни в какой окресности стирающего цикла. Для автомата только со стирающими автоматными циклами $C_1, ..., C_d$ имеем следующее разложение:

$$Q = \bigsqcup_{i=1}^{d} U(C_i) \sqcup U_0.$$

Пусть $P$ — автомат из $\mathcal{M}'_0(n, 1, k)$ с периодом выхода $\tau$. Пусть $q(t)$ — последовательность состояний автомата и $\gamma(t)$ — последовательность слов, записанных в магазине, заданы каноническими уравнениями. Так как эти последовательности периодические, рассмотрим их лишь на номерах от 0 до $\tau$. Пусть $t_1, ..., t_{d+1}$ — множество номеров на этом отрезке, когда магазин пуст. Не ограничивая общности, будем считать, что $0 = t_1 < t_2 < ... < t_d < t_{d+1} = \tau$. Рассмотрим полуинтервал $(t_i, t_{i+1}]$, на котором функционирует автомат $P$. На этой последовательности тактов автомат порождает подпоследовательности состояний $\{q(t)\}_{t_i+1}^{t_{i+1}}$ и слов $\{\gamma(t)\}_{t_i+1}^{t_{i+1}}$, записанных в магазин. Эту пару подпоследовательностей назовём этапом функционирования автомата и будем обозначать $I_i$. Обозначим длину этапа $|I_i|$ — количество тактов работы автомата в этапе. Для $P$ однозначно определено представление периода в виде упорядоченного множества этапов $(I_1, I_2, ..., I_d)$. Обозначим это отображение $I(P)$. Описание функционирование автомата как последовательности этапов важно, так как имеет довольно интересные свойства, описываемые в следующей лемме.

**Лемма 6.** *Пусть $P$ — автомат из $\mathcal{M}'_0(n, 1, k)$ и для него выполнено $I(P) = (I_1, ..., I_d)$. Тогда выполнены следующие утверждения:*

1) *Для любой перестановки $\sigma$ на $d$ элементах найдется автомат $P_\sigma$ из $\mathcal{M}'_0(n, 1, k)$ такой, что его период будет описываться последовательностью этапов $I(P_\sigma) = (I_{\sigma(1)}, ..., I_{\sigma(d)})$.*

2) *Для любого подмножества этапов $I_{j_1}, ..., I_{j_h}$ найдется автомат $P'$ из $\mathcal{M}'_0(n, 1, k)$ такой, что $I(P') = (I_{j_1}, ..., I_{j_h})$.*

*Доказательство.* Нетрудно видеть, что оба автомата $P_\sigma$ и $P'$ получаются из автомата $P$ изменением его поведения на пустом магазине. □

## Случай одного стирающего цикла

Пусть в автомате $P$ из $\mathcal{M}'_0(n,1,k)$ есть ровно один стирающий цикл $C$ длины $\ell$ со стирающим индексом $-s$. Обозначим $C_W = C \cap W$ — все пишущие состояния автоматного цикла, а $C_S = C \cap S$ — все его стирающие состояния. Пусть $C_{S_0} = \{q \in C_S | \ \exists h > \ell : (q, 1^h) \Rrightarrow (q, \lambda)\}$, а $C_{S_1} = C_S \backslash C_{S_0}$. Нетрудно видеть, что $|C_{S_0}| = s$.

Для каждого состояния $q$ из стирающего цикла $C$ определим функцию стирания $f_C(q,h) : \times \to$ — минимальное количество тактов необходимое для достижение пустого магазина из состояния $q$ с записанном в магазине словом длины $h$. Нетрудно видеть, что если $\ell$ — длина стрирающего цикла, а $s$ — абсолютное значение стирающего индекса $C$, то

$$h + \lfloor \frac{h}{s} \rfloor (\ell - s) \leq f_C(q,h) \leq h + \lceil \frac{h}{s} \rceil (\ell - s) = f_C^{max}(h).$$

**Лемма 7.** *В текущих обозначениях*

$$\sum_{i=0}^{s'-1} f_C^{max}(h_{max} - i) = \begin{cases} h_{max} l - \frac{s(s-1)}{2}, & s \leq h_{max} - (k-1), \\ \frac{(h_{max}+k)^2}{2} + \frac{h_{max}+k}{2} + h_{max}(\ell - s), s > h_{max} - (k-1), & \ell \neq n, \end{cases}$$

*где* $s' = \min(s, h_{max} - (k-1))$.

*Доказательство.* Если $s \leq h_{max} - (k-1)$, то

$$\sum_{i=0}^{s'-1} f_C^{max}(h_{max} - i) = \sum_{i=0}^{s-1} f_C^{max}(h_{max} - i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{s-1} \left( h_{max} - i + \lceil \frac{h_{max} - i}{s} \rceil (\ell - s) \right) =$$

$$= h_{max} s - \frac{s(s-1)}{2} + (\ell - s) \sum_{i=0}^{s-1} \lceil \frac{h_{max} - i}{s} \rceil =$$

$$= h_{max} s - \frac{s(s-1)}{2} + (\ell - s) \sum_{i=0}^{s-1} \frac{h_{max} - i}{s} + \frac{(l-s)(s-1)}{2} =$$

$$= h_{max} s - \frac{s(s-1)}{2} + h_{max}(\ell - s) = h_{max} \ell - \frac{s(s-1)}{2}.$$

Если $s > h_{max} - (k-1)$, то

$$\sum_{i=0}^{s'-1} f_C^{max}(h_{max} - i) = \sum_{i=0}^{h_{max}-k} f_C^{max}(h_{max} - i) = \sum_{i=k}^{h_{max}} f_C^{max}(i) =$$

$$= \sum_{i=k}^{h_{max}} \left( i + \lceil \frac{i}{s} \rceil (\ell - s) \right) =$$

$$= \frac{(h_{max} + k)^2}{2} + \frac{h_{max} + k}{2} + (\ell - s) \sum_{i=k}^{h_{max}} \lceil \frac{i}{s} \rceil =$$

$$= \frac{(h_{max} + k)^2}{2} + \frac{h_{max} + k}{2} + (\ell - s) \left( \sum_{i=k}^{h_{max}-k+1} \lceil \frac{i}{s} \rceil + \sum_{i=h_{max}-k+2}^{h_{max}} \lceil \frac{i}{s} \rceil \right) =$$

$$= \frac{(h_{max} + k)^2}{2} + \frac{h_{max} + k}{2} + (\ell - s) \left( \sum_{i=k}^{h_{max}-k+1} 1 + \sum_{i=h_{max}-k+2}^{h_{max}} 2 \right) =$$

$$= \frac{(h_{max} + k)^2}{2} + \frac{h_{max} + k}{2} + (\ell - s) h_{max},$$

что и требовалось доказать.

□

**Лемма 8.** *Пусть $P$ — автомат из $\mathcal{M'}_0(n, 1, k)$ и пусть $P$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) *в $P$ есть единственный автоматный цикл $C$ с отрицательным стирающем индексом;*

2) *вне этого цикла стирающих состояний нет, то есть $S \subseteq C$.*

*Тогда найдется такой автомат из $P'$ из $\mathcal{M'}_0(n, 1, k)$, удовлетворяющий тем же условиям, такой, что все состояния вне стирающего цикла при непустом магазине пишут ровно $k$ символов в магазин, при этом выполнено*

$$L(P) \leq L(P') + n.$$

*Доказательство.* Рассмотрим непустое $W(q_*)$ для некоторого $q_* \in C$. Рассмотрим все этапы, которые начинаются с состояния из $W(q_*)$. Любой такой этап можно разделить на две части: это заполнение магазина, когда текущее состояние не из стирающего цикла, и стирание магазина, когда автомат вошел в стирающий цикл. Заметим, что длина второй части зависит только от количества символов записанных в магазин. Проведем следующую трансформацию автомата. Во всех состояниях $q$ из $W(q_*)$ сделаем $\eta(q, 1) = 1^k$, а также изменим переходы и запись в магазин по пустым состояниям стирающего цикла так, чтобы изменения коснулись только рассматирваемых этапов и для каждого рассматриваемого этапа количество символов, записанное в магазин, при первом попадании в стирающий цикл (то есть в $q_*$) не изменилось. Заметим, что при данной трансформации стирающая часть этапа будем иметь такую же длину, как и раньше. Может так оказаться, что количество тактов, которое автомат заполнял магазин уменьшилось. Если после трансформации среди состояний из $W(q_*)$ возникли недостижимые, то все такие состояния добавим в стирающий цикл как нейтральные сразу после $q_*$. Таким образом, каждый рассматриваемый этап может уменьшиться не более чем на 1.

Проводя подобные трансформации для всех непустых $W(q)$, построим требуемый автомат $P'$. Так как количество этапов не превосходит $n$, то будет верна оценка

$$L(P) \leq L(P') + n,$$

что и требовалось доказать.

□

Обозначим $L_1(n, k) = \frac{k(k-1)}{4k-2} n^2 + (8k + 32)n$.

**Утверждение 3.** *Пусть $P$ — автомат из $\mathcal{M}'_0(n, 1, k)$ и пусть $P$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) *в $P$ есть единственный автоматный цикл $C$ с отрицательным стирающем индексом;*

2) *вне этого цикла стирающих состояний нет, то есть $S \subseteq C$.*

*Тогда*

$$L(P) \leq L_1(n, k).$$

*Доказательство.* Последовательно применяя леммы 2 и 8, далее можно рассматривать автомат $P'$ такой, что при пустом магазине автомат $P'$

должен писать в магазин и для которого при $q \notin C$ выполнено $\eta(q,1) = 1^k$, при этом будет верно, что

$$L(P) \leq L(P') + 2n.$$

Так как начальное слово, записанное в магазине, пустое, то всё функционировние автомата устроено следующем образом. Из стирающего цикла при пустом магазине автомат заполняет магазин одним из двух способов: либо он выходит из стирающего цикла и заполняет магазин до тех пор, пока не попадает в стирающий цикл снова, либо, не выходя, переходит в другое состояние стирающего цилка. В стирающем цикле автомат опустошает магазин и так далее повторяется до зацикливания, то есть пока автомат не окажется опять в начальном состоянии с пустым магазином.

Пусть $\ell$ — длина стирающего цикла $C$. Пусть $s = |C_{S_0}|$ и $r = |C_{S_1}|$.

Пусть $I(P') = (I_1, I_2, ..., I_{r+s})$ — упорядоченное множество этапов автомата $P'$ таково, что последнее состояние первых $s$ этапов из $C_{S_0}$. Оценим отдельно $\sum\limits_{i=1}^{s} |I_i|$ и $\sum\limits_{i=s+1}^{s+r} |I_i|$.

Начнем с $\sum\limits_{i=s+1}^{s+r} |I_i|$. Эти этапы характерны тем, что в них автомат не проходит по всем состояним стирающего цикла. И максимальное количество символов в магазине не более чем $r$. С другой стороны, можно считать, что автомат сразу находится в стирающем цикле на протяжении всего этапа. Отсюда получаем оценку

$$\sum_{i=s+1}^{s+r} |I_i| \leq L_0(\ell - s, k) \leq \frac{k-1}{2k}(\ell - s)^2 + 5(\ell - s).$$

Теперь оценим $\sum\limits_{i=1}^{s} |I_i|$. Заметим, для всех этапов из рассматриваемого подмножества, в которых автомат не покидает стирающий цикл, можно оценить сверху сумму их длин как $(k+1)n$. Рассмотрим остальные этапы. Для них отдельно оценим "такты записи"и "такты стирания". Пусть $\tau$ — количество тактов, которые начинаются либо вне стирающего цикла, либо из стирающего цикла, но с пустым магазином, а $\tau$ — все остальные такты работы автомата.

Рассмотрим случай, когда найдется $q_* \in C$ такое, что $W(q_*) = Q \backslash C$. Заметим, что автомат $P'$ не сможет записать больше, чем $h_{max} = (n - \ell + 1)(k-1) + 1$ символ в магазин. Учитывая, что внутри одного периода автомат не может оказаться в одном и том же состоянии с одинаковым содержимом магазина, получаем:

$$\tau \leq \sum_{i=0}^{s'-1} f_C^{max}(h_{max} - i),$$

где $s' = \min(s, h_{max} - (k-1))$ — количество оставшихся этапов.

Теперь оценим $\tau$. При максимальном заполнении магазина автомат пройдет по всем пишушим состояним. Из стирающего цикла автомат не может перейти в одно и то же состояние более не более $k-1$ раза, кроме, тех состояний, в которые можно попасть только из стирающего цикла. В такие состояния автомат можем попасть не более $k$ раз. Отсюда получаем, что

$$\tau \leq (n - \ell + 1)s' - \sum_{i=0}^{s'-2} [\frac{i}{k-1}]$$

Откуда получаем, что

$$\sum_{i=1}^{s} |I_i| \leq \sum_{i=0}^{s'-1} f_C^{max}(h_{max} - i) + (n - \ell + 1)s - \sum_{i=0}^{s'-2} [\frac{i}{k-1}] + (k+1)n.$$

Пусть теперь $W(q) \neq Q \backslash C$ для всех $q \in C$. Заметим, что если $s \leq (n-k)(k-1)+1$, то полученные оценки остаются в силе, так как, собирая состояния $Q \backslash C$ в одном $W(q)$ достигается большая длина этапов. Если же $s > (n-k)(k-1)+1$, то можно считать, что все непустые $W(q)$ для $q \in C$ содержат по одному состоянию, кроме одного, в котором лежат все остальные состояния. Этапы, которые начинаются с состояния из $W(q)$, где $|W(q)| = 1$ можно суммарно оценить сверху $2kn$, так как до входа в стирающий цикл не будет записано более $2k-1$ символов в магазин. Таким образом можно считать, что в случае, когда $W(q) \neq Q \backslash C$ для всех $q \in C$ оценка увеличится не более чем на $2kn$

Суммируя обе оценки, получаем, что

$$L(P') \leq \sum_{i=0}^{s'-1} f_C^{max}(h_{max} - i) + (n - \ell + 1)s' - \sum_{i=0}^{s'-2} [\frac{i}{k-1}] +$$

$$+ \frac{k-1}{2k}(\ell - s)^2 + 5(\ell - s) + 2kn.$$

Следовательно,

$$L(P) \leq \sum_{i=0}^{s'-1} f_C^{max}(h_{max}-i) + (n-\ell+1)s' - \sum_{i=0}^{s'-2}[\frac{i}{k-1}] + \frac{k-1}{2k}(\ell-s)^2 +$$

$$+5(\ell-s) + 2kn + (k+1)n + 2n \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{s'-1} f_C^{max}(h_{max}-i) + (n-\ell+2)s' - \frac{s'^2}{2(k-1)} + \frac{k-1}{2k}(\ell-s)^2 + 5(\ell-s) + (3k+3)n,$$

где $h_{max} = (n-\ell+1)(k-1)+1$ и $s' = \min(s, h_{max}-(k-1))$.

При $s \leq (n-\ell)(k-1)+1$, получаем:

$$L(P) \leq ((n-\ell+1)(k-1)+1)\ell - \frac{s(s-1)}{2} + s(n-\ell+2) -$$

$$-\frac{s^2}{2(k-1)} + \frac{k-1}{2k}(\ell-s)^2 + 5(\ell-s) + (3k+3)n \leq$$

$$\leq \max_{\substack{1 \leq s \leq \ell \leq n,\\ s \leq (n-\ell)(k-1)+1}} \Bigg( ((n-\ell+1)(k-1)+1)\ell - \frac{s(s-1)}{2} + s(n-\ell+2) -$$

$$-\frac{s^2}{2(k-1)} + \frac{k-1}{2k}(\ell-s)^2 + 5(\ell-s) \Bigg) + (3k+3)n.$$

Максимизируя квадратичную функцию по $s$ и $\ell$ получаем, что

$$L(P) \leq \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + 5kn + (3k+3)n = \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + (8k+3)n.$$

Значит, $L(P) \leq L_1(n,k)$ в этом случае.

При $s > (n-\ell)(k-1)+1$ и $\ell \neq n$ получаем:

$$L(P) \leq \frac{(h_{max}+k)^2}{2} + \frac{h_{max}+k}{2} + h_{max}(l-s) + s'(n-\ell+2) -$$

$$-\frac{s'^2}{2(k-1)} + \frac{k-1}{2k}(\ell-s)^2 + 5(\ell-s) + (3k+3)n =$$

$$= \frac{k-2}{2(k-1)}h_{max} + h_{max}(n-s) + \frac{k-1}{2k}(\ell - s)^2 + kh_{max} +$$

$$+\frac{7}{2}h_{max} + (k-1)(n-\ell) + 5(\ell - s) + \frac{k^2}{2} + \frac{1}{2} - 2(k-1) + (3k+3)n \leq$$

$$\leq nh_{max} - \frac{k-1}{k}\ell h_{max} + \frac{k-1}{2k}\ell^2 - \frac{2k-1}{2k(k-1)}h_{max}^2 +$$

$$+k(2h_{max}+2\ell-n)+4\ell-\frac{5}{2}h_{max}+n+3(k-1)+\frac{k^2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{(k-1)^3}{2k}+(3k+3)n \leq$$

$$\leq nh_{max}-\frac{k-1}{k}\ell h_{max}+\frac{k-1}{2k}\ell^2-\frac{2k-1}{2k(k-1)}h_{max}^2+6kn+8n+5(k-1)+k^2+\frac{1}{2}$$

Подставляя $h_{max} = (n-\ell+1)(k-1)+1$, получаем

$$L(P) \leq \frac{n^2}{2} - \frac{n^2}{2(k-1)} + \frac{n^2}{2k(k-1)} - \frac{1}{2(k-1)} + n-$$

$$-k(n-\ell+1) - \frac{1}{2} + 6kn + 8n + 5(k-1) + k^2 + \frac{1}{2} \leq$$

$$\leq \frac{k-1}{2k}n^2 + 6kn + 9n + 5(k-1) + k^2 \leq \frac{k-1}{2k}n^2 + 7kn + 14n \leq L_1(n,k)$$

Остаётся лишь заметить, что в случае $\ell = n$, будет верна оценка

$$L(P) \leq L_0(n,k) + 2n + 2kn \leq L_1(n,k),$$

что и завершает доказательство.

□

**Утверждение 4.** *Пусть $P$ — автомат из $\mathcal{M}'_0(n,1,k)$ и пусть в $P$ есть единственный автоматный цикл $C$ с отрицательным стирающем индексом. Тогда*

$$L(P) \leq L_1(n,k).$$

*Доказательство.* Применяя лемму 2, далее можно рассматривать автомат $P'$ такой, что при пустом магазине автомат $P'$ должен писать в магазин при этом будет выполнено:

$$L(P) \leq L(P') + n.$$

Рассмотрим $I(P') = (I_1, I_2, ..., I_d)$ — упорядоченное множество этапов автомата $P'$. Разобьём этапы на две группы. В первую включим все этапы, предпоследнее состояние которых не лежит в стирающем цикле $C$, в во вторую все остальные. По лемме 6 найдутся такие автоматы $P'_1$ и $P'_2$ из $\mathcal{M}'_0(n, 1, k)$, что $I(P'_1)$ будет состоять из первой группы этапов, а $I(P'_2)$ — из второй, причем будет выполнено, что

$$L(P') = L(P'_1) + L(P'_2).$$

Пусть $n_0$ — количество состояний в $L(P'_1)$. Тогда можно имеет место оценка

$$L(P'_1) \leq L_0(n_0, k) \leq \frac{k-1}{2k} n_0^2 + 5n_0.$$

Теперь оценим $L(P'_2)$. В $P'_2$ после стирающих состояний вне стирающего цикла магазин не становится пустым. Это означает, что можно трансформировать запись в магазин, не изменив при этом длину периода. Следовательно, можно считать, что автомат удовлетворяет предыдущей лемме, то есть для него верна оценка

$$L(P'_2) \leq \sum_{i=0}^{s'-1} f_C^{max}(h_{max} - i) + (n - \ell + 2)s' - \frac{s'^2}{2(k-1)} + \frac{k-1}{2k}(\ell - s)^2 +$$

$$+5(\ell - s) + (3k+2)n,$$

h$_{max} \leq (n - \ell - n_0 + 1)(k-1) + 1$ и $s' = \min(s, h_{max} - (k-1))$.

Суммируя обе оценки, имеем

$$L(P) \leq L(P'_1) + L(P'_2) + n \leq \frac{k-1}{2k} n_0^2 + 5n_0 + \sum_{i=0}^{s'-1} f_C^{max}(h_{max} - i) +$$

$$+(n - \ell + 2)s' - \frac{s'^2}{2(k-1)} + \frac{k-1}{2k}(\ell - s)^2 + 5(\ell - s) + (3k+3)n,$$

где $h_{max} \leq (n - \ell - n_0 + 1)(k-1) + 1$ и $s' = \min(s, h_{max} - (k-1))$.

При $s \le (n-\ell-n_0)(k-1)+1$, получаем:

$$L(P) \le \Bigg(\frac{k-1}{2k}n_0^2+5n_0+((n-\ell-n_0+1)(k-1)+1)\ell-\frac{s(s-1)}{2}+s(n-\ell+2)$$

$$-\frac{s^2}{2(k-1)}+\frac{k-1}{2k}(\ell-s)^2+5(\ell-s)\Bigg)+(3k+3)n,$$

Максимизируя по $n_0$, $\ell$ и $s$, получаем,что

$$L(P) \le L_1(n,k).$$

При $s > (n-\ell-n_0)(k-1)+1$ и $\ell \ne n$ получаем:

$$L(P) \le \frac{k-1}{2k}n_0^2+5n_0+nh_{max}-\frac{k-1}{k}\ell h_{max}+\frac{k-1}{2k}\ell^2-\frac{2k-1}{2k(k-1)}h_{max}^2+$$

$$+3(k-1)+\frac{k^2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{(k-1)^3}{2k}+(3k+3)n \le$$

$$\le (\frac{k-1}{2k}n_0^2+5n_0+n-\frac{k-1}{k}\ell)((n-\ell-n_0+1)(k-1)+1)+\frac{k-1}{2k}\ell^2-$$

$$-\frac{2k-1}{2k(k-1)}(n-\ell-n_0)(k-1)+(4k+3)n+3k$$

Максимизируя по $n_0$, $\ell$ , получаем,что

$$L(P) \le L_1(n,k).$$

При $\ell = n$ получаем, что $n_0 = 0$, следовательно, будет верна оценка из предыдущего утверждения, что и завершает доказательство.

□

## Общий случай

Теперь все готово для доказательства асимптотической верхней оценки для $L(n,1,k)$.

**Теорема 4.** *При* $k > 1$

$$L(n,1,k) \le L_1(n,k).$$

*Доказательство.* Пусть $P$ содержит $d$ автоматных циклов. В случае $d = 0$ и $d = 1$ все доказано. Пусть $d \geq 1$. Заметим, что все циклы являтся стирающими, и обозначим их $C_1$,..., $C_d$. Имеет место следующее разбиение множества состояний:

$$Q = \bigsqcup_{i=0}^{d} Q_i,$$

где при $i > 0$ $Q_i = {}_i \cup W(C_i)$ — множество состояний, и, а $Q_0$ — все оставшиеся состояния, то есть множество состояний, из которых автомат не попадает ни в один стирающий цикл. Заметим, что внутри каждого этапа $I$ все состояния лежат в одном и том же $Q_i$. Следовательно, для каждого $Q_i$ можно выделить своё подмножество этапов, для которого по лемме 6 будет существовать автомат $P_i$, реализующий его. Так как каждый этап автомата $P$ воздет в $I(P_i)$, то будет выполнено, что

$$L(P) = \sum_{i=0}^{d} L(P_i).$$

По построению $P_0$ — автомат без стирающего цикла, а остальные $P_i$ — автоматы с одним стирающим циклов. Сделовательно, для каждого $P_i$ будет выполнено $L(P_i) \leq L_1(|Q_i|, k)$. Значит,

$$L(P) \leq \sum_{i=0}^{d} L_1(|Q_i|, k) \leq L_1(\sum_{i=0}^{d} |Q_i|, k) = L_1(n, k),$$

что и требовалось доказать.

□

## Заключение

В работе была получена асимптотическая верхняя оценка на максимальную длину периода выходной последовательности, сгенерированной автоматом с магазинной памятью с однобуквенным магазином. Построен пример автомата, на котором эта оценка достигается. Ранее автором была опубликована работа, в которой была допущена досадная неточность в доказательстве. В данной работе доказательство было полностью исправлено, что повлекло усложнение его конструкции. И хотя принципиально результат не поменялся, автор приносит свои извинения читателю.

Автор выражает благодарность Калачеву Глебу Вячеславовичу и проф. Гасанову Эльяру Эльдаровичу за продуктивные и конструктивные обсуждения, своему научному руководителю проф. Бабину Дмитрию Николаевичу за ценные замечания и внимание к работе.

## Список литературы

[1] Oettinger A., Automatic syntatic analysis and the pushdown store, в сб. Structure of Language and its Mathematical Concepts, Proc. 12th Symposium on Applied Mathematics, 1961, 104-129.

[2] Schutzenberger M. P., On contex-free languages and pushdown automata, Inforc and contril, 6:3, 1963, 246-264.

[3] Chomsky N., Context-free gtammars and pushdown storage, Quarlerly Progress Report, № 65, Research Laboratory of Electronics, Massachusetts Institute of Technology, Cambrig, Mass, 1962.

[4] Evey R.J., Applications of pushdown-store machines, Proc. AFIPS Fall Joint Computer Conference, 24, 1963, 215-227.

[5] Bar-Hillel Y., Perles M., Shamir E., On formal properties of simple phrase structure grammars. Z. Phonctik, Sprachwissensch. Kommunikationsforsch. 14, 1961, 143-172

[6] Ginsburg S., Rose G.F., Some recursively unsolvable problems in ALGOL-like languages, J. Assoc. Computing Machinety, 10, 1963, 175-195.

[7] Ginsburg S., Greibach S., Deterministic context free languages, Information and Control, Volume 9, Issue 6, 1966, 620-648.

[8] L.G. Valiant, M.S. Paterson, Deterministic one-counter automata, J. Comput. System Sci. 10 (1975) 340-350.

[9] M. Oyamaguchi, The equivalence problem for real-time d.p.d.a's, J. Assoc. Comput. Mach. 34 (1987) 731-760.

[10] S. Bohm, S. Goller, P. Jancar, Equivalence of deterministic one-counter automata is NL-complete, in: Proc. of STOC, ACM, 2013, pp. 131–140.

[11] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. М.:Наука, 1985.

[12] Бабин Д. Н. О полноте двухместных автоматных функций относительно суперпозиции. Дискретная математика. том 1, 4, 1989, 423-431.

[13] Иванов И.Е. Некоторые классы функций, вычислимые автоматами. Интеллектуальные системы, том 15, вып. 1, 2011, 361-378.

[14] Иванов И. Е. Улучшение нижней оценки на максимальную длину периода выходной последовательности автономного автомата с магазинной памятью. Интеллектуальные системы, том 20, вып. 4, 2016, 174-187.

# Дополнения: решение экстремальных задач

**Лемма 9.** *Пусть*

$$g(n,k) = \max_{\substack{s,\ell \\ 1 \le s \le \ell \le n, \\ s \le (n-\ell)(k-1)+1}} \Big( ((n-\ell+1)(k-1)+1)\ell - \frac{s(s-1)}{2} + s(n-\ell+2) - $$

$$- \frac{s^2}{2(k-1)} + \frac{k-1}{2k}(\ell-s)^2 + 5(\ell-s) \Big).$$

*Тогда* $g(n,k) \le \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + 5kn$.

*Доказательство.* Максимум квадратичной функции достигается либо в критической точке (где все частные производные равны нулю), либо на границе области. Обозначим максимизируемую функцию через $f$. Найдем критические точки:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial s} = n - 2\ell + \frac{\ell - s}{k} - \frac{s}{k-1} - 5/2 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial \ell} = 3\ell - n - 2s + k(n - 2\ell + 1) - \frac{(\ell - s)}{k} + 5 = 0 \end{cases}$$

Полученная система линейных уравнений не имеет решений, поэтому продолжим поиск решений на границе заданной области.

1. Пусть $s = 1$. При $s = 1$

$$f = 5\ell + n - \frac{1}{2k-2} + \frac{(k-1)(\ell-1)^2}{2k} + \ell(k-1)(n-\ell+1) - 3.$$

1.1. Найдем критические точки

$$\frac{\partial f}{\partial \ell} = 3\ell - n + k(n - 2\ell + 1) - \frac{\ell - 1}{k} + 3 = 0.$$

Откуда находим:

$$\ell = \frac{3k - kn + k^2 n + k^2 + 1}{2k^2 - 3k + 1}.$$

Подставляя в $f$ получаем:

$$\frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + \frac{kn}{2} + \frac{11n}{4(2k-1)} + \frac{11n}{4} + \frac{k}{4} + \frac{12}{k-1} - \frac{121}{8(2k-1)} - \frac{5}{8} \le \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + 5kn.$$

1.2. Рассмотрим границу $\ell = 1$. Подставляя в $f$, получаем:

$$kn - \frac{1}{2(k-1} + 2 \leq \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + 5kn.$$

1.3. Рассмотрим границу $\ell = n$. Подставляя в $f$, получаем:

$$5n + kn - \frac{1}{2k-2} + \frac{(k-1)(n-1)^2}{2k} - 3 \leq \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + 5kn.$$

2. Пусть $s = (n-\ell)(k-1)+1$. При $s = (n-\ell)(k-1)+1$

$$f = \frac{5\ell}{2} + \frac{3n}{2} - \frac{1}{2(k-1)} + \frac{7k\ell}{2} - \frac{5kn}{2} - \frac{(n-1)^2}{2k} + \frac{n^2}{2} - \frac{5}{2}.$$

2.1. Найдем критические точки

$$\frac{\partial f}{\partial \ell} = \frac{7k}{2} + \frac{5}{2} = 0.$$

Критических точек нет, поэтому будем искать максимум на границе, а именно: $\ell = 1$ и $\ell = n$.

2.2. При $\ell = 1$ получаем

$$\frac{7k}{2} + \frac{3n}{2} - \frac{1}{2(k-1)} - \frac{5kn}{2} - \frac{(n-1)^2}{2k} + \frac{n^2}{2} \leq \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + 5kn.$$

2.3. При $\ell = n$ получаем

$$5n + kn - \frac{1}{2k-2} + \frac{(k-1)(n-1)^2}{2k} - 3 \leq \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + 5kn.$$

3. Пусть $s = \ell$. При $s = \ell$

$$f = \frac{\ell(2k - \ell - 2k\ell + 2kn + 5)}{2} - \frac{\ell^2}{2(k-1)}.$$

3.1. Найдем критические точки

$$\frac{\partial f}{\partial \ell} = k(n - 2\ell + 1) - \ell - \frac{\ell}{k-1} + 5/2 = 0.$$

Откуда находим:

$$\ell = \frac{(k-1)(2k+2kn+5)}{2k(2k-1)}.$$

Подставляя в $f$, получаем:

$$\frac{(k-1)(2k+2kn+5)^2}{8k(2k-1)} \leq \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + 5kn.$$

Рассмотрим граничные значения $\ell$.

3.2. Случай $\ell = 1$ уже был рассмотрен в 1.2.

3.3. При $\ell = n$ получаем

$$\frac{n(2k-n+5)}{2} - \frac{n^2}{2(k-1)} \leq \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + 5kn.$$

4. Теперь $s$ не лежит на границе. Пусть $\ell = n$. При $\ell = n$

$$f = 5n - 3s + kn - \frac{s(s-1)}{2} - \frac{s^2}{2k-2} + \frac{(n-s)^2(k-1)}{2k}.$$

Найдем критические точки

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{n-s}{k} - n - \frac{s}{k-1} - \frac{5}{2} = 0.$$

Откуда находим:

$$s = -\frac{(k-1)(5k-2n+2kn)}{2(2k-1)} < 0.$$

Следовательно, подставим граничное значение $s$, а именно: $s = 1$. Подставляя, получаем:

$$5n + kn - \frac{1}{2k-2} + (\frac{(k-1)(n-1)^2}{2k} - 3 \leq \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + 5kn.$$

Во всех случаях получили верхнюю оценку

$$\frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + 5kn,$$

что и требовалось доказать.

$\square$

**Лемма 10.** *Пусть*

$$g(n,k) = \max_{\substack{s,\ell,n_0 \\ 1 \leq s \leq \ell \leq n, \\ s \leq (n-\ell)(k-1)+1, \\ 0 \leq n_0 \leq n-\ell}} \Bigg( \frac{k-1}{2k}n_0^2 + 5n_0 + ((n-\ell-n_0+1)(k-1)+1)\ell -$$

$$-\frac{s(s-1)}{2}+s(n-\ell+2)-\frac{s^2}{2(k-1)}+\frac{k-1}{2k}(\ell-s)^2+5(\ell-s)\Big).$$

*Тогда* $g(n,k)\leq \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2+5kn.$

*Доказательство.* Максимум квадратичной функции достигается либо в критической точке (где все частные производные равны нулю), либо на границе области. Обозначим максимизируемую функцию через $f$. Найдем критические точки:

Найдем критические точки:

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial s}=n-2\ell+\frac{\ell-s}{k}-\frac{s}{k-1}-\frac{5}{2}=0,\\ \frac{\partial f}{\partial \ell}=\frac{(k-1)(2\ell-2s)}{2k}-(k-1)(\ell-n+n_0-1)-\ell(k-1)-s+6=0,\\ \frac{\partial f}{\partial n_0}=\frac{n_0(k-1)}{k}-\ell(k-1)+5=0\end{cases}$$

Решая систему, получаем:

$$\begin{cases}\ell=\frac{17k+5}{2k(k-1)},\\ s=k(\frac{n}{2}-\frac{5}{4})-\frac{n}{4}-\frac{k(n/4+35/8)-5/2}{k(2k-1)}-\frac{63}{8},\\ n_0=\frac{6}{k-1}+\frac{7}{2}\end{cases}$$

Решая систему, получаем:

$$\frac{25k}{16}+\frac{5n}{8}+\frac{48}{k-1}-\frac{5kn}{4}-\frac{(2n-5)^2}{32(2k-1)}+\frac{kn^2}{4}-\frac{25}{8k}-\frac{n^2}{8}+\frac{731}{32}\leq\frac{k(k-1)}{4k-2}n^2+5kn.$$

Продолжим поиск решений на границе заданной области.

1. Случай, когда $n_0=0$, уже был полностью разобран.

2. Пусть теперь $n_0=n-\ell$. Тогда в этом случае можно оценить

$$L(P)\leq(k+1)n+L_0(n-\ell,k)+L_0(\ell-s,k)+n\leq L_0(n,k)+(k+2)n\leq\frac{k(k-1)}{4k-2}n^2+5kn.$$

3. Пусть теперь $n_0$ лежит не на границе. 3.1. Пусть $s=1$. При $s=1$

$$f=5\ell+n+5n_0-\frac{1}{2k-2}+\frac{(k-1)(\ell-1)^2}{2k}-\ell(k-1)(\ell-n+n_0-1)+\frac{n_0^2(k-1)}{2k}-3.$$

3.1.1. Найдем критические точки

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial \ell}=\frac{(\ell-1)(k-1)}{k}-\ell(k-1)-(k-1)(\ell-n+n_0-1)+5=0,\\ \frac{\partial f}{\partial n_0}=\frac{n_0(k-1)}{k}-\ell(k-1)+5=0\end{cases}$$

Решая систему, получаем:

$$\begin{cases} \ell = \frac{5}{k-1} + \frac{k(n+1)-6}{k^2+2k-1}, \\ n_0 = \frac{k(k+kn-6)}{k^2+2k-1} \end{cases}$$

Подставляя в $f$, получаем:

$$7n+\frac{12}{k-1}-\frac{(51k)/2-7n+9kn+(3kn^2)/2-n^2/2+23/2}{k^2+2k-1}+\frac{n^2}{2}+3 \leq \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2+5kn.$$

Продолжим поиск решений на границе заданной области.

3.1.2. Пусть $\ell = 1$. При $\ell = 1$

$$f = n + 5n_0 - \frac{1}{2k-2} + (n-n_0)(k-1) + \frac{n_0^2(k-1)}{2k} + 2$$

Найдем критические точки

$$\frac{\partial f}{\partial n_0} = \frac{n_0(k-1)}{k} - k + 6 = 0$$

Откуда находим:

$$n_0 = \frac{k(k-6)}{k-1}.$$

Подставляя в $f$, получаем:

$$k(n+11/2) - 13/(k-1) - k^2/2 - 21/2 \leq \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + 5kn.$$

3.1.3. Пусть $\ell = n$. Тогда $n_0 = 0$, случай был разобран.

3.2. Пусть $s = (n-\ell)(k-1)+1$. При $s = (n-\ell)(k-1)+1$

$$f = \frac{5\ell}{2}+\frac{3n}{2}+5n_0-\frac{1}{2(k-1)}+\frac{7k\ell}{2}-\frac{5kn}{2}+\ell n_0-\frac{n^2-2n+n_0^2+1}{2k}+\frac{n^2}{2}+\frac{n_0^2}{2}-kln_0-\frac{5}{2}.$$

3.2.1. Найдем критические точки

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \ell} = \frac{7k}{2} + n_0 - kn_0 + \frac{5}{2} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial n_0} = \frac{n_0(k-1)}{k} - \ell(k-1) + 5 = 0 \end{cases}$$

Решая систему, получаем:

$$\begin{cases} \ell = \frac{17k+5}{2k(k-1)}, \\ n_0 = \frac{7k+5}{2(k-1)} \end{cases}$$

Подставляя в $f$, получаем:

$$\frac{3n}{2}+\frac{95}{2(k-1)}-\frac{5kn}{2}-\frac{n^2-2n+29/4}{2k}+\frac{n^2}{2}+\frac{169}{8}\leq\frac{k(k-1)}{4k-2}n^2+5kn.$$

3.2.2. Пусть $\ell=1$. Тогда и $s=1$, случай был рассмотрен.

3.2.3. Пусть $\ell=n$. Тогда опять $s=1$ и случай был рассмотрен.

3.3. Пусть $s=\ell$. При $s=\ell$

$$f=5n_0-\ell((k-1)(\ell-n+n_0-1)-1)+\ell(n-\ell+2)-\frac{\ell(\ell-1)}{2}-\frac{\ell^2}{2k-2}+\frac{n_0^2(k-1)}{2k}.$$

3.3.1 Найдем критические точки:

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial \ell}=n_0-\ell-k(2\ell-n+n_0-1)-\frac{\ell}{k-1}/(k-1)+\frac{5}{2}=0,\\ \frac{\partial f}{\partial n_0}=\frac{n_0(k-1)}{k}-\ell(k-1)+5=0\end{cases}$$

Решая систему, получаем:

$$\begin{cases}\ell=\frac{(k-1)(12k+2kn+5)}{2k^3},\\ n_0=n-\frac{5}{k-1}-\frac{5}{2k^2}-\frac{2n+7}{2k}+1\end{cases}$$

Подставляя в $f$, получаем:

$$\frac{(7k+2kn-2k^2n-2k^2+5)(7k+2kn-2k^2n-22k^2+5)}{8k^3(k-1)}\leq\frac{k(k-1)}{4k-2}n^2+5kn.$$

3.3.2. Пусть $\ell=1$. Тогда и $s=1$, случай был рассмотрен.

3.3.3. Пусть $\ell=n$. Тогда $n_0=0$ и случай уже был разобран.

3.4. Пусть теперь $s$ лежит не на границе.

3.4.1. Пусть $\ell=1$. Тогда $s=1$ и случай уже был разобран.

3.4.2. Пусть $\ell=n$. Тогда $n_0=0$ и случай уже был разобран.

Во всех случаях получили верхнюю оценку

$$\frac{k(k-1)}{4k-2}n^2+5kn.$$

□

**Лемма 11.** *Пусть*

$$g(n,k)=\max_{\substack{\ell,n_0\\ \frac{k-1}{k}n+1\leq\ell\leq n,\\ 0\leq n_0\leq n-\ell}}\Big(\frac{k-1}{2k}n_0^2+5n_0+(n-\frac{k-1}{k}\ell)\cdot$$

$$\cdot((n-\ell-n_0+1)(k-1)+1)+\frac{k-1}{2k}\ell^2-\frac{2k-1}{2k(k-1)}(n-\ell-n_0)(k-1)\Big).$$

*Тогда* $g(n,k) \leq \frac{k-1}{2k}n^2+kn+3n+23.$

*Доказательство.* Максимум квадратичной функции достигается либо в критической точке (где все частные производные равны нулю), либо на границе области. Обозначим максимизируемую функцию через $f$. Найдем критические точки:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial n_0} = \ell - 2n + 4n_0 - k(\ell - n + 2n_0 - 2) + (n - 2n_0)/k + 4 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial \ell} = k + n_0 - kn_0 = 0 \end{cases}$$

Решая систему получаем, что

$$\begin{cases} \ell = n + \frac{6}{k-1} - \frac{n}{k}, \\ n_0 = \frac{1}{k-1} + 1 \end{cases}$$

Подставляя в $f$ и упрощая, получаем:

$$\frac{k-1}{2k}n^2 + \frac{11}{(2(k-1))} + \frac{11}{2} \leq \frac{k-1}{2k}n^2 + 11.$$

Продолжим поиск решений на границе заданной области.

1. Случай $n_0 = 0$ уже был рассмотрен.

2. Пусть теперь $n_0 = n - \ell$. При $n_0 = n - \ell$

$$f = 5n - 5\ell + kn - \ell(k-1) - \frac{k(2k-1)}{2(k-1)} + \frac{(k-1)\ell^2}{2k} + \frac{(k-1)(\ell-n)^2}{2k}.$$

Найдем критические точки:

$$\frac{\partial f}{\partial \ell} = 2\ell - k - n - \frac{2l-n}{k} - 4 = 0.$$

Решая уравнение, получаем:

$$\ell = k/2 + n/2 + 5/(2(k-1)) + 5/2.$$

Подставляя в $f$ получаем:

$$3n-(13k)/4-27/(4(k-1))+(kn)/2-k^2/4+n^2/4-n^2/(4k)-27/4 \leq n^2/4+kn+3n.$$

3. Пусть теперь $n_0$ не на границе.

3.1. Случай $\ell = n$ уже был рассмотрен, так как в этом случае $n_0 = 0$.
3.2. Пусть теперь $\ell = \frac{k-1}{k} n + 1$. Тогда

$$f = 5n_0 - \frac{1}{2(k-1)} + kn_0 - \frac{n^2}{2k} - \frac{n_0^2}{k} - kn_0^2 + \frac{n^2}{2} + 2n_0^2 - 1/2.$$

Найдем критические точки:

$$\frac{\partial f}{\partial n_0} = 4n_0 - \frac{2n_0}{k} - k(2n_0 - 1) + 5.$$

Решая уравнение, получаем:

$$n_0 = \frac{k^2 + 5k}{2k^2 - 4k + 2}.$$

Подставляя в $f$ получаем:

$$\frac{k}{4} + \frac{23}{2(k-1)} + \frac{9}{(k-1)^2} + \frac{n^2}{2} - \frac{n^2}{2k} + \frac{5}{2} \leq \frac{k-1}{2k} n^2 + 23 + k/4.$$

Во всех случаях получили, что максимум ограничен:

$$\frac{k-1}{2k} n^2 + kn + 3n + 23.$$

$\square$