О покрытиях и разбиениях натуральных чисел, имеющих два последовательных пропуска длины 1

П. С. Дергач, Е. Д. Данилевская

В статье приводится результат о нахождении минимального количества $L(n)$ арифметических прогрессий, необходимых для того, чтобы получить в объединении все натуральные числа, не сравнимые по модулю n с 0 и -2. Здесь n — произвольное натуральное число. При этом прогрессии могут пересекаться. Приводится точное значение для функции $L(n)$, а также конструктивное разбиение этого подмножества натурального ряда на $L(n)$ арифметических прогрессий.

Ключевые слова: натуральный ряд, арифметическая прогрессия, декомпозиция.

Введение

В рамках данной курсовой работы продолжаются исследования задачи о разбиении прогрессивных множеств на минимальное количество арифметических прогрессий. Прогрессивными множествами называем подмножества натурального ряда, образованные объединением конечного количества арифметических прогрессий. В курсовой работе задача решается в предположении, что прогрессивное множество состоит из всех таких натуральных чисел, которые по некоторому фиксированному натуральному числу n не дают остатки 0 и $n-2$. То есть, это множество содержит $n-2$ последовательных натуральных чисел, один пропуск, число, один пропуск и дальше опять $n-2$ чисел, пропуск, число,пропуск и так далее. О решении похожих задач можно прочитать в статьях [1-5]. О других интересных аспектах исследований авторов и других ученых в смежных областях к тематике данной работы можно прочитать в [6-16].

Основные определения и результаты

Множество натуральных чисел обозначаем через $\mathbb{N}$. Множество целых неотрицательных чисел обозначаем через $\mathbb{N}_0$. Пусть $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}_0$. Тогда *арифметической прогрессией с началом a и шагом b* называется множество

$$(a, b) := \{a + ib \mid i \in \mathbb{N}_0\}.$$

Через $T(n)$ обозначаем множество

$$T(n) := \mathbb{N} \setminus ((n-2, n) \cup (n, n)).$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Через $L(n)$ обозначаем минимальное количество арифметических прогрессий, на которые можно разбить множество $T(n)$.

Множество $X \subseteq \mathbb{N}$ называем *опорным семейством для множества* $Y \subseteq \mathbb{N}$, если для любых $x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2$ выполнено

$$(x_1, x_2 - x_1) \cap Y \neq \emptyset.$$

Теорема 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \ldots p_t^{a_t}$ — разложение числа n на простые множители и $p_1 < p_2 < \ldots < p_t$. Тогда в зависимости от случаев*

$$L(n) = 2a_1 - 3, \quad p_1 = 2, t = 1;$$

$$L(n) = (2a_2 - 1)(p_2 - 1) + (2a_1 - 2), \quad p_1 = 2, t = 2;$$

$$L(n) = (2a_2 - 1)(p_2 - 1) + \ldots + (2a_t - 1)(p_t - 1) + 1, \quad p_1 = 2, t > 2, a_1 = 1;$$

$$L(n) = (2a_2 - 1)(p_2 - 1) + \ldots + (2a_t - 1)(p_t - 1) + (2a_1 - 2), \quad p_1 = 2, t > 2, a_1 > 1;$$

$$L(n) = (2a_1 - 1)(p_1 - 1) - 1, \quad p_1 > 2, t = 1;$$

$$L(n) = (2a_1 - 1)(p_1 - 1) + \ldots + (2a_t - 1)(p_t - 1), \quad p_1 > 2, t > 1.$$

Доказательство вспомогательных утверждений

Лемма 1. Для любых $a, c \in \mathbb{N}_0$ и $b, d \in \mathbb{N}$ верно

$$(a, b) \cap (c, d) \neq \emptyset \Longleftrightarrow a \equiv c \ (mod \text{ НОД}(b, d)).$$

Доказательство леммы см. в [1].

Лемма 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $X \subseteq T(n)$, $Y = (n-2, n) \cup (n, n)$ и X - опорное семейство для Y. Тогда

$$L(n) \geqslant |X|.$$

Доказательство.

В любом разбиении множества $T(n)$ на арифметические прогрессии ни в какой из прогрессий не будет одновременно два числа из опорного семейства. В самом деле, если бы это было не так, то тогда для некоторых чисел $x_1, x_2 \in X$ прогрессия $(x_1, x_2 - x_1)$ лежала бы целиком в какой-то прогрессии разбиения и при этом пересекалась бы с множеством Y. Но ни одна из прогрессий разбиения с Y пересекаться не будет, так как

$$T(n) = \mathbb{N} \setminus ((n-2, n) \cup (n, n)).$$

Лемма доказана.

Доказательство основного утверждения

Теорема 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \ldots p_t^{a_t}$ — разложение числа n на простые множители и $p_1 < p_2 < \ldots < p_t$. Тогда в зависимости от случаев*

$$L(n) = 2a_1 - 3, \quad p_1 = 2, t = 1;$$

$$L(n) = (2a_2 - 1)(p_2 - 1) + (2a_1 - 2), \quad p_1 = 2, t = 2;$$

$$L(n) = (2a_2 - 1)(p_2 - 1) + \ldots + (2a_t - 1)(p_t - 1) + 1, \quad p_1 = 2, t > 2, a_1 = 1;$$

$$L(n) = (2a_2-1)(p_2-1)+\ldots+(2a_t-1)(p_t-1)+(2a_1-2), \quad p_1 = 2, t > 2, a_1 > 1;$$

$$L(n) = (2a_1 - 1)(p_1 - 1) - 1, \quad p_1 > 2, t = 1;$$

$$L(n) = (2a_1 - 1)(p_1 - 1) + \ldots + (2a_t - 1)(p_t - 1), \quad p_1 > 2, t > 1.$$

Доказательство.

Пусть $p_1 = 2, t = 1$. Докажем тогда, что

$$L(n) = L(2^{a_1}) = 2a_1 - 3.$$

Сначала представим $T(n)$ в виде объединения $2a_1 - 3$ арифметических прогрессий. Это можно сделать следующим образом:

$$T(n) = (1,2) \cup (2,8) \cup (4,8) \cup \ldots \cup (2^{a_1-1} - 2, 2^{a_1}) \cup (2^{a_1-1}, 2^{a_1}) =$$

$$= (1,2) \cup ((2,8) \cup \ldots \cup (2^{a_1-1} - 2, 2^{a_1})) \cup ((4,8) \cup \ldots \cup (2^{a_1-1}, 2^{a_1})).$$

Видно, что здесь $1 + (a_1 - 2) + (a_1 - 2) = 2a_1 - 3$ прогрессий. И множество

$$(4,8) \cup \ldots \cup (2^{a_1-1}, 2^{a_1})$$

покрывает все четные числа, делящиеся на 4, но не дающие остатка 0 по модулю 2^{a_1}. А множество

$$(2,8) \cup \ldots \cup (2^{a_1-1} - 2, 2^{a_1})$$

покрывает все четные числа, не делящиеся на 4 и не дающие остатка $2^{a_1} - 2$ по модулю 2^{a_1}. Поэтому

$$L(2^{a_1}) \leqslant 2a_1 - 3.$$

Покажем, что

$$L(2^{a_1}) \geqslant 2a_1 - 3.$$

Рассмотрим множества

$$X_1 := \{1\},$$

$$X_2 := \{2, 6, 14, \ldots, 2^{a_1-1} - 2\},$$

$$X_3 := \{4, 8, 16, \ldots, , 2^{a_1-1}\},$$

$$Y := (2^{a_1} - 2, 2^{a_1}) \cup (2^{a_1}, 2^{a_1}).$$

Покажем, что множество

$$X := X_1 \cup X_2 \cup X_3$$

будет опорным семейством для множества Y. Пусть $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$. Нужно доказать, что выполнено хотя бы одно из двух условий:

$$(x_1, x_2 - x_1) \cap (2^{a_1} - 2, 2^{a_1}) \neq \emptyset, \tag{1}$$

$$(x_1, x_2 - x_1) \cap (2^{a_1}, 2^{a_1}) \neq \emptyset. \tag{2}$$

Возможны случаи:

Случай 1.

$x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, 2^{a_1}) = 1$ и по лемме 1 верно (1).
Случай 2.
$x_1 \in X_1, x_2 \in X_3$. Случай аналогичен предыдущему.
Случай 3.
$x_1 \in X_2, x_2 \in X_2$. Пусть

$$x_1 = 2^{d_1} - 2,\ x_2 = 2^{d_2} - 2.$$

Тогда НОД$(x_2 - x_1, 2^{a_1}) = 2^{d_1}$ и по лемме 1 верно (1).
Случай 4.
$x_1 \in X_2, x_2 \in X_3$. Пусть

$$x_1 = 2^{d_1} - 2,\ x_2 = 2^{d_2}.$$

Тогда НОД$(x_2 - x_1, 2^{a_1}) = 2$ и по лемме 1 верно (1).
Случай 5.
$x_1 \in X_3, x_2 \in X_2$. Случай аналогичен предыдущему.
Случай 6.
$x_1 \in X_3, x_2 \in X_3$. Пусть

$$x_1 = 2^{d_1},\ x_2 = 2^{d_2}.$$

Тогда НОД$(x_2 - x_1, 2^{a_1}) = 2^{d_1}$ и по лемме 1 верно (2).
Разбор случаев завершен. Мы показали, что множество X будет опорным семейством для Y. Но в множестве X всего

$$|X_1| + |X_2| + |X_3| = 1 + (a_1 - 2) + (a_1 - 2)$$

элементов. Поэтому по лемме 2 получаем $L(2^{a_1}) \geqslant 2a_1 - 3$. В случае, когда $p_1 = 2, t = 1$, утверждение теоремы доказано.

Пусть $p_1 = 2, t = 2$. Докажем тогда, что

$$L(n) = L(2^{a_1} p_2^{a_2}) = (2a_2 - 1)(p_2 - 1) + (2a_1 - 2).$$

Здесь возможны два варианта:

$$1) a_1 = 1; \qquad 2) a_1 > 1.$$

В первом варианте для доказательства верхней оценки нужно представить $T(n)$ в виде объединения $(2a_2 - 1)(p_2 - 1)$ арифметических прогрессий. Это можно сделать следующим образом:

$$T(n) = (1, 2) \cup ((2, 2p_2) \cup (4, 2p_2) \cup (6, 2p_2) \cup \ldots \cup (2p_2 - 4, 2p_2)) \cup$$

$$\cup((2p_2-2,2p_2^2)\cup(4p_2-2,2p_2^2)\cup(6p_2-2,2p_2^2)\cup\ldots\cup((2p_2-2)p_2-2,2p_2^2))\cup$$
$$\cup((2p_2^2-2,2p_2^3)\cup(4p_2^2-2,2p_2^3)\cup(6p_2^2-2,2p_2^3)\cup\ldots\cup((2p_2-2)p_2^2-2,2p_2^3))\cup$$
$$\cup\ldots\cup((2p_2^{a_2-1}-2,2p_2^{a_2})\cup(4p_2^{a_2-1}-2,2p_2^{a_2})\cup(6p_2^{a_2-1}-2,2p_2^{a_2})\cup$$
$$\cup\ldots\cup((2p_2-2)p_2^{a_2-1}-2,2p_2^{a_2}))\cup$$
$$\cup((2p_2,2p_2^2)\cup(4p_2,2p_2^2)\cup(6p_2,2p_2^2)\cup\ldots\cup((2p_2-2)p_2,2p_2^2))\cup$$
$$\cup((2p_2^2,2p_2^3)\cup(4p_2^2,2p_2^3)\cup(6p_2^2,2p_2^3)\cup\ldots\cup((2p_2-2)p_2^2,2p_2^3))\cup\ldots\cup$$
$$\cup((2p_2^{a_2-1},2p_2^{a_2})\cup(4p_2^{a_2-1},2p_2^{a_2})\cup(6p_2^{a_2-1},2p_2^{a_2})\cup\ldots\cup((2p_2-2)p_2^{a_2-1},2p_2^{a_2})).$$

Видно, что здесь $1+(p_2-2)+2(a_1-1)(p_2-1)=(2a_2-1)(p_2-1)$ прогрессий. Множество

$$(2,2p_2)\cup(4,2p_2)\cup(6,2p_2)\cup\ldots\cup(2p_2-4,2p_2)$$

покрывает все четные числа, не дающие остатков 0 и p_2-2 по модулю p_2. Множество

$$((2p_2-2,2p_2^2)\cup(4p_2-2,2p_2^2)\cup(6p_2-2,2p_2^2)\cup\ldots\cup((2p_2-2)p_2-2,2p_2^2))\cup$$
$$\cup((2p_2^2-2,2p_2^3)\cup(4p_2^2-2,2p_2^3)\cup(6p_2^2-2,2p_2^3)\cup\ldots\cup((2p_2-2)p_2^2-2,2p_2^3))\cup$$
$$\cup\ldots\cup((2p_2^{a_2-1}-2,2p_2^{a_2})\cup(4p_2^{a_2-1}-2,2p_2^{a_2})\cup$$
$$\cup(6p_2^{a_2-1}-2,2p_2^{a_2})\cup\ldots\cup((2p_2-2)p_2^{a_2-1}-2,2p_2^{a_2}))$$

покрывает все четные числа, дающие остаток p_2-2 по модулю p_2 и не дающие остатка $p_2^{a_2}-2$ по модулю $p_2^{a_2}$. И множество

$$((2p_2,2p_2^2)\cup(4p_2,2p_2^2)\cup(6p_2,2p_2^2)\cup\ldots\cup((2p_2-2)p_2,2p_2^2))\cup$$
$$\cup((2p_2^2,2p_2^3)\cup(4p_2^2,2p_2^3)\cup(6p_2^2,2p_2^3)\cup\ldots\cup((2p_2-2)p_2^2,2p_2^3))\cup\ldots\cup$$
$$\cup((2p_2^{a_2-1},2p_2^{a_2})\cup(4p_2^{a_2-1},2p_2^{a_2})\cup(6p_2^{a_2-1},2p_2^{a_2})\cup\ldots\cup((2p_2-2)p_2^{a_2-1},2p_2^{a_2}))$$

покрывает все четные числа, дающие остаток 0 по модулю p_2 и не дающие остатка 0 по модулю $p_2^{a_2}$. Поэтому

$$L(2p_2^{a_2})\leqslant(2a_2-1)(p_2-1).$$

Для доказательства нижней оценки введем обозначения

$$X_1:=\{p_2^{a_2}\},$$

$$X_2 := \{2, 4, 6, \ldots, 2(p_2 - 2)\},$$
$$X_3^1 := \{2p_2 - 2, 4p_2 - 2, 6p_2 - 2, \ldots, 2(p_2 - 1)p_2 - 2\},$$
$$X_3^2 := \{2p_2^2 - 2, 4p_2^2 - 2, 6p_2^2 - 2, \ldots, 2(p_2 - 1)p_2^2 - 2\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X_3^{a_2-1} := \{2p_2^{a_2-1} - 2, 4p_2^{a_2-1} - 2, 6p_2^{a_2-1} - 2, \ldots, 2(p_2 - 1)p_2^{a_2-1} - 2\},$$
$$X_4^1 := \{2p_2, 4p_2, 6p_2, \ldots, 2(p_2 - 1)p_2\},$$
$$X_4^2 := \{2p_2^2, 4p_2^2, 6p_2^2, \ldots, 2(p_2 - 1)p_2^2\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X_4^{a_2-1} := \{2p_2^{a_2-1}, 4p_2^{a_2-1}, 6p_2^{a_2-1}, \ldots, 2(p_2 - 1)p_2^{a_2-1}\},$$
$$Y := (2p_2^{a_2} - 2, 2p_2^{a_2}) \cup (2p_2^{a_2}, 2p_2^{a_2})$$

и покажем, что множество

$$X := X_1 \cup X_2 \cup X_3^1 \cup \ldots \cup X_3^{a_2-1} \cup X_4^1 \cup \ldots \cup X_4^{a_2-1}$$

будет опорным семейством для множества Y. Нужно доказать, что выполнено хотя бы одно из двух условий:

$$(x_1, x_2 - x_1) \cap (2p_2^{a_2} - 2, 2p_2^{a_2}) \neq \emptyset, \tag{3}$$

$$(x_1, x_2 - x_1) \cap (2p_2^{a_2}, 2p_2^{a_2}) \neq \emptyset. \tag{4}$$

Пусть $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$. Возможны случаи:
Случай 1.
$x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ или $x_2 \in X_1, x_1 \in X_2$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, 2p_2^{a_2}) = 1$ и по лемме 1 верно (3).
Случай 2.
$x_1 \in X_1, x_2 \in X_3^i$ или $x_2 \in X_1, x_1 \in X_3^i$. Случай аналогичен предыдущему.
Случай 3.
$x_1 \in X_1, x_2 \in X_4^i$ или $x_2 \in X_1, x_1 \in X_4^i$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, 2p_2^{a_2}) = p_2^i$ и по лемме 1 верно (4).
Случай 4.
$x_1 \in X_2, x_2 \in X_2$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, 2p_2^{a_2}) = 2$ и по лемме 1 верно (3).
Случай 5.
$x_1 \in X_2, x_2 \in X_3^i$ или $x_2 \in X_2, x_1 \in X_3^i$. Случай аналогичен предыдущему.
Случай 6.

$x_1 \in X_2, x_2 \in X_4^i$ или $x_2 \in X_2, x_1 \in X_4^i$. Случай аналогичен предыдущему.
Случай 7.
$x_1 \in X_3^i, x_2 \in X_3^i$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, 2p_2^{a_2}) = 2p_2^i$ и по лемме 1 верно (3).
Случай 8.
$x_1 \in X_3^i, x_2 \in X_3^j, i < j$. Случай аналогичен предыдущему.
Случай 9.
$x_1 \in X_3^i, x_2 \in X_3^j, i > j$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, 2p_2^{a_2}) = 2p_2^j$ и по лемме 1 верно (3).
Случай 10.
$x_1 \in X_3^i, x_2 \in X_4^j$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, 2p_2^{a_2}) = 2$ и по лемме 1 верно (3).
Случай 11.
$x_1 \in X_4^i, x_2 \in X_4^i$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, 2p_2^{a_2}) = 2p_2^i$ и по лемме 1 верно (4).
Случай 12.
$x_1 \in X_4^i, x_2 \in X_4^j, i < j$. Случай аналогичен предыдущему.
Случай 13.
$x_1 \in X_4^i, x_2 \in X_4^j, i > j$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, 2p_2^{a_2}) = 2p_2^j$ и по лемме 1 верно (4).
Разбор случаев завершен. Мы показали, что множество X будет опорным семейством для Y. Но в множестве X всего

$$|X_1| + |X_2| + |X_3^1| + \ldots + |X_3^{a_2-1}| + |X_4^1| + \ldots + |X_4^{a_2-1}| =$$

$$= 1 + (p_2 - 2) + 2(a_2 - 1)(p_2 - 1) = (2a_2 - 1)(p_2 - 1)$$

элементов. Поэтому по лемме 2 получаем $L(2p_2^{a_2}) \geqslant (2a_2 - 1)(p_2 - 1)$.
Во втором варианте для доказательства верхней оценки нужно представить $T(n)$ в виде объединения $(2a_2-1)(p_2-1)+(2a_1-2)$ арифметических прогрессий. Это можно сделать следующим образом:

$$T(n) = (1, 2) \cup ((2, 2p_2) \cup (4, 2p_2) \cup (6, 2p_2) \cup \ldots \cup (2p_2 - 4, 2p_2))\cup$$

$$\cup((4p_2 - 2, 8p_2) \cup (8p_2 - 2, 16p_2) \cup \ldots \cup ((2^{a_1-1}p_2 - 2, 2^{a_1}p_2))\cup$$

$$\cup((2^{a_1}p_2 - 2, 2^{a_1}p_2^2) \cup (2^{a_1}p_2^2 - 2, 2^{a_1}p_2^3) \cup \ldots \cup (2^{a_1}p_2^{a_2-1} - 2, 2^{a_1}p_2^{a_2}))\cup$$

$$\cup((2 \cdot 2^{a_1}p_2 - 2, 2^{a_1}p_2^2) \cup (2 \cdot 2^{a_1}p_2^2 - 2, 2^{a_1}p_2^3) \cup \ldots \cup$$

$$\cup(2 \cdot 2^{a_1}p_2^{a_2-1} - 2, 2^{a_1}p_2^{a_2})) \cup \ldots \cup (((p_2 - 1)2^{a_1}p_2 - 2, 2^{a_1}p_2^2)\cup$$

$$\cup((p_2 - 1)2^{a_1}p_2^2 - 2, 2^{a_1}p_2^3) \cup \ldots \cup ((p_2 - 1)2^{a_1}p_2^{a_2-1} - 2, 2^{a_1}p_2^{a_2}))\cup$$

$$\cup((4p_2, 8p_2) \cup (8p_2, 16p_2) \cup \ldots \cup ((2^{a_1-1}p_2, 2^{a_1}p_2))\cup$$

$$\cup((2^{a_1}p_2, 2^{a_1}p_2^2) \cup (2^{a_1}p_2^2, 2^{a_1}p_2^3) \cup \ldots \cup (2^{a_1}p_2^{a_2-1}, 2^{a_1}p_2^{a_2}))\cup$$
$$\cup((2 \cdot 2^{a_1}p_2, 2^{a_1}p_2^2) \cup (2 \cdot 2^{a_1}p_2^2, 2^{a_1}p_2^3) \cup \ldots \cup (2 \cdot 2^{a_1}p_2^{a_2-1}, 2^{a_1}p_2^{a_2}))\cup$$
$$\cup \ldots \cup (((p_2-1)2^{a_1}p_2, 2^{a_1}p_2^2) \cup ((p_2-1)2^{a_1}p_2^2, 2^{a_1}p_2^3)\cup$$
$$\cup \ldots \cup ((p_2-1)2^{a_1}p_2^{a_2-1}, 2^{a_1}p_2^{a_2})) \cup ((2p_2-2, 4p_2) \cup (2p_2, 4p_2)).$$

Видно, что здесь

$$1 + (p_2 - 2) + 2(a_1 - 2) + 2(a_1 - 1)(p_2 - 1) + 2 =$$
$$= (2a_2 - 1)(p_2 - 1) + (2a_1 - 2)$$

прогрессий. Множество

$$(2, 2p_2) \cup (4, 2p_2) \cup (6, 2p_2) \cup \ldots \cup (2p_2 - 4, 2p_2)$$

покрывает все четные числа, не дающие остатков 0 и $p_2 - 2$ по модулю p_2. Множество

$$((4p_2 - 2, 8p_2) \cup (8p_2 - 2, 16p_2) \cup \ldots \cup ((2^{a_1-1}p_2 - 2, 2^{a_1}p_2))\cup$$
$$\cup((2^{a_1}p_2 - 2, 2^{a_1}p_2^2) \cup (2^{a_1}p_2^2 - 2, 2^{a_1}p_2^3) \cup \ldots \cup (2^{a_1}p_2^{a_2-1} - 2, 2^{a_1}p_2^{a_2}))\cup$$
$$\cup((2 \cdot 2^{a_1}p_2 - 2, 2^{a_1}p_2^2) \cup (2 \cdot 2^{a_1}p_2^2 - 2, 2^{a_1}p_2^3) \cup \ldots \cup (2 \cdot 2^{a_1}p_2^{a_2-1} - 2, 2^{a_1}p_2^{a_2}))\cup$$
$$\cup \ldots \cup (((p_2-1)2^{a_1}p_2 - 2, 2^{a_1}p_2^2) \cup ((p_2-1)2^{a_1}p_2^2 - 2, 2^{a_1}p_2^3)\cup$$
$$\cup \ldots \cup ((p_2-1)2^{a_1}p_2^{a_2-1} - 2, 2^{a_1}p_2^{a_2}))$$

покрывает все числа, дающие остаток 2 по модулю 4, дающие остаток $p_2 - 2$ по модулю p_2 и не дающие остатка $2^{a_1}p_2^{a_2} - 2$ по модулю $2^{a_1}p_2^{a_2}$. И множество

$$((4p_2, 8p_2) \cup (8p_2, 16p_2) \cup \ldots \cup ((2^{a_1-1}p_2, 2^{a_1}p_2))\cup$$
$$\cup((2^{a_1}p_2, 2^{a_1}p_2^2) \cup (2^{a_1}p_2^2, 2^{a_1}p_2^3) \cup \ldots \cup (2^{a_1}p_2^{a_2-1}, 2^{a_1}p_2^{a_2}))\cup$$
$$\cup((2 \cdot 2^{a_1}p_2, 2^{a_1}p_2^2) \cup (2 \cdot 2^{a_1}p_2^2, 2^{a_1}p_2^3) \cup \ldots \cup (2 \cdot 2^{a_1}p_2^{a_2-1}, 2^{a_1}p_2^{a_2}))\cup$$
$$\cup \ldots \cup (((p_2-1)2^{a_1}p_2, 2^{a_1}p_2^2) \cup ((p_2-1)2^{a_1}p_2^2, 2^{a_1}p_2^3)\cup$$
$$\cup \ldots \cup ((p_2-1)2^{a_1}p_2^{a_2-1}, 2^{a_1}p_2^{a_2})))$$

покрывает все числа, дающие остаток 0 по модулю 4, дающие остаток 0 по модулю p_2 и не дающие остатка 0 по модулю $2^{a_1}p_2^{a_2}$. Множество

$$(2p_2 - 2, 4p_2)$$

покрывает все числа, дающие остаток 0 по модулю 4 и дающие остаток $p_2 - 2$ по модулю p_2. Наконец, множество

$$(2p_2, 4p_2)$$

покрывает все числа, дающие остаток 2 по модулю 4 и дающие остаток 0 по модулю p_2. Поэтому

$$L(2p_2^{a_2}) \leqslant (2a_2 - 1)(p_2 - 1) + (2a_1 - 2).$$

Для доказательства нижней оценки введем обозначения

$$X_1 := \{p_2^{a_2}\},$$

$$X_2 := \{4p_2^{a_2} - 2, 8p_2^{a_2} - 2, \ldots, 2^{a_1 - 1}p_2^{a_2} - 2\},$$
$$X_3 := \{4p_2^{a_2}, 8p_2^{a_2}, \ldots, 2^{a_1 - 1}p_2^{a_2}\},$$
$$X_4^1 := \{2^{a_1}p_2 - 2, 2 \cdot 2^{a_1}p_2 - 2, \ldots, (a_2 - 1)2^{a_1}p_2 - 2\},$$
$$X_4^2 := \{2^{a_1}p_2^2 - 2, 2 \cdot 2^{a_1}p_2^2 - 2, \ldots, (a_2 - 1)2^{a_1}p_2^2 - 2\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_4^{a_2-1} := \{2^{a_1}p_2^{a_2-1} - 2, 2 \cdot 2^{a_1}p_2^{a_2-1} - 2, \ldots, (a_2 - 1)2^{a_1}p_2^{a_2-1} - 2\},$$
$$X_5^1 := \{2^{a_1}p_2, 2 \cdot 2^{a_1}p_2, \ldots, (a_2 - 1)2^{a_1}p_2\},$$
$$X_5^2 := \{2^{a_1}p_2^2, 2 \cdot 2^{a_1}p_2^2, \ldots, (a_2 - 1)2^{a_1}p_2^2\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_5^{a_2-1} := \{2^{a_1}p_2^{a_2-1}, 2 \cdot 2^{a_1}p_2^{a_2-1}, \ldots, (a_2 - 1)2^{a_1}p_2^{a_2-1}\},$$
$$X_6 := \{a, b, c_1, \ldots, c_{p_2-3}, c_{p_2-1}\},$$
$$Y := (2^{a_2}p_2^{a_2} - 2, 2^{a_2}p_2^{a_2}) \cup (2^{a_2}p_2^{a_2}, 2^{a_2}p_2^{a_2}),$$

где $a \equiv 0 \ mod \ 2^{a_1}$, $a \equiv -2 \ mod \ p_2^{a_2}$, $b \equiv -2 \ mod \ 2^{a_1}$, $b \equiv 0 \ mod \ p_2^{a_2}$, $c_i \equiv 0 \ mod \ 2^{a_1}$, $c_i \equiv i \ mod \ p_2^{a_2}$. Покажем, что множество

$$X := X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4^1 \cup \ldots \cup X_4^{a_2-1} \cup X_5^1 \cup \ldots \cup X_5^{a_2-1} \cup X_6$$

будет опорным семейством для множества Y. Пусть $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$. Нужно доказать, что выполнено хотя бы одно из двух условий:

$$(x_1, x_2 - x_1) \cap (2^{a_1}p_2^{a_2} - 2, 2^{a_1}p_2^{a_2}) \neq \emptyset, \tag{5}$$

$$(x_1, x_2 - x_1) \cap (2^{a_1} p_2^{a_2}, 2^{a_1} p_2^{a_2}) \neq \emptyset. \tag{6}$$

Возможны случаи:

Случай 1.

$x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ или $x_2 \in X_1, x_1 \in X_2$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, 2^{a_1} p_2^{a_2}) = 1$ и по лемме 1 верно (5).

Случай 2.

$x_1 \in X_1, x_2 \in X_3$ или $x_2 \in X_1, x_1 \in X_3$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, 2^{a_1} p_2^{a_2}) = p_2^{a_2}$ и по лемме 1 верно (6).

Случай 3.

$x_1 \in X_1, x_2 \in X_4^i$ или $x_2 \in X_1, x_1 \in X_4^i$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, 2^{a_1} p_2^{a_2}) = 1$ и по лемме 1 верно (5).

Случай 4.

$x_1 \in X_1, x_2 \in X_5^i$ или $x_2 \in X_1, x_1 \in X_5^i$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, 2^{a_1} p_2^{a_2}) = p_2^i$ и по лемме 1 верно (6).

Случай 5.

$x_1 \in X_1, x_2 = a$ или $x_2 \in X_1, x_1 = a$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, 2^{a_1} p_2^{a_2}) = 1$ и по лемме 1 верно (5).

Случай 6.

$x_1 \in X_1, x_2 = b$ или $x_2 \in X_1, x_1 = b$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, 2^{a_1} p_2^{a_2}) = p_2^{a_2}$ и по лемме 1 верно (6).

Случай 7.

$x_1 \in X_1, x_2 = c_i$ или $x_2 \in X_1, x_1 = c_i$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, 2^{a_1} p_2^{a_2}) = 1$ и по лемме 1 верно (5).

Случай 8.

$x_1 \in X_2, x_2 \in X_2$, то есть $x_1 = 2^{i_1} p_2^{a_2} - 2$, $x_2 = 2^{i_2} p_2^{a_2} - 2$. Тогда верно НОД$(x_2 - x_1, 2p_2^{a_2}) = 2^{i_1} p_2^{a_2}$ и по лемме 1 получаем (5).

Случай 9.

$x_1 \in X_2, x_2 \in X_3$ или $x_2 \in X_2, x_1 \in X_3$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, 2^{a_1} p_2^{a_2}) = 2$ и по лемме 1 верно (5).

Случай 10.

$x_1 \in X_2, x_2 \in X_4^i$ или $x_2 \in X_2, x_1 \in X_4^i$. Пусть элемент из X_2 равен $2^j p_2^{a_2} - 2$. Тогда имеет место НОД$(x_2 - x_1, 2^{a_1} p_2^{a_2}) = 2^j p_2^i$ и по лемме 1 верно (5).

Случай 11.

$x_1 \in X_2, x_2 \in X_5^i$ или $x_2 \in X_2, x_1 \in X_5^i$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, 2^{a_1} p_2^{a_2}) = 2$ и по лемме 1 верно (5).

Случай 12.

$x_1 \in X_2, x_2 = a$ или $x_2 \in X_2, x_1 = a$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, 2^{a_1} p_2^{a_2}) = 2p_2^{a_2}$ и по лемме 1 верно (5).

Случай 13.

$x_1 \in X_2, x_2 = b$ или $x_2 \in X_2, x_1 = b$. Пусть элемент из X_2 равен $2^j p_2^{a_2} - 2$. Тогда имеет место НОД$(x_2 - x_1, 2^{a_1} p_2^{a_2}) = 2^j$ и по лемме 1 верно (5).

Случай 14.

$x_1 \in X_2, x_2 = c_i$ или $x_2 \in X_2, x_1 = c_i$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, 2^{a_1} p_2^{a_2}) = 2$ и по лемме 1 верно (5).

Случай 15.

$x_1 \in X_3, x_2 \in X_3$, то есть $x_1 = 2^{i_1} p_2^{a_2}$, $x_2 = 2^{i_2} p_2^{a_2}$. Тогда верно, что НОД$(x_2 - x_1, 2p_2^{a_2}) = 2^{i_1} p_2^{a_2}$ и по лемме 1 получаем (6).

Случай 16.

$x_1 \in X_3, x_2 \in X_4^i$ или $x_2 \in X_3, x_1 \in X_4^i$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, 2^{a_1} p_2^{a_2}) = 2$ и по лемме 1 верно (5).

Случай 17.

$x_1 \in X_3, x_2 \in X_5^i$ или $x_2 \in X_3, x_1 \in X_5^i$. Пусть элемент из X_3 равен $2^j p_2^{a_2}$. Тогда имеет место НОД$(x_2 - x_1, 2^{a_1} p_2^{a_2}) = 2^j p_2^i$ и по лемме 1 верно (6).

Случай 18.

$x_1 \in X_3, x_2 = a$ или $x_2 \in X_3, x_1 = a$. Пусть элемент из X_3 равен $2^j p_2^{a_2}$. Тогда имеет место равенство НОД$(x_2 - x_1, 2^{a_1} p_2^{a_2}) = 2^j$ и по лемме 1 верно (6).

Случай 19.

$x_1 \in X_3, x_2 = b$ или $x_2 \in X_3, x_1 = b$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, 2^{a_1} p_2^{a_2}) = 2p_2^{a_2}$ и по лемме 1 верно (6).

Случай 20.

$x_1 \in X_3, x_2 = c_i$ или $x_2 \in X_3, x_1 = c_i$. Пусть элемент из X_3 равен $2^j p_2^{a_2}$. Тогда имеет место равенство НОД$(x_2 - x_1, 2^{a_1} p_2^{a_2}) = 2^j$ и по лемме 1 верно (6).

Случай 21.

$x_1 \in X_4^i, x_2 \in X_4^i$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, 2^{a_1} p_2^{a_2}) = 2^{a_1} p_2^i$ и по лемме 1 верно (5).

Случай 22.

$x_1 \in X_4^i, x_2 \in X_4^j, i < j$. Случай аналогичен предыдущему.

Случай 23.

$x_1 \in X_4^i, x_2 \in X_4^j, i > j$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, 2^{a_1} p_2^{a_2}) = 2^{a_1} p_2^j$ и по лемме 1 верно (5).

Случай 24.

$x_1 \in X_4^i, x_2 \in X_5^j$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, 2^{a_1} p_2^{a_2}) = 2$ и по лемме 1 верно (5).

Случай 25.

$x_1 \in X_4^i, x_2 = a$ или $x_2 \in X_4^i, x_1 = a$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, 2^{a_1}p_2^{a_2}) = 2p_2^i$ и по лемме 1 верно (5).
Случай 26.
$x_1 \in X_4^i, x_2 = b$ или $x_2 \in X_4^i, x_1 = b$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, 2^{a_1}p_2^{a_2}) = 2^{a_1}$ и по лемме 1 верно (5).
Случай 27.
$x_1 \in X_4^i, x_2 = c_i$ или $x_2 \in X_4^i, x_1 = c_i$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, 2^{a_1}p_2^{a_2}) = 2$ и по лемме 1 верно (5).
Случай 28.
$x_1 \in X_5^i, x_2 \in X_5^i$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, 2^{a_1}p_2^{a_2}) = 2^{a_1}p_2^i$ и по лемме 1 верно (6).
Случай 29.
$x_1 \in X_5^i, x_2 \in X_5^j, i < j$. Случай аналогичен предыдущему.
Случай 30. $x_1 \in X_5^i, x_2 \in X_5^j, i > j$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, 2^{a_1}p_2^{a_2}) = 2^{a_1}p_2^j$ и по лемме 1 верно (6).
Случай 31.
$x_1 \in X_5^i, x_2 = a$ или $x_2 \in X_5^i, x_1 = a$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, 2^{a_1}p_2^{a_2}) = 2^{a_1}$ и по лемме 1 верно (6).
Случай 32.
$x_1 \in X_5^i, x_2 = b$ или $x_2 \in X_5^i, x_1 = b$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, 2^{a_1}p_2^{a_2}) = 2p_2^i$ и по лемме 1 верно (6).
Случай 33.
$x_1 \in X_5^i, x_2 = c_i$ или $x_2 \in X_5^i, x_1 = c_i$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, 2^{a_1}p_2^{a_2}) = 2^{a_1}$ и по лемме 1 верно (6).
Случай 34.
$x_1 = a, x_2 = b$ или $x_2 = a, x_1 = b$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, 2^{a_1}p_2^{a_2}) = 2$ и по лемме 1 верно (5).
Случай 35.
$x_1 = a, x_2 = c$ или $x_2 = a, x_1 = c$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, 2^{a_1}p_2^{a_2}) = 2^{a_1}$ и по лемме 1 верно (6).
Случай 36.
$x_1 = b, x_2 = c$ или $x_2 = b, x_1 = c$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, 2^{a_1}p_2^{a_2}) = 2$ и по лемме 1 верно (5).
Разбор случаев завершен. Мы показали, что множество X будет опорным семейством для Y. Но в множестве X всего

$$|X_1| + |X_2| + |X_3| + |X_4^1| + \ldots + |X_4^{a_2-1}| + |X_5^1| + \ldots + |X_5^{a_2-1}| + |X_6| =$$

$$= 1 + 2(a_1 - 2) + 2(a_2 - 1)(p_2 - 1) + 2 + (p_2 - 2) =$$

$$= (2a_2 - 1)(p_2 - 1) + 2(a_1 - 1)$$

элементов. Поэтому по лемме 2 получаем

$$L(2p_2^{a_2}) \geqslant (2a_2 - 1)(p_2 - 1) + 2(a_1 - 1).$$

В случае, когда $p_1 = 2, t = 2$, утверждение теоремы доказано.

Пусть $p_1 = 2, t > 2, a_1 = 1$. Докажем тогда, что

$$L(n) = L(2p_2^{a_2} \ldots p_t^{a_t}) = (2a_2 - 1)(p_2 - 1) + \ldots + (2a_t - 1)(p_t - 1) + 1.$$

для доказательства верхней оценки нужно представить $T(n)$ в виде объединения

$$(2a_2 - 1)(p_2 - 1) + \ldots + (2a_t - 1)(p_t - 1) + 1$$

арифметических прогрессий. Это можно сделать следующим образом:

$$T(n) = (1,2) \cup ((2,2p_2) \cup (4,2p_2) \cup (6,2p_2) \cup \ldots \cup (2p_2 - 4, 2p_2))\cup$$

$$\cup((2,2p_3) \cup (4,2p_3) \cup (6,2p_3) \cup \ldots \cup (2p_3 - 4, 2p_3)) \cup \ldots \cup$$

$$\cup((2,2p_t) \cup (4,2p_t) \cup (6,2p_t) \cup \ldots \cup (2p_t - 4, 2p_t))\cup$$

$$\cup((1 \cdot 2p_2p_3 \ldots p_t - 2, 2p_2^2p_3 \ldots p_t) \cup (2 \cdot 2p_2p_3 \ldots p_t - 2, 2p_2^2p_3 \ldots p_t)\cup$$

$$\cup \ldots \cup ((p_2 - 1) \cdot 2p_2p_3 \ldots p_t - 2, 2p_2^2p_3 \ldots p_t))\cup$$

$$\cup((1 \cdot 2p_2^2p_3 \ldots p_t - 2, 2p_2^3p_3 \ldots p_t) \cup (2 \cdot 2p_2^2p_3 \ldots p_t - 2, 2p_2^3p_3 \ldots p_t)\cup$$

$$\cup \ldots \cup ((p_2 - 1) \cdot 2p_2^2p_3 \ldots p_t - 2, 2p_2^3p_3 \ldots p_t))\cup$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cup((1 \cdot 2p_2^{a_2-1}p_3 \ldots p_t - 2, 2p_2^{a_2}p_3 \ldots p_t)\cup$$

$$\cup(2 \cdot 2p_2^{a_2-1}p_3 \ldots p_t - 2, 2p_2^{a_2}p_3 \ldots p_t) \cup \ldots \cup$$

$$\cup((p_2 - 1) \cdot 2p_2^{a_2-1}p_3 \ldots p_t - 2, 2p_2^{a_2}p_3 \ldots p_t))\cup$$

$$\cup((1 \cdot 2p_2^{a_2}p_3 \ldots p_t - 2, 2p_2^{a_2}p_3^2p_4 \ldots p_t)\cup$$

$$\cup(2 \cdot 2p_2^{a_2}p_3 \ldots p_t - 2, 2p_2^{a_2}p_3^2p_4 \ldots p_t)\cup$$

$$\cup \ldots \cup ((p_3 - 1) \cdot 2p_2^{a_2}p_3 \ldots p_t - 2, 2p_2^{a_2}p_3^2p_4 \ldots p_t))\cup$$

$$\cup((1 \cdot 2p_2^{a_2}p_3^2p_4 \ldots p_t - 2, 2p_2^{a_2}p_3^3p_4 \ldots p_t)\cup$$

$$\cup(2 \cdot 2p_2^{a_2}p_3^2p_4 \ldots p_t - 2, 2p_2^{a_2}p_3^3p_4 \ldots p_t)\cup$$

$$\cup \ldots \cup ((p_3 - 1) \cdot 2p_2^{a_2} p_3^2 p_4 \ldots p_t - 2, 2p_2^{a_2} p_3^3 p_4 \ldots p_t))\cup$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cup((1 \cdot 2p_2^{a_2} p_3^{a_3-1} p_4 \ldots p_t - 2, 2p_2^{a_2} p_3^{a_3} p_4 \ldots p_t)\cup$$

$$\cup(2 \cdot 2p_2^{a_2} p_3^{a_3-1} p_4 \ldots p_t - 2, 2p_2^{a_2} p_3^3 a_3 p_4 \ldots p_t)\cup$$

$$\cup \ldots \cup ((p_3 - 1) \cdot 2p_2^{a_2} p_3^{a_3-1} p_4 \ldots p_t - 2, 2p_2^{a_2} p_3^{a_3} p_4 \ldots p_t))\cup$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cup((1 \cdot 2p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t - 2, 2p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^2)\cup$$

$$\cup(2 \cdot 2p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t - 2, 2p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^2)\cup$$

$$\cup \ldots \cup ((p_t - 1) \cdot 2p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t - 2, 2p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^2))\cup$$

$$\cup((1 \cdot 2p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^2 - 2, 2p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^3)\cup$$

$$\cup(2 \cdot 2p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^2 - 2, 2p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^3)\cup$$

$$\cup \ldots \cup ((p_t - 1) \cdot 2p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^2 - 2, 2p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^3))\cup$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cup((1 \cdot 2p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^{a_t-1} - 2, 2p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^{a_t})\cup$$

$$\cup(2 \cdot 2p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^{a_t-1} - 2, 2p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^{a_t}) \cup \ldots \cup$$

$$\cup((p_t - 1) \cdot 2p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^{a_t-1} - 2, 2p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^{a_t}))\cup$$

$$\cup((1 \cdot 2p_2 p_3 \ldots p_t, 2p_2^2 p_3 \ldots p_t) \cup (2 \cdot 2p_2 p_3 \ldots p_t, 2p_2^2 p_3 \ldots p_t) \cup \ldots \cup$$

$$\cup((p_2 - 1) \cdot 2p_2 p_3 \ldots p_t, 2p_2^2 p_3 \ldots p_t))\cup$$

$$\cup((1 \cdot 2p_2^2 p_3 \ldots p_t, 2p_2^3 p_3 \ldots p_t) \cup (2 \cdot 2p_2^2 p_3 \ldots p_t, 2p_2^3 p_3 \ldots p_t)\cup$$

$$\cup \ldots \cup ((p_2 - 1) \cdot 2p_2^2 p_3 \ldots p_t, 2p_2^3 p_3 \ldots p_t))\cup$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cup((1 \cdot 2p_2^{a_2-1} p_3 \ldots p_t, 2p_2^{a_2} p_3 \ldots p_t)\cup$$

$$\cup(2 \cdot 2p_2^{a_2-1} p_3 \ldots p_t, 2p_2^{a_2} p_3 \ldots p_t)\cup$$

$$\cup \ldots \cup ((p_2 - 1) \cdot 2p_2^{a_2-1} p_3 \ldots p_t, 2p_2^{a_2} p_3 \ldots p_t))\cup$$

$$\cup((1 \cdot 2p_2^{a_2} p_3 \ldots p_t, 2p_2^{a_2} p_3^2 p_4 \ldots p_t)\cup$$

$$\cup(2 \cdot 2p_2^{a_2} p_3 \ldots p_t, 2p_2^{a_2} p_3^2 p_4 \ldots p_t)\cup$$

$$\cup \ldots \cup ((p_3 - 1) \cdot 2p_2^{a_2} p_3 \ldots p_t, 2p_2^{a_2} p_3^2 p_4 \ldots p_t))\cup$$

$$\cup((1\cdot 2p_2^{a_2}p_3^2p_4\dots p_t, 2p_2^{a_2}p_3^3p_4\dots p_t)\cup$$

$$\cup(2\cdot 2p_2^{a_2}p_3^2p_4\dots p_t, 2p_2^{a_2}p_3^3p_4\dots p_t)\cup$$

$$\cup\dots\cup((p_3-1)\cdot 2p_2^{a_2}p_3^2p_4\dots p_t, 2p_2^{a_2}p_3^3p_4\dots p_t))\cup$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\cup((1\cdot 2p_2^{a_2}p_3^{a_3-1}p_4\dots p_t, 2p_2^{a_2}p_3^{a_3}p_4\dots p_t)\cup$$

$$\cup(2\cdot 2p_2^{a_2}p_3^{a_3-1}p_4\dots p_t, 2p_2^{a_2}p_3^3a_3p_4\dots p_t)\cup$$

$$\cup\dots\cup((p_3-1)\cdot 2p_2^{a_2}p_3^{a_3-1}p_4\dots p_t, 2p_2^{a_2}p_3^{a_3}p_4\dots p_t))\cup$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\cup((1\cdot 2p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t, 2p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2)\cup$$

$$\cup(2\cdot 2p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t, 2p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2)\cup$$

$$\cup\dots\cup((p_t-1)\cdot 2p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t, 2p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2))\cup$$

$$\cup((1\cdot 2p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2, 2p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^3)\cup$$

$$\cup(2\cdot 2p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2, 2p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^3)\cup$$

$$\cup\dots\cup((p_t-1)\cdot 2p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2, 2p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^3))\cup$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\cup((1\cdot 2p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t-1}, 2p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t})\cup$$

$$\cup(2\cdot 2p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t-1}, 2p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t})\cup$$

$$\cup\dots\cup((p_t-1)\cdot 2p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t-1}, 2p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t}))\cup$$

$$\cup(2a_1, 2p_2p_t)\cup(2a_2, 2p_2p_3)\cup\dots\cup(2a_{t-1}, 2p_{t-1}p_t),$$

где при $i=1$ имеем $1\leqslant a_1\leqslant p_2p_t$, $a_1\equiv 0 \mod p_t$, $a_1\equiv -1 \mod p_2$ и при $2\leqslant i\leqslant t-1$ имеем $1\leqslant a_i\leqslant p_ip_{i+1}$, $a_i\equiv 0 \mod p_i$, $a_i\equiv -1 \mod p_{i+1}$. Здесь серия

$$((2,2p_2)\cup(4,2p_2)\cup(6,2p_2)\cup\dots\cup(2p_2-4,2p_2))\cup$$

$$\cup((2,2p_3)\cup(4,2p_3)\cup(6,2p_3)\cup\dots\cup(2p_3-4,2p_3))\cup\dots\cup$$

$$\cup((2,2p_t)\cup(4,2p_t)\cup(6,2p_t)\cup\dots\cup(2p_t-4,2p_t))$$

накрывает все четные числа, не сравнимые с 0 и -2 по модулям $p_2, \ldots, p_t$. Серия

$$((1 \cdot 2p_2p_3 \ldots p_t - 2, 2p_2^2p_3 \ldots p_t) \cup (2 \cdot 2p_2p_3 \ldots p_t - 2, 2p_2^2p_3 \ldots p_t) \cup$$
$$\cup \ldots \cup ((p_2 - 1) \cdot 2p_2p_3 \ldots p_t - 2, 2p_2^2p_3 \ldots p_t)) \cup$$
$$\cup((1 \cdot 2p_2^2p_3 \ldots p_t - 2, 2p_2^3p_3 \ldots p_t) \cup (2 \cdot 2p_2^2p_3 \ldots p_t - 2, 2p_2^3p_3 \ldots p_t) \cup$$
$$\cup \ldots \cup ((p_2 - 1) \cdot 2p_2^2p_3 \ldots p_t - 2, 2p_2^3p_3 \ldots p_t)) \cup$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\cup((1 \cdot 2p_2^{a_2-1}p_3 \ldots p_t - 2, 2p_2^{a_2}p_3 \ldots p_t) \cup$$
$$\cup(2 \cdot 2p_2^{a_2-1}p_3 \ldots p_t - 2, 2p_2^{a_2}p_3 \ldots p_t) \cup$$
$$\cup \ldots \cup ((p_2 - 1) \cdot 2p_2^{a_2-1}p_3 \ldots p_t - 2, 2p_2^{a_2}p_3 \ldots p_t)) \cup$$
$$\cup((1 \cdot 2p_2^{a_2}p_3 \ldots p_t - 2, 2p_2^{a_2}p_3^2p_4 \ldots p_t) \cup$$
$$\cup(2 \cdot 2p_2^{a_2}p_3 \ldots p_t - 2, 2p_2^{a_2}p_3^2p_4 \ldots p_t) \cup$$
$$\cup \ldots \cup ((p_3 - 1) \cdot 2p_2^{a_2}p_3 \ldots p_t - 2, 2p_2^{a_2}p_3^2p_4 \ldots p_t)) \cup$$
$$\cup((1 \cdot 2p_2^{a_2}p_3^2p_4 \ldots p_t - 2, 2p_2^{a_2}p_3^3p_4 \ldots p_t) \cup$$
$$\cup(2 \cdot 2p_2^{a_2}p_3^2p_4 \ldots p_t - 2, 2p_2^{a_2}p_3^3p_4 \ldots p_t) \cup$$
$$\cup \ldots \cup ((p_3 - 1) \cdot 2p_2^{a_2}p_3^2p_4 \ldots p_t - 2, 2p_2^{a_2}p_3^3p_4 \ldots p_t)) \cup$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\cup((1 \cdot 2p_2^{a_2}p_3^{a_3-1}p_4 \ldots p_t - 2, 2p_2^{a_2}p_3^{a_3}p_4 \ldots p_t) \cup$$
$$\cup(2 \cdot 2p_2^{a_2}p_3^{a_3-1}p_4 \ldots p_t - 2, 2p_2^{a_2}p_3^3a_3p_4 \ldots p_t) \cup$$
$$\cup \ldots \cup ((p_3 - 1) \cdot 2p_2^{a_2}p_3^{a_3-1}p_4 \ldots p_t - 2, 2p_2^{a_2}p_3^{a_3}p_4 \ldots p_t)) \cup$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\cup((1 \cdot 2p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t - 2, 2p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2) \cup$$
$$\cup(2 \cdot 2p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t - 2, 2p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2) \cup$$
$$\cup \ldots \cup ((p_t - 1) \cdot 2p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t - 2, 2p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2)) \cup$$
$$\cup((1 \cdot 2p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2 - 2, 2p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^3) \cup$$
$$\cup(2 \cdot 2p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2 - 2, 2p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^3) \cup \ldots \cup$$
$$\cup((p_t - 1) \cdot 2p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2 - 2, 2p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^3)) \cup$$

. . . .

$$\cup((1\cdot 2p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t-1}-2, 2p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t})\cup$$
$$\cup(2\cdot 2p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t-1}-2, 2p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t})\cup$$
$$\cup\dots\cup((p_t-1)\cdot 2p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t-1}-2, 2p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t}))$$

накрывает все четные числа, сравнимые с -2 по модулям $p_2,\dots,p_t$, но не сравнимые с -2 по модулю $2p_2^{a_2}\dots p_t^{a_t}$. Серия

$$((1\cdot 2p_2p_3\dots p_t, 2p_2^2p_3\dots p_t)\cup(2\cdot 2p_2p_3\dots p_t, 2p_2^2p_3\dots p_t)\cup$$
$$\cup\dots\cup((p_2-1)\cdot 2p_2p_3\dots p_t, 2p_2^2p_3\dots p_t))\cup$$
$$\cup((1\cdot 2p_2^2p_3\dots p_t, 2p_2^3p_3\dots p_t)\cup(2\cdot 2p_2^2p_3\dots p_t, 2p_2^3p_3\dots p_t)\cup$$
$$\cup\dots\cup((p_2-1)\cdot 2p_2^2p_3\dots p_t, 2p_2^3p_3\dots p_t))\cup$$

. . . .

$$\cup((1\cdot 2p_2^{a_2-1}p_3\dots p_t, 2p_2^{a_2}p_3\dots p_t)\cup$$
$$\cup(2\cdot 2p_2^{a_2-1}p_3\dots p_t, 2p_2^{a_2}p_3\dots p_t)\cup$$
$$\cup\dots\cup((p_2-1)\cdot 2p_2^{a_2-1}p_3\dots p_t, 2p_2^{a_2}p_3\dots p_t))\cup$$
$$\cup((1\cdot 2p_2^{a_2}p_3\dots p_t, 2p_2^{a_2}p_3^2p_4\dots p_t)\cup$$
$$\cup(2\cdot 2p_2^{a_2}p_3\dots p_t, 2p_2^{a_2}p_3^2p_4\dots p_t)\cup$$
$$\cup\dots\cup((p_3-1)\cdot 2p_2^{a_2}p_3\dots p_t, 2p_2^{a_2}p_3^2p_4\dots p_t))\cup$$
$$\cup((1\cdot 2p_2^{a_2}p_3^2p_4\dots p_t, 2p_2^{a_2}p_3^3p_4\dots p_t)\cup$$
$$\cup(2\cdot 2p_2^{a_2}p_3^2p_4\dots p_t, 2p_2^{a_2}p_3^3p_4\dots p_t)\cup$$
$$\cup\dots\cup((p_3-1)\cdot 2p_2^{a_2}p_3^2p_4\dots p_t, 2p_2^{a_2}p_3^3p_4\dots p_t))\cup$$

. . . .

$$\cup((1\cdot 2p_2^{a_2}p_3^{a_3-1}p_4\dots p_t, 2p_2^{a_2}p_3^{a_3}p_4\dots p_t)\cup$$
$$\cup(2\cdot 2p_2^{a_2}p_3^{a_3-1}p_4\dots p_t, 2p_2^{a_2}p_3^3a_3p_4\dots p_t)\cup$$
$$\cup\dots\cup((p_3-1)\cdot 2p_2^{a_2}p_3^{a_3-1}p_4\dots p_t, 2p_2^{a_2}p_3^{a_3}p_4\dots p_t))\cup$$

. . . .

$$\cup((1\cdot 2p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t, 2p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2)\cup$$
$$\cup(2\cdot 2p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t, 2p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2)\cup$$

$$\cup \ldots \cup ((p_t-1)\cdot 2p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t, 2p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2))\cup$$
$$\cup((1\cdot 2p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2, 2p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^3)\cup$$
$$\cup(2\cdot 2p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2, 2p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^3)\cup$$
$$\cup \ldots \cup ((p_t-1)\cdot 2p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2, 2p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^3))\cup$$

. . . .

$$\cup((1\cdot 2p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t-1}, 2p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t})\cup$$
$$\cup(2\cdot 2p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t-1}, 2p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t})\cup$$
$$\cup \ldots \cup ((p_t-1)\cdot 2p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t-1}, 2p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t}))$$

накрывает все четные числа, сравнимые с 0 по модулям $2p_2, \ldots, 2p_t$, но не сравнимые с 0 по модулю $2p_2^{a_2}\ldots p_t^{a_t}$. Наконец, серия

$$(2a_1, 2p_2p_t)\cup(2a_2, 2p_2p_3)\cup\ldots\cup(2a_{t-1}, 2p_{t-1}p_t)$$

накрывает все четные числа, сравнимые с 0 или -2 по модулям $p_2, \ldots, p_t$, но не сравнимые с 0 или -2 по модулю $2p_2\ldots p_t$. Поэтому

$$L(n) \leqslant 1 + \sum_{i=2}^{t}(p_i-2) + 2\sum_{i=2}^{t}(a_i-1)(p_i-1) + (t-1) =$$

$$= (2a_2-1)(p_2-1) + \ldots + (2a_t-1)(p_t-1) + 1.$$

Для доказательства нижней оценки введем обозначения

$$X_1 := \{p_2^{a_2}\ldots p_t^{a_t}\},$$

$$X_2^{2,1} := \{1\cdot 2p_2p_3^{a_3}\ldots p_t^{a_t}-2, 2\cdot 2p_2p_3^{a_3}\ldots p_t^{a_t}-2, \ldots, (p_2-1)\cdot 2p_2p_3^{a_3}\ldots p_t^{a_t}-2\},$$
$$X_2^{2,2} := \{1\cdot 2p_2^2p_3^{a_3}\ldots p_t^{a_t}-2, 2\cdot 2p_2^2p_3^{a_3}\ldots p_t^{a_t}-2, \ldots, (p_2-1)\cdot 2p_2^2p_3^{a_3}\ldots p_t^{a_t}-2\},$$

. . . .

$$X_2^{2,a_2-1} := \{1\cdot 2p_2^{a_2-1}p_3^{a_3}\ldots p_t^{a_t}-2, \ldots, (p_2-1)\cdot 2p_2^{a_2-1}p_3^{a_3}\ldots p_t^{a_t}-2\},$$

. . . .

$$X_2^{t,1} := \{1\cdot 2p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t-2, \ldots, (p_t-1)\cdot 2p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t-2\},$$
$$X_2^{t,2} := \{1\cdot 2p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2-2, \ldots, (p_t-1)\cdot 2p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2-2\},$$

. . . .

$$X_2^{t,a_t-1} := \{1\cdot 2p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_{t-1}-1}-2,\dots,(p_t-1)\cdot 2p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t-1}-2\},$$

$$X_3^{2,1} := \{1\cdot 2p_2p_3^{a_3}\dots p_t^{a_t}, 2\cdot 2p_2p_3^{a_3}\dots p_t^{a_t},\dots,(p_2-1)\cdot 2p_2p_3^{a_3}\dots p_t^{a_t}\},$$

$$X_3^{2,2} := \{1\cdot 2p_2^2p_3^{a_3}\dots p_t^{a_t}, 2\cdot 2p_2^2p_3^{a_3}\dots p_t^{a_t},\dots,(p_2-1)\cdot 2p_2^2p_3^{a_3}\dots p_t^{a_t}\},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$X_3^{2,a_2-1} := \{1\cdot 2p_2^{a_2-1}p_3^{a_3}\dots p_t^{a_t},\dots,(p_2-1)\cdot 2p_2^{a_2-1}p_3^{a_3}\dots p_t^{a_t}\},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$X_3^{t,1} := \{1\cdot 2p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t, 2\cdot 2p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t,\dots,(p_t-1)\cdot 2p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t\},$$

$$X_3^{t,2} := \{1\cdot 2p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2, 2\cdot 2p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2,\dots,(p_t-1)\cdot 2p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2\},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$X_3^{t,a_t-1} := \{1\cdot 2p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_{t-1}-1},\dots,(p_t-1)\cdot 2p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t-1}\},$$

$$X_4^2 := \{2b_{2,1},\dots,2b_{2,p_2-2}\},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$X_4^t := \{2b_{t,1},\dots,2b_{t,p_t-2}\},$$

$$X_5 := \{2c_2,\dots,2c_{t-1},2c_t\},$$

$$Y := (2p_2^{a_2}\dots p_t^{a_t}-2, 2p_2^{a_2}\dots p_t^{a_t})\cup(2p_2^{a_2}\dots p_t^{a_t}, 2p_2^{a_2}\dots p_t^{a_t}),$$

где

$$b_{i,j}\equiv j \mod p_i^{a_i},\quad b_{i,j}\equiv 0 \mod \frac{n}{2p_i^{a_i}},$$

$$c_i\equiv -1 \mod p_i^{a_i},\quad c_i\equiv 0 \mod \frac{n}{2p_i^{a_i}}.$$

Покажем, что множество

$$X := X_1\cup X_2^{2,1}\cup\ldots\cup X_2^{t,a_t-1}\cup$$

$$\cup X_3^{2,1}\cup\ldots\cup X_3^{t,a_t-1}\cup X_4^2\cup\ldots\cup X_4^t\cup X_5$$

будет опорным семейством для множества Y. Пусть $x_1, x_2\in X$, $x_1<x_2$. Нужно доказать, что выполнено хотя бы одно из двух условий:

$$(x_1, x_2-x_1)\cap(n-2,n)\neq\emptyset, \tag{7}$$

$$(x_1, x_2-x_1)\cap(n,n)\neq\emptyset. \tag{8}$$

Возможны случаи:
Случай 1.
$x_1 \in X_1, x_2 \in X_2^{i,j}$ или $x_2 \in X_1, x_1 \in X_2^{i,j}$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = 1$ и значит по лемме 1 верно (7).
Случай 2.
$x_1 \in X_1, x_2 \in X_3^{i,j}$ или $x_2 \in X_1, x_1 \in X_3^{i,j}$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = \frac{n}{2p_i^{a_i}} p_i^j$ и по лемме 1 верно (8).
Случай 3.
$x_1 \in X_1, x_2 \in X_4^i$ или $x_2 \in X_1, x_1 \in X_4^i$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = \frac{n}{2p_i^{a_i}}$ и по лемме 1 верно (8).
Случай 4.
$x_1 \in X_1, x_2 = c_i$ или $x_2 \in X_1, x_1 = c_i$. Случай аналогичен предыдущему.
Случай 5.
$x_1 \in X_2^{i,j_1}, x_2 \in X_2^{i,j_2}$, $j_1 \leqslant j_2$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = \frac{n}{p_i^{a_i}} p_i^{j_1}$ и по лемме 1 верно (7).
Случай 6.
$x_1 \in X_2^{i,j_1}, x_2 \in X_2^{i,j_2}$, $j_1 > j_2$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = \frac{n}{p_i^{a_i}} p_i^{j_2}$ и по лемме 1 верно (7).
Случай 7.
$x_1 \in X_2^{i_1,j_1}, x_2 \in X_2^{i_2,j_2}$, $i_1 \neq i_2$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = \frac{n}{p_{i_1}^{a_{i_1}} p_{i_2}^{a_{i_2}}} p_{i_1}^{j_1} p_{i_2}^{j_2}$ и по лемме 1 верно (7).
Случай 8.
$x_1 \in X_2^{i_1,j_1}, x_2 \in X_3^{i_2,j_2}$ или $x_2 \in X_2^{i_1,j_1}, x_1 \in X_3^{i_2,j_2}$. Тогда верно, что НОД$(x_2 - x_1, n) = 2$ и значит по лемме 1 получаем (7).
Случай 9.
$x_1 \in X_2^{i,j}, x_2 \in X_4^k$ или $x_2 \in X_2^{i,j}, x_1 \in X_4^k$. Случай аналогичен предыдущему.
Случай 10.
$x_1 \in X_2^{i,j}, x_2 = c_i$ или $x_2 \in X_2^{i,j}, x_1 = c_i$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = 2p_i^j$ и по лемме 1 верно (7).
Случай 11.
$x_1 \in X_2^{i_1,j}, x_2 = c_{i_2}$, $i_1 \neq i_2$ или $x_2 \in X_2^{i_1,j}, x_1 = c_{i_2}$, $i_1 \neq i_2$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = 2p_{i_2}^{a_{i_2}}$ и по лемме 1 верно (7).
Случай 12.
$x_1 \in X_3^{i,j_1}, x_2 \in X_3^{i,j_2}$, $j_1 \leqslant j_2$. Случай аналогичен случаю 5.
Случай 13.
$x_1 \in X_3^{i,j_1}, x_2 \in X_3^{i,j_2}$, $j_1 > j_2$. Случай аналогичен случаю 6.

Случай 14.
$x_1 \in X_3^{i_1,j_1}, x_2 \in X_3^{i_2,j_2}$, $i_1 \neq i_2$. Случай аналогичен случаю 7.
Случай 15.
$x_1 \in X_3^{i,j}, x_2 \in X_4^i$ или $x_2 \in X_3^{i,j}, x_1 \in X_4^i$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = \frac{n}{p_i^{a_i}}$ и по лемме 1 верно (8).
Случай 16.
$x_1 \in X_3^{i,j}, x_2 \in X_4^k$, $i \neq k$ или $x_2 \in X_3^{i,j}, x_1 \in X_4^i$, $i \neq k$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = \frac{n}{p_i^{a_i} p_k^{a_k}} p_i^j$ и по лемме 1 верно (8).
Случай 17.
$x_1 \in X_3^{i,j}, x_2 = c_i$ или $x_2 \in X_2^{i,j}, x_1 = c_i$. Случай аналогичен случаю 15.
Случай 18.
$x_1 \in X_3^{i,j}, x_2 = c_k$, $i \neq k$ или $x_2 \in X_3^{i,j}, x_1 = c_k$, $i \neq k$. Случай аналогичен случаю 16.
Случай 19.
$x_1 \in X_4^i, x_2 \in X_4^i$. Случай аналогичен случаю 15.
Случай 20.
$x_1 \in X_4^i, x_2 \in X_4^j$, $i \neq j$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = \frac{n}{p_i^{a_i} p_j^{a_j}}$ и по лемме 1 верно (8).
Случай 21.
$x_1 \in X_4^i, x_2 = c_i$ или $x_1 \in X_4^i, x_2 = c_i$. Случай аналогичен случаю 15.
Случай 22.
$x_1 \in X_4^i, x_2 = c_j$, $i \neq j$ или $x_2 \in X_4^i, x_1 = c_j$, $i \neq j$. Случай аналогичен случаю 20.
Случай 23.
$x_1 = c_i, x_2 = c_j$. Случай аналогичен случаю 20.
Разбор случаев завершен. Мы показали, что множество X будет опорным семейством для Y. Но в множестве X всего

$$|X_1|+|X_2^{2,1}|+\ldots+|X_2^{t,a_t-1}|+|X_3^{2,1}|+\ldots+|X_3^{t,a_t-1}|+|X_4^2|+\ldots+|X_4^t|+|X_5| =$$

$$= 1+2(p_2-1)(a_2-1)+\ldots+2(p_t-1)(a_t-1)+(p_2-2)+\ldots+(p_t-2)+(t-1) =$$

$$= (2a_2 - 1)(p_2 - 1) + \ldots + (2a_t - 1)(p_t - 1) + 1.$$

элементов. Поэтому по лемме 2 получаем

$$L(2p_2^{a_2} \ldots p_t^{a_t}) \geqslant (2a_2 - 1)(p_2 - 1) + \ldots + (2a_t - 1)(p_t - 1) + 1.$$

В случае, когда $p_1 = 2, t > 2, a_1 = 1$, утверждение теоремы доказано.

Пусть $p_1 = 2, t > 2, a_1 > 1$. Докажем тогда, что

$L(n) = L(2^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_t^{a_t}) = (2a_2-1)(p_2-1)+\ldots+(2a_t-1)(p_t-1)+(2a_1-2).$

Для доказательства верхней оценки нужно представить $T(n)$ в виде объединения

$$(2a_2 - 1)(p_2 - 1) + \ldots + (2a_t - 1)(p_t - 1) + (2a_1 - 2)$$

арифметических прогрессий. Это можно сделать следующим образом:

$$T(n) = (1, 2) \cup ((2, 2p_2) \cup (4, 2p_2) \cup (6, 2p_2) \cup \ldots \cup (2p_2 - 4, 2p_2))\cup$$
$$\cup((2, 2p_3) \cup (4, 2p_3) \cup (6, 2p_3) \cup \ldots \cup (2p_3 - 4, 2p_3)) \cup \ldots \cup$$
$$\cup((2, 2p_t) \cup (4, 2p_t) \cup (6, 2p_t) \cup \ldots \cup (2p_t - 4, 2p_t))\cup$$
$$\cup((4p_2 \ldots p_t - 2, 8p_2 \ldots p_t) \cup (8p_2 \ldots p_t - 2, 16p_2 \ldots p_t)\cup$$
$$\cup \ldots \cup (2^{a_1-1} p_2 \ldots p_t - 2, 2^{a_1} p_2 \ldots p_t))\cup$$
$$\cup((1 \cdot 2^{a_1} p_2 p_3 \ldots p_t - 2, 2^{a_1} p_2^2 p_3 \ldots p_t)\cup$$
$$\cup(2 \cdot 2^{a_1} p_2 p_3 \ldots p_t - 2, 2^{a_1} p_2^2 p_3 \ldots p_t)\cup$$
$$\cup \ldots \cup ((p_2 - 1) \cdot 2^{a_1} p_2 p_3 \ldots p_t - 2, 2^{a_1} p_2^2 p_3 \ldots p_t))\cup$$
$$\cup((1 \cdot 2^{a_1} p_2^2 p_3 \ldots p_t - 2, 2p_2^3 p_3 \ldots p_t)\cup$$
$$\cup(2 \cdot 2^{a_1} p_2^2 p_3 \ldots p_t - 2, 2^{a_1} p_2^3 p_3 \ldots p_t)\cup$$
$$\cup \ldots \cup ((p_2 - 1) \cdot 2^{a_1} p_2^2 p_3 \ldots p_t - 2, 2^{a_1} p_2^3 p_3 \ldots p_t))\cup$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\cup((1 \cdot 2^{a_1} p_2^{a_2-1} p_3 \ldots p_t - 2, 2^{a_1} p_2^{a_2} p_3 \ldots p_t)\cup$$
$$\cup(2 \cdot 2^{a_1} p_2^{a_2-1} p_3 \ldots p_t - 2, 2^{a_1} p_2^{a_2} p_3 \ldots p_t)\cup$$
$$\cup \ldots \cup ((p_2 - 1) \cdot 2^{a_1} p_2^{a_2-1} p_3 \ldots p_t - 2, 2^{a_1} p_2^{a_2} p_3 \ldots p_t))\cup$$
$$\cup((1 \cdot 2^{a_1} p_2^{a_2} p_3 \ldots p_t - 2, 2^{a_1} p_2^{a_2} p_3^2 p_4 \ldots p_t)\cup$$
$$\cup(2 \cdot 2^{a_1} p_2^{a_2} p_3 \ldots p_t - 2, 2^{a_1} p_2^{a_2} p_3^2 p_4 \ldots p_t)\cup$$
$$\cup \ldots \cup ((p_3 - 1) \cdot 2^{a_1} p_2^{a_2} p_3 \ldots p_t - 2, 2^{a_1} p_2^{a_2} p_3^2 p_4 \ldots p_t))\cup$$
$$\cup((1 \cdot 2^{a_1} p_2^{a_2} p_3^2 p_4 \ldots p_t - 2, 2^{a_1} p_2^{a_2} p_3^3 p_4 \ldots p_t)\cup$$
$$\cup(2 \cdot 2^{a_1} p_2^{a_2} p_3^2 p_4 \ldots p_t - 2, 2^{a_1} p_2^{a_2} p_3^3 p_4 \ldots p_t)\cup$$

$$\cup \ldots \cup ((p_3-1)\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^2p_4\ldots p_t-2, 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^3p_4\ldots p_t))\cup$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cup((1\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3-1}p_4\ldots p_t-2, 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3}p_4\ldots p_t)\cup$$

$$\cup(2\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3-1}p_4\ldots p_t-2, 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^3a_3p_4\ldots p_t)\cup$$

$$\cup \ldots \cup ((p_3-1)\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3-1}p_4\ldots p_t-2, 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3}p_4\ldots p_t))\cup$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cup((1\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t-2, 2^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2)\cup$$

$$\cup(2\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t-2, 2^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2)\cup$$

$$\cup \ldots \cup ((p_t-1)\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t-2, 2^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2))\cup$$

$$\cup((1\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2-2, 2^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^3)\cup$$

$$\cup(2\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2-2, 2^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^3)\cup$$

$$\cup \ldots \cup ((p_t-1)\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2-2, 2^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^3))\cup$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cup((1\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t-1}-2, 2^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t})\cup$$

$$\cup(2\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t-1}-2, 2^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t})\cup\ldots\cup$$

$$\cup((p_t-1)\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t-1}-2, 2^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t}))\cup$$

$$\cup((4p_2\ldots p_t, 8p_2\ldots p_t)\cup(8p_2\ldots p_t, 16p_2\ldots p_t)\cup\ldots\cup$$

$$\cup(2^{a_1-1}p_2\ldots p_t, 2^{a_1}p_2\ldots p_t))\cup$$

$$\cup((1\cdot 2^{a_1}p_2p_3\ldots p_t, 2^{a_1}p_2^2p_3\ldots p_t)\cup$$

$$\cup(2\cdot 2^{a_1}p_2p_3\ldots p_t, 2^{a_1}p_2^2p_3\ldots p_t)\cup$$

$$\cup \ldots \cup ((p_2-1)\cdot 2^{a_1}p_2p_3\ldots p_t, 2^{a_1}p_2^2p_3\ldots p_t))\cup$$

$$\cup((1\cdot 2^{a_1}p_2^2p_3\ldots p_t, 2p_2^3p_3\ldots p_t)\cup$$

$$\cup(2\cdot 2^{a_1}p_2^2p_3\ldots p_t, 2^{a_1}p_2^3p_3\ldots p_t)\cup$$

$$\cup \ldots \cup ((p_2-1)\cdot 2^{a_1}p_2^2p_3\ldots p_t, 2^{a_1}p_2^3p_3\ldots p_t))\cup$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cup((1\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2-1}p_3\ldots p_t, 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3\ldots p_t)\cup$$

$$\cup(2\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2-1}p_3\ldots p_t, 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3\ldots p_t)\cup$$

$$\cup \ldots \cup ((p_2-1)\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2-1}p_3\ldots p_t, 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3\ldots p_t))\cup$$

$$\cup((1\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3\ldots p_t, 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^2p_4\ldots p_t)\cup$$

$$\cup(2\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3\ldots p_t, 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^2p_4\ldots p_t)\cup$$

$$\cup \ldots \cup ((p_3-1)\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3\ldots p_t, 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^2p_4\ldots p_t))\cup$$

$$\cup((1\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^2p_4\ldots p_t, 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^3p_4\ldots p_t)\cup$$

$$\cup(2\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^2p_4\ldots p_t, 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^3p_4\ldots p_t)\cup$$

$$\cup \ldots \cup ((p_3-1)\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^2p_4\ldots p_t, 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^3p_4\ldots p_t))\cup$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cup((1\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3-1}p_4\ldots p_t, 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3}p_4\ldots p_t)\cup$$

$$\cup(2\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3-1}p_4\ldots p_t, 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^3a_3p_4\ldots p_t)\cup$$

$$\cup \ldots \cup ((p_3-1)\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3-1}p_4\ldots p_t, 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3}p_4\ldots p_t))\cup$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cup((1\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t, 2^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2)\cup$$

$$\cup(2\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t, 2^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2)\cup$$

$$\cup \ldots \cup ((p_t-1)\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t, 2^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2))\cup$$

$$\cup((1\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2, 2^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^3)\cup$$

$$\cup(2\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2, 2^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^3)\cup$$

$$\cup \ldots \cup ((p_t-1)\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2, 2^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^3))\cup$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cup((1\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t-1}, 2^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t})\cup$$

$$\cup(2\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t-1}, 2^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t})\cup$$

$$\cup \ldots \cup ((p_t-1)\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t-1}, 2^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t}))\cup$$

$$\cup((2a_1, 4p_2)\cup(2a_2, 2p_2p_3)\ldots\cup(2a_{t-1}, 2p_{t-1}p_t)\cup(2a_t, 4p_t)),$$

где при $1 \leqslant i \leqslant t-1$ имеем

$$1 \leqslant a_i \leqslant p_ip_{i+1},\quad a_i \equiv 0 \mod p_i,\quad a_i \equiv -1 \mod p_{i+1}$$

и при $i = t$ имеем

$$1 \leqslant a_t \leqslant 2p_t, \quad a_t \equiv 0 \mod p_t, \quad a_t \equiv -1 \mod 2.$$

Здесь серия

$$((2, 2p_2) \cup (4, 2p_2) \cup (6, 2p_2) \cup \ldots \cup (2p_2 - 4, 2p_2))\cup$$

$$\cup((2, 2p_3) \cup (4, 2p_3) \cup (6, 2p_3) \cup \ldots \cup$$

$$\cup(2p_3 - 4, 2p_3)) \cup \ldots \cup ((2, 2p_t) \cup (4, 2p_t) \cup (6, 2p_t) \cup \ldots \cup (2p_t - 4, 2p_t))$$

накрывает все четные числа, не сравнимые с 0 и -2 по модулям $p_2, \ldots, p_t$. Серия

$$((4p_2 \ldots p_t - 2, 8p_2 \ldots p_t) \cup (8p_2 \ldots p_t - 2, 16p_2 \ldots p_t)\cup$$

$$\cup \ldots \cup (2^{a_1 - 1}p_2 \ldots p_t - 2, 2^{a_1}p_2 \ldots p_t))\cup$$

$$\cup((1 \cdot 2^{a_1}p_2p_3 \ldots p_t - 2, 2^{a_1}p_2^2p_3 \ldots p_t)\cup$$

$$\cup(2 \cdot 2^{a_1}p_2p_3 \ldots p_t - 2, 2^{a_1}p_2^2p_3 \ldots p_t)\cup$$

$$\cup \ldots \cup ((p_2 - 1) \cdot 2^{a_1}p_2p_3 \ldots p_t - 2, 2^{a_1}p_2^2p_3 \ldots p_t))\cup$$

$$\cup((1 \cdot 2^{a_1}p_2^2p_3 \ldots p_t - 2, 2p_2^3p_3 \ldots p_t)\cup$$

$$\cup(2 \cdot 2^{a_1}p_2^2p_3 \ldots p_t - 2, 2^{a_1}p_2^3p_3 \ldots p_t)\cup$$

$$\cup \ldots \cup ((p_2 - 1) \cdot 2^{a_1}p_2^2p_3 \ldots p_t - 2, 2^{a_1}p_2^3p_3 \ldots p_t))\cup$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cup((1 \cdot 2^{a_1}p_2^{a_2 - 1}p_3 \ldots p_t - 2, 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3 \ldots p_t)\cup$$

$$\cup(2 \cdot 2^{a_1}p_2^{a_2 - 1}p_3 \ldots p_t - 2, 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3 \ldots p_t)\cup$$

$$\cup \ldots \cup ((p_2 - 1) \cdot 2^{a_1}p_2^{a_2 - 1}p_3 \ldots p_t - 2, 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3 \ldots p_t))\cup$$

$$\cup((1 \cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3 \ldots p_t - 2, 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^2p_4 \ldots p_t)\cup$$

$$\cup(2 \cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3 \ldots p_t - 2, 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^2p_4 \ldots p_t)\cup$$

$$\cup \ldots \cup ((p_3 - 1) \cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3 \ldots p_t - 2, 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^2p_4 \ldots p_t))\cup$$

$$\cup((1 \cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^2p_4 \ldots p_t - 2, 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^3p_4 \ldots p_t)\cup$$

$$\cup(2 \cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^2p_4 \ldots p_t - 2, 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^3p_4 \ldots p_t)\cup$$

$$\cup \ldots \cup ((p_3 - 1) \cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^2p_4 \ldots p_t - 2, 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^3p_4 \ldots p_t))\cup$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\cup((1\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3-1}p_4\dots p_t-2,2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3}p_4\dots p_t)\cup$$
$$\cup(2\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3-1}p_4\dots p_t-2,2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{3}a_3p_4\dots p_t)\cup$$
$$\cup\dots\cup((p_3-1)\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3-1}p_4\dots p_t-2,2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3}p_4\dots p_t))\cup$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\cup((1\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t-2,2^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2)\cup$$
$$\cup(2\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t-2,2^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2)\cup$$
$$\cup\dots\cup((p_t-1)\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t-2,2^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2))\cup$$
$$\cup((1\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2-2,2^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^3)\cup$$
$$\cup(2\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2-2,2^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^3)\cup\dots\cup$$
$$\cup((p_t-1)\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2-2,2^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^3))\cup$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\cup((1\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t-1}-2,2^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t})\cup$$
$$\cup(2\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t-1}-2,2^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t})\cup$$
$$\cup\dots\cup((p_t-1)\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t-1}-2,2^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t}))$$

накрывает все четные числа, сравнимые с -2 по модулям $4,p_2,\dots,p_t$, но не сравнимые с -2 по модулю $2^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_t^{a_t}$. Серия

$$((4p_2\dots p_t,8p_2\dots p_t)\cup(8p_2\dots p_t,16p_2\dots p_t)\cup$$
$$\cup\dots\cup(2^{a_1-1}p_2\dots p_t,2^{a_1}p_2\dots p_t))\cup$$
$$\cup((1\cdot 2^{a_1}p_2p_3\dots p_t,2^{a_1}p_2^2p_3\dots p_t)\cup(2\cdot 2^{a_1}p_2p_3\dots p_t,2^{a_1}p_2^2p_3\dots p_t)\cup$$
$$\cup\dots\cup((p_2-1)\cdot 2^{a_1}p_2p_3\dots p_t,2^{a_1}p_2^2p_3\dots p_t))\cup$$
$$\cup((1\cdot 2^{a_1}p_2^2p_3\dots p_t,2p_2^3p_3\dots p_t)\cup(2\cdot 2^{a_1}p_2^2p_3\dots p_t,2^{a_1}p_2^3p_3\dots p_t)\cup$$
$$\cup\dots\cup((p_2-1)\cdot 2^{a_1}p_2^2p_3\dots p_t,2^{a_1}p_2^3p_3\dots p_t))\cup$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\cup((1\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2-1}p_3\dots p_t,2^{a_1}p_2^{a_2}p_3\dots p_t)\cup$$
$$\cup(2\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2-1}p_3\dots p_t,2^{a_1}p_2^{a_2}p_3\dots p_t)\cup$$
$$\cup\dots\cup((p_2-1)\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2-1}p_3\dots p_t,2^{a_1}p_2^{a_2}p_3\dots p_t))\cup$$

$$\cup((1\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3\dots p_t, 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^2p_4\dots p_t)\cup$$
$$\cup(2\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3\dots p_t, 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^2p_4\dots p_t)\cup$$
$$\cup\dots\cup((p_3-1)\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3\dots p_t, 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^2p_4\dots p_t))\cup$$
$$\cup((1\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^2p_4\dots p_t, 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^3p_4\dots p_t)\cup$$
$$\cup(2\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^2p_4\dots p_t, 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^3p_4\dots p_t)\cup$$
$$\cup\dots\cup((p_3-1)\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^2p_4\dots p_t, 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^3p_4\dots p_t))\cup$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\cup((1\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3-1}p_4\dots p_t, 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3}p_4\dots p_t)\cup$$
$$\cup(2\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3-1}p_4\dots p_t, 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^3a_3p_4\dots p_t)\cup$$
$$\cup\dots\cup((p_3-1)\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3-1}p_4\dots p_t, 2^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3}p_4\dots p_t))\cup$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\cup((1\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t, 2^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2)\cup$$
$$\cup(2\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t, 2^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2)\cup$$
$$\cup\dots\cup((p_t-1)\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t, 2^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2))\cup$$
$$\cup((1\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2, 2^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^3)\cup$$
$$\cup(2\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2, 2^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^3)\cup$$
$$\cup\dots\cup((p_t-1)\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2, 2^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^3))\cup$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\cup((1\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t-1}, 2^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t})\cup$$
$$\cup(2\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t-1}, 2^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t})\cup$$
$$\cup\dots\cup((p_t-1)\cdot 2^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t-1}, 2^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t}))$$

накрывает все четные числа, сравнимые с 0 по модулям $4, p_2, \dots, p_t$, но не сравнимые с 0 по модулю $2^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_t^{a_t}$. Наконец, серия

$$(2a_1, 4p_2)\cup(2a_2, 2p_2p_3)\dots\cup(2a_{t-1}, 2p_{t-1}p_t)\cup(2a_t, 4p_t)$$

накрывает все четные числа, сравнимые с 0 или -2 по модулям $4, p_2, \dots, p_t$, но не сравнимые с 0 или -2 по модулю $4p_2\dots p_t$. Поэтому

$$L(n) \leqslant 1 + \sum_{i=2}^{t}(p_i-2) + 2(a_1-2) + 2\sum_{i=2}^{t}(a_i-1)(p_i-1) + t =$$

$$= (2a_2 - 1)(p_2 - 1) + \ldots + (2a_t - 1)(p_t - 1) + (2a_1 - 2).$$

Для доказательства нижней оценки введем обозначения

$$X_1 := \{p_2^{a_2} \ldots p_t^{a_t}\},$$

$$X_2^2 := \{2^2 p_2^{a_2} \ldots p_t^{a_t} - 2\}, \ldots, X_2^{a_1-1} := \{2^{a_1-1} p_2^{a_2} \ldots p_t^{a_t} - 2\},$$

$$X_3^2 := \{2^2 p_2^{a_2} \ldots p_t^{a_t}\}, \ldots, X_3^{a_1-1} := \{2^{a_1-1} p_2^{a_2} \ldots p_t^{a_t}\},$$

$$X_4^{2,1} := \{1 \cdot 2^{a_1} p_2 p_3^{a_3} \ldots p_t^{a_t} - 2, \ldots, (p_2 - 1) \cdot 2^{a_1} p_2 p_3^{a_3} \ldots p_t^{a_t} - 2\},$$

$$X_4^{2,2} := \{1 \cdot 2^{a_1} p_2^2 p_3^{a_3} \ldots p_t^{a_t} - 2, \ldots, (p_2 - 1) \cdot 2^{a_1} p_2^2 p_3^{a_3} \ldots p_t^{a_t} - 2\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X_4^{2,a_2-1} := \{1 \cdot 2^{a_1} p_2^{a_2-1} p_3^{a_3} \ldots p_t^{a_t} - 2, \ldots, (p_2 - 1) \cdot 2^{a_1} p_2^{a_2-1} p_3^{a_3} \ldots p_t^{a_t} - 2\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X_3^{t,1} := \{1 \cdot 2^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t - 2, \ldots, (p_t - 1) \cdot 2^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t - 2\},$$

$$X_4^{t,2} := \{1 \cdot 2^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^2 - 2, \ldots, (p_t - 1) \cdot 2^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^2 - 2\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X_4^{t,a_t-1} := \{1 \cdot 2^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^{a_t-1} - 2, \ldots, (p_t - 1) \cdot 2^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^{a_t-1} - 2\},$$

$$X_5^{2,1} := \{1 \cdot 2^{a_1} p_2 p_3^{a_3} \ldots p_t^{a_t}, \ldots, (p_2 - 1) \cdot 2^{a_1} p_2 p_3^{a_3} \ldots p_t^{a_t}\},$$

$$X_5^{2,2} := \{1 \cdot 2^{a_1} p_2^2 p_3^{a_3} \ldots p_t^{a_t}, \ldots, (p_2 - 1) \cdot 2^{a_1} p_2^2 p_3^{a_3} \ldots p_t^{a_t}\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X_5^{2,a_2-1} := \{1 \cdot 2 p_2^{a_2-1} p_3^{a_3} \ldots p_t^{a_t}, \ldots, (p_2 - 1) \cdot 2^{a_1} p_2^{a_2-1} p_3^{a_3} \ldots p_t^{a_t}\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X_5^{t,1} := \{1 \cdot 2^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t, \ldots, (p_t - 1) \cdot 2^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t\},$$

$$X_5^{t,2} := \{1 \cdot 2^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^2, \ldots, (p_t - 1) \cdot 2^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^2\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X_5^{t,a_t-1} := \{1 \cdot 2^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^{a_t-1}, \ldots, (p_t - 1) \cdot 2^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^{a_t-1}\},$$

$$X_6^2 := \{2b_{2,1}, \ldots, 2b_{2,p_2-2}\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X_6^t := \{2b_{t,1}, \ldots, 2b_{t,p_t-2}\},$$

$$X_7 := \{2c_1, \ldots, 2c_{t-1}, 2c_t\},$$

$$Y := (2p_2^{a_2} \ldots p_t^{a_t} - 2, 2p_2^{a_2} \ldots p_t^{a_t}) \cup (2p_2^{a_2} \ldots p_t^{a_t}, 2p_2^{a_2} \ldots p_t^{a_t}),$$

где

$$b_{i,j} \equiv j \mod p_i^{a_i}, \quad b_{i,j} \equiv 0 \mod \frac{n}{2p_i^{a_i}},$$

$$c_1 \equiv -1 \mod 2^{a_1-1}, \quad c_1 \equiv 0 \mod \frac{n}{2^{a_1}}$$

и при $2 \leqslant i \leqslant t$ верно

$$c_i \equiv -1 \mod p_i^{a_i}, \quad c_i \equiv 0 \mod \frac{n}{2p_i^{a_i}}.$$

Покажем, что множество

$$X := X_1 \cup X_2^2 \cup \ldots \cup X_2^{a_1-1} \cup X_3^2 \cup \ldots \cup X_3^{a_1-1} \cup X_4^{2,1} \cup$$

$$\cup \ldots \cup X_4^{t,a_t-1} \cup X_5^{2,1} \cup \ldots \cup X_5^{t,a_t-1} \cup X_6^2 \cup \ldots \cup X_6^t \cup X_7$$

будет опорным семейством для множества Y. Пусть $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$. Нужно доказать, что выполнено хотя бы одно из двух условий:

$$(x_1, x_2 - x_1) \cap (n-2, n) \neq \emptyset, \tag{9}$$

$$(x_1, x_2 - x_1) \cap (n, n) \neq \emptyset. \tag{10}$$

Возможны случаи:

Случай 1.

$x_1 \in X_1, x_2 \in X_2^i$ или $x_2 \in X_1, x_1 \in X_2^i$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = 2$ и значит по лемме 1 верно (9).

Случай 2.

$x_1 \in X_1, x_2 \in X_3^i$ или $x_2 \in X_1, x_1 \in X_3^i$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = \frac{n}{2^{a_1}}$ и по лемме 1 верно (10).

Случай 3.

$x_1 \in X_1, x_2 \in X_4^{i,j}$ или $x_2 \in X_1, x_1 \in X_4^{i,j}$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = 1$ и по лемме 1 верно (9).

Случай 4.

$x_1 \in X_1, x_2 \in X_5^{i,j}$ или $x_2 \in X_1, x_1 \in X_5^{i,j}$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = \frac{n}{2^{a_1} p_i^{a_i}} p_i^j$ и по лемме 1 верно (10).

Случай 5.

$x_1 \in X_1, x_2 \in X_6^i$ или $x_2 \in X_1, x_1 \in X_6^i$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = \frac{n}{p_i^{a_i}}$ и по лемме 1 верно (10).

Случай 6.

$x_1 \in X_1, x_2 = c_1$ или $x_2 \in X_1, x_1 = c_1$. Случай аналогичен случаю 2.

Случай 7.

$x_1 \in X_1, x_2 = c_i,\ i > 1$ или $x_2 \in X_1, x_1 = c_i,\ i > 1$. Тогда верно, что НОД$(x_2 - x_1, n) = \frac{n}{2^{a_1} p_i^{a_i}}$ и значит по лемме 1 получаем (10).

Случай 8.

$x_1 \in X_2^i, x_2 \in X_2^j,\ i < j$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = \frac{n}{2^{a_1}} 2^i$ и по лемме 1 верно (9).

Случай 9.

$x_1 \in X_2^i, x_2 \in X_2^j,\ i > j$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = \frac{n}{2^{a_1}} 2^j$ и по лемме 1 верно (9).

Случай 10.

$x_1 \in X_2^i, x_2 \in X_3^j$. Случай аналогичен случаю 1.

Случай 11.

$x_1 \in X_2^i, x_2 \in X_4^{j,k}$ или $x_2 \in X_2^i, x_1 \in X_4^{j,k}$. Тогда в этом случае верно, что НОД$(x_2 - x_1, n) = \frac{n}{2^{a_1} p_j^{a_j}} 2^i p_j^k$ и значит по лемме 1 получаем (9).

Случай 12.

$x_1 \in X_2^i, x_2 \in X_5^{j,k}$ или $x_2 \in X_2^i, x_1 \in X_5^{j,k}$. Случай аналогичен случаю 1.

Случай 13.

$x_1 \in X_2^i, x_2 \in X_6^j$ или $x_2 \in X_2^i, x_1 \in X_6^j$. Случай аналогичен случаю 1.

Случай 14.

$x_1 \in X_2^i, x_2 = c_1$ или $x_2 \in X_2^i, x_1 = c_1$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = 2^i$ и по лемме 1 верно (9).

Случай 15.

$x_1 \in X_2^i, x_2 = c_j,\ j > 1$ или $x_2 \in X_2^i, x_1 = c_j,\ j > 1$. Тогда верно, что НОД$(x_2 - x_1, n) = p_j^{a_j}$ и значит по лемме 1 получаем (9).

Случай 16.

$x_1 \in X_3^i, x_2 \in X_4^{j,k}$ или $x_2 \in X_3^i, x_1 \in X_4^{j,k}$. Случай аналогичен случаю 1.

Случай 17.

$x_1 \in X_3^i, x_2 \in X_5^{j,k}$ или $x_2 \in X_3^i, x_1 \in X_5^{j,k}$. Тогда в этом случае верно, что НОД$(x_2 - x_1, n) = \frac{n}{2^{a_1} p_j^{a_j}} 2^i p_j^k$ и значит по лемме 1 получаем (10).

Случай 18.

$x_1 \in X_3^i, x_2 \in X_6^j$ или $x_3 \in X_2^i, x_1 \in X_6^j$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = \frac{n}{2^{a_1} p_j^{a_j}} 2^i$ и по лемме 1 верно (10).

Случай 19.

$x_1 \in X_3^i, x_2 = c_1$ или $x_2 \in X_3^i, x_1 = c_1$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = 2\frac{n}{2^{a_1}}$ и по лемме 1 верно (10).

Случай 20.

$x_1 \in X_3^i, x_2 = c_j,\ j > 1$ или $x_2 \in X_3^i, x_1 = c_j,\ j > 1$. Случай аналогичен случаю 18.

Случай 21.

$x_1 \in X_4^{i,j_1}, x_2 \in X_4^{i,j_2},\ j_1 \leqslant j_2$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = \frac{n}{p_i^{a_i}} p_i^{j_1}$ и по лемме 1 верно (9).

Случай 22.

$x_1 \in X_4^{i,j_1}, x_2 \in X_4^{i,j_2},\ j_1 > j_2$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = \frac{n}{p_i^{a_i}} p_i^{j_2}$ и по лемме 1 верно (9).

Случай 23.

$x_1 \in X_4^{i_1,j_1}, x_2 \in X_4^{i_2,j_2},\ i_1 \neq i_2$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = \frac{n}{p_{i_1}^{a_{i_1}} p_{i_2}^{a_{i_2}}} p_{i_1}^{j_1} p_{i_2}^{j_2}$ и по лемме 1 верно (9).

Случай 24.

$x_1 \in X_4^{i_1,j_1}, x_2 \in X_5^{i_2,j_2}$. Случай аналогичен случаю 1.

Случай 25.

$x_1 \in X_4^{i,j}, x_2 \in X_6^k$ или $x_2 \in X_4^{i,j}, x_1 \in X_6^k$. Случай аналогичен случаю 1.

Случай 26.

$x_1 \in X_4^{i,j}, x_2 = c_1$ или $x_2 \in X_4^{i,j}, x_1 = c_1$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = 2^{a_1}$ и по лемме 1 верно (9).

Случай 27.

$x_1 \in X_4^{i,j}, x_2 = c_k,\ k > 1$ или $x_2 \in X_4^{i,j}, x_1 = c_i,\ k > 1$. Тогда верно, что НОД$(x_2 - x_1, n) = 2p_i^j$ и по лемме 1 получаем (9).

Случай 28.

$x_1 \in X_5^{i,j_1}, x_2 \in X_5^{i,j_2},\ j_1 \leqslant j_2$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = \frac{n}{p_i^{a_i}} p_i^{j_1}$ и по лемме 1 верно (10).

Случай 29.

$x_1 \in X_5^{i,j_1}, x_2 \in X_5^{i,j_2},\ j_1 > j_2$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = \frac{n}{p_i^{a_i}} p_i^{j_2}$ и по лемме 1 верно (10).

Случай 30.

$x_1 \in X_5^{i_1,j_1}, x_2 \in X_5^{i_2,j_2},\ i_1 \neq i_2$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = \frac{n}{p_{i_1}^{a_{i_1}} p_{i_2}^{a_{i_2}}} p_{i_1}^{j_1} p_{i_2}^{j_2}$ и по лемме 1 верно (10).

Случай 31.

$x_1 \in X_5^{i,j}, x_2 \in X_6^i$ или $x_2 \in X_5^{i,j}, x_1 \in X_6^i$. Случай аналогичен случаю 5.

Случай 32.

$x_1 \in X_5^{i,j}, x_2 \in X_6^k,\ i \neq k$ или $x_2 \in X_5^{i,j}, x_1 \in X_6^k,\ i \neq k$. Тогда верно, что

НОД$(x_2 - x_1, n) = \frac{n}{p_i^{a_i} p_k^{a_k}} p_i^j$ и по лемме 1 получаем (10).
Случай 33.
$x_1 \in X_5^{i,j}, x_2 = c_1$ или $x_2 \in X_5^{i,j}, x_1 = c_1$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = 2\frac{n}{2^{a_1} p_i^{a_i}} p_i^j$ и по лемме 1 верно (10).
Случай 34.
$x_1 \in X_5^{i,j}, x_2 = c_i$, или $x_2 \in X_5^{i,j}, x_1 = c_i$. Случай аналогичен случаю 5.
Случай 35.
$x_1 \in X_5^{i,j}, x_2 = c_k$, $k \neq i$ или $x_2 \in X_5^{i,j}, x_1 = c_k$, $k \neq i$. Тогда верно, что НОД$(x_2 - x_1, n) = \frac{n}{p_k^{a_k} p_i^{a_i}} p_i^j$ и по лемме 1 получаем (10).
Случай 36.
$x_1 \in X_6^i, x_2 \in X_6^i$. Случай аналогичен случаю 5.
Случай 37.
$x_1 \in X_6^i, x_2 \in X_6^j$, $i \neq j$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = \frac{n}{p_i^{a_i} p_j^{a_j}}$ и по лемме 1 верно (10).
Случай 38.
$x_1 \in X_6^i, x_2 = c_i$ или $x_1 \in X_6^i, x_2 = c_i$. Случай аналогичен случаю 5.
Случай 39.
$x_1 \in X_6^i, x_2 = c_1$ или $x_2 \in X_6^i, x_1 = c_1$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = 2\frac{n}{2^{a_1} p_i^{a_i}}$ и по лемме 1 верно (10).
Случай 40.
$x_1 \in X_6^i, x_2 = c_j$, $i \neq j \neq 1$ или $x_2 \in X_6^i, x_1 = c_j$, $i \neq j \neq 1$. Случай аналогичен случаю 37.
Случай 41.
$x_1 = c_1, x_2 = c_i, i > 1$ или $x_2 = c_1, x_1 = c_i, i > 1$. Случай аналогичен случаю 39.
Случай 42.
$x_1 = c_i, x_2 = c_j, i, j \neq 1$. Случай аналогичен случаю 37.
Разбор случаев завершен. Мы показали, что множество X будет опорным семейством для Y. Но в множестве X всего

$$|X_1| + |X_2^2| + \ldots + |X_2^{a_1-1}| + |X_3^2| + \ldots + |X_3^{a_1-1}| +$$

$$+|X_4^{2,1}| + \ldots + |X_4^{t,a_t-1}| + |X_5^{2,1}| +$$

$$+ \ldots + |X_5^{t,a_t-1}| + |X_6^2| + \ldots + |X_6^t| + |X_7| =$$

$$= 1 + 2(a_1 - 2) + 2(p_2 - 1)(a_2 - 1) +$$

$$+ \ldots + 2(p_t - 1)(a_t - 1) + (p_2 - 2) + \ldots + (p_t - 2) + t =$$

$$= (2a_2 - 1)(p_2 - 1) + \ldots + (2a_t - 1)(p_t - 1) + (2a_1 - 2)$$

элементов. Поэтому по лемме 2 получаем

$$L(2^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_t^{a_t}) \geqslant (2a_2 - 1)(p_2 - 1) + \ldots + (2a_t - 1)(p_t - 1) + (2a_1 - 2).$$

В случае, когда $p_1 = 2, t > 2, a_1 > 1$, утверждение теоремы доказано.

Пусть $p_1 > 2, t = 1$. Докажем тогда, что

$$L(n) = L(p_1^{a_1}) = (2a_1 - 1)(p_1 - 1) - 1.$$

Сначала представим $T(n)$ в виде объединения $(2a_1 - 1)(p_1 - 1) - 1$ арифметических прогрессий. Это можно сделать следующим образом:

$$T(n) = ((1, p_1) \cup (2, p_1) \cup \ldots \cup (p_1 - 3, p_1) \cup (p_1 - 1, p_1))\cup$$

$$\cup((p_1 - 2, p_1^2) \cup (2p_1 - 2, p_1^2) \cup \ldots \cup ((p_1 - 1)p_1 - 2, p_1^2))\cup$$

$$\cup((p_1^2 - 2, p_1^3) \cup (2p_1^2 - 2, p_1^3) \cup \ldots \cup ((p_1 - 1)p_1^2 - 2, p_1^3))\cup$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cup((p_1^{a_1-1} - 2, p_1^{a_1}) \cup (2p_1^{a_1-1} - 2, p_1^{a_1}) \cup \ldots \cup ((p_1 - 1)p_1^{a_1-1} - 2, p_1^{a_1}))\cup$$

$$\cup((p_1, p_1^2) \cup (2p_1, p_1^2) \cup \ldots \cup ((p_1 - 1)p_1, p_1^2))\cup$$

$$\cup((p_1^2, p_1^3) \cup (2p_1^2, p_1^3) \cup \ldots \cup ((p_1 - 1)p_1^2, p_1^3))\cup$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cup((p_1^{a_1-1}, p_1^{a_1}) \cup (2p_1^{a_1-1}, p_1^{a_1}) \cup \ldots \cup ((p_1 - 1)p_1^{a_1-1}, p_1^{a_1})).$$

Видно, что здесь $(p_1 - 2) + 2(a_1 - 1)(p_1 - 1) = (2a_1 - 1)(p_1 - 1) - 1$ прогрессий. Множество

$$(1, p_1) \cup (2, p_1) \cup \ldots \cup (p_1 - 3, p_1) \cup (p_1 - 1, p_1)$$

покрывает все числа, не сравнимые с 0 или -2 по модулю p_1. Множество

$$((p_1 - 2, p_1^2) \cup (2p_1 - 2, p_1^2) \cup \ldots \cup ((p_1 - 1)p_1 - 2, p_1^2))\cup$$

$$\cup((p_1^2 - 2, p_1^3) \cup (2p_1^2 - 2, p_1^3) \cup \ldots \cup ((p_1 - 1)p_1^2 - 2, p_1^3))\cup$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cup((p_1^{a_1-1} - 2, p_1^{a_1}) \cup (2p_1^{a_1-1} - 2, p_1^{a_1}) \cup \ldots \cup ((p_1 - 1)p_1^{a_1-1} - 2, p_1^{a_1}))$$

покрывает все числа, сравнимые с -2 по модулю p_1, но не сравнимые с -2 по модулю $p_1^{a_1}$. Наконец, множество

$$\cup((p_1, p_1^2) \cup (2p_1, p_1^2) \cup \ldots \cup ((p_1-1)p_1, p_1^2))\cup$$

$$\cup((p_1^2, p_1^3) \cup (2p_1^2, p_1^3) \cup \ldots \cup ((p_1-1)p_1^2, p_1^3))\cup$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cup((p_1^{a_1-1}, p_1^{a_1}) \cup (2p_1^{a_1-1}, p_1^{a_1}) \cup \ldots \cup ((p_1-1)p_1^{a_1-1}, p_1^{a_1}))$$

покрывает все числа, сравнимые с 0 по модулю p_1, но не сравнимые с 0 по модулю $p_1^{a_1}$. Поэтому

$$L(p_1^{a_1}) \leqslant (2a_1-1)(p_1-1)-1.$$

Покажем, что

$$L(p_1^{a_1}) \geqslant (2a_1-1)(p_1-1)-1.$$

Рассмотрим множества

$$X_1 := \{1, 2, \ldots, p_1-3, p_1-1\},$$

$$X_2^1 := \{p_1-2, 2p_1-2, \ldots, (p_1-1)p_1-2\},$$
$$X_2^2 := \{p_1^2-2, 2p_1^2-2, \ldots, (p_1-1)p_1^2-2\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X_2^{a_1-1} := \{p_1^{a_1-1}-2, 2p_1^{a_1-1}-2, \ldots, (p_1-1)p_1^{a_1-1}-2\},$$
$$X_3^1 := \{p_1, 2p_1, \ldots, (p_1-1)p_1\},$$
$$X_3^2 := \{p_1^2, 2p_1^2, \ldots, (p_1-1)p_1^2\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X_3^{a_1-1} := \{p_1^{a_1-1}, 2p_1^{a_1-1}, \ldots, (p_1-1)p_1^{a_1-1}\},$$
$$Y := (2^{a_1}-2, 2^{a_1}) \cup (2^{a_1}, 2^{a_1}).$$

Покажем, что множество

$$X := X_1 \cup X_2^1 \cup \ldots \cup X_2^{a_1-1} \cup X_3^1 \cup \ldots \cup X_3^{a_1-1}$$

будет опорным семейством для множества Y. Пусть $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$. Нужно доказать, что выполнено хотя бы одно из двух условий:

$$(x_1, x_2-x_1) \cap (n-2, n) \neq \emptyset, \tag{11}$$

$$(x_1, x_2 - x_1) \cap (n, n) \neq \emptyset. \tag{12}$$

Возможны случаи:
Случай 1.
$x_1 \in X_1, x_2 \in X_1$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = 1$ и по лемме 1 верно (11).
Случай 2.
$x_1 \in X_1, x_2 \in X_2^i$ или $x_2 \in X_1, x_1 \in X_2^i$. Случай аналогичен случаю 1.
Случай 3.
$x_1 \in X_1, x_2 \in X_3^i$ или $x_2 \in X_1, x_1 \in X_3^i$. Случай аналогичен случаю 1.
Случай 4.
$x_1 \in X_2^i, x_2 \in X_2^i$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = p_1^i$ и по лемме 1 верно (11).
Случай 5.
$x_1 \in X_2^i, x_2 \in X_2^j, i < j$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = p_1^i$ и поэтому по лемме 1 получаем (11).
Случай 6.
$x_1 \in X_2^i, x_2 \in X_2^j, i > j$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = p_1^j$ и поэтому по лемме 1 получаем (11).
Случай 7.
$x_1 \in X_2^i, x_2 \in X_3^j$. Случай аналогичен случаю 1.
Случай 8.
$x_1 \in X_3^i, x_2 \in X_3^i$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = p_1^i$ и по лемме 1 верно (12).
Случай 9.
$x_1 \in X_3^i, x_2 \in X_3^j, i < j$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = p_1^i$ и поэтому по лемме 1 верно (12).
Случай 10.
$x_1 \in X_3^i, x_2 \in X_3^j, i > j$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = p_1^j$ и поэтому по лемме 1 верно (12).
Разбор случаев завершен. Мы показали, что множество X будет опорным семейством для Y. Но в множестве X всего

$$|X_1| + |X_2^1| + |X_2^2| + \ldots + |X_2^{a_1-1}| + |X_3^1| + |X_3^2| + \ldots + |X_3^{a_1-1}| =$$

$$= (p_1 - 2) + 2(a_1 - 1)(p_1 - 1) = (2a_1 - 1)(p_1 - 1) - 1$$

элементов. Поэтому по лемме 2 получаем

$$L(p_1^{a_1}) \geqslant (2a_1 - 1)(p_1 - 1) - 1.$$

В случае, когда $p_1 > 2, t = 1$, утверждение теоремы доказано.

Пусть $p_1 > 2, t > 1$. Докажем тогда, что

$$L(n) = L(p_1^{a_1} \ldots p_t^{a_t}) = (2a_1 - 1)(p_1 - 1) + \ldots + (2a_t - 1)(p_t - 1).$$

Для доказательства верхней оценки нужно представить $T(n)$ в виде объединения

$$(2a_1-1)(p_1-1)+\ldots+(2a_t-1)(p_t-1)$$

арифметических прогрессий. Это можно сделать следующим образом:

$$T(n)=((1,p_1)\cup(2,p_1)\cup\ldots\cup(p_1-3,p_1)\cup(p_1-1,p_1))\cup$$
$$((1,p_2)\cup(2,p_2)\cup\ldots\cup(p_2-3,p_2)\cup(p_2-1,p_2))\cup$$
$$\cup\ldots\cup((1,p_t)\cup(2,p_t)\cup\ldots\cup(p_t-3,p_t)\cup(p_t-1,p_t))\cup$$
$$\cup((1\cdot p_1p_2\ldots p_t-2,p_1^2p_2\ldots p_t)\cup(2\cdot p_1p_2\ldots p_t-2,p_1^2p_2\ldots p_t)\cup$$
$$\cup\ldots\cup((p_1-1)\cdot p_1p_2\ldots p_t-2,p_1^2p_2\ldots p_t))\cup$$
$$\cup((1\cdot p_1^2p_2\ldots p_t-2,p_1^3p_2\ldots p_t)\cup(2\cdot p_1^2p_2\ldots p_t-2,p_1^3p_2\ldots p_t)\cup$$
$$\cup\ldots\cup((p_2-1)\cdot p_1^2p_2\ldots p_t-2,p_1^3p_2\ldots p_t))\cup$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\cup((1\cdot p_1^{a_1-1}p_2\ldots p_t-2,p_1^{a_1}p_2\ldots p_t)\cup$$
$$\cup(2\cdot p_1^{a_1-1}p_2\ldots p_t-2,p_1^{a_1}p_2\ldots p_t)\cup$$
$$\cup\ldots\cup((p_1-1)\cdot p_1^{a_1-1}p_2\ldots p_t-2,p_1^{a_1}p_2\ldots p_t))\cup$$
$$\cup((1\cdot p_1^{a_1}p_2\ldots p_t-2,p_1^{a_1}p_2^2p_3\ldots p_t)\cup$$
$$\cup(2\cdot p_1^{a_1}p_2\ldots p_t-2,p_1^{a_1}p_2^2p_3\ldots p_t)\cup$$
$$\cup\ldots\cup((p_2-1)\cdot p_1^{a_1}p_2\ldots p_t-2,p_1^{a_1}p_2^2p_3\ldots p_t))\cup$$
$$\cup((1\cdot p_1^{a_1}p_2^2p_3\ldots p_t-2,p_1^{a_1}p_2^3p_3\ldots p_t)\cup$$
$$\cup(2\cdot p_1^{a_1}p_2^2p_3\ldots p_t-2,p_1^{a_1}p_2^3p_3\ldots p_t)\cup$$
$$\cup\ldots\cup((p_2-1)\cdot p_1^{a_1}p_2^2p_3\ldots p_t-2,p_1^{a_1}p_2^3p_3\ldots p_t))\cup$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\cup((1\cdot p_1^{a_1}p_2^{a_2-1}p_3\ldots p_t-2,p_1^{a_1}p_2^{a_2}p_3\ldots p_t)\cup$$
$$\cup(2\cdot p_1^{a_1}p_2^{a_2-1}p_3\ldots p_t-2,p_1^{a_1}p_2^{a_2}p_3\ldots p_t)\cup$$
$$\cup\ldots\cup((p_2-1)\cdot p_1^{a_1}p_2^{a_2-1}p_3\ldots p_t-2,p_1^{a_1}p_2^{a_2}p_3\ldots p_t))\cup$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\cup((1\cdot p_1^{a_1}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t-2,p_1^{a_1}\ldots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2)\cup$$

$$\cup(2 \cdot p_1^{a_1} \dots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t - 2, p_1^{a_1} \dots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^2) \cup$$

$$\cup \dots \cup ((p_t - 1) \cdot p_1^{a_1} \dots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t - 2, p_1^{a_1} \dots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^2)) \cup$$

$$\cup((1 \cdot p_1^{a_2} \dots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^2 - 2, p_1^{a_1} \dots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^3) \cup$$

$$\cup(2 \cdot p_1^{a_1} \dots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^2 - 2, p_1^{a_1} \dots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^3) \cup$$

$$\cup \dots \cup ((p_t - 1) \cdot p_1^{a_1} \dots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^2 - 2, p_1^{a_1} \dots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^3)) \cup$$

. . . .

$$\cup((1 \cdot p_1^{a_1} \dots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^{a_t - 1} - 2, p_1^{a_1} \dots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^{a_t}) \cup$$

$$\cup(2 \cdot p_1^{a_1} \dots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^{a_t - 1} - 2, p_1^{a_1} \dots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^{a_t}) \cup$$

$$\cup \dots \cup ((p_t - 1) \cdot p_1^{a_1} \dots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^{a_t - 1} - 2, p_1^{a_1} \dots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^{a_t})) \cup$$

$$\cup((1 \cdot p_1 p_2 \dots p_t, p_1^2 p_2 \dots p_t) \cup (2 \cdot p_1 p_2 \dots p_t, p_1^2 p_2 \dots p_t) \cup$$

$$\cup \dots \cup ((p_1 - 1) \cdot p_1 p_2 \dots p_t, p_1^2 p_2 \dots p_t)) \cup$$

$$\cup((1 \cdot p_1^2 p_2 \dots p_t, p_1^3 p_2 \dots p_t) \cup (2 \cdot p_1^2 p_2 \dots p_t, p_1^3 p_2 \dots p_t) \cup$$

$$\cup \dots \cup ((p_1 - 1) \cdot p_1^2 p_2 \dots p_t, p_1^3 p_2 \dots p_t)) \cup$$

. . . .

$$\cup((1 \cdot p_1^{a_1 - 1} p_2 \dots p_t, p_1^{a_1} p_2 \dots p_t) \cup (2 \cdot p_1^{a_2 - 1} p_2 \dots p_t, p_1^{a_1} p_2 \dots p_t) \cup$$

$$\cup \dots \cup ((p_1 - 1) \cdot p_1^{a_1 - 1} p_2 \dots p_t, p_1^{a_1} p_2 \dots p_t)) \cup$$

$$\cup((1 \cdot p_1^{a_1} p_2 \dots p_t, p_1^{a_1} p_2^2 p_3 \dots p_t) \cup$$

$$\cup(2 \cdot p_1^{a_1} p_2 \dots p_t, p_1^{a_1} p_2^2 p_3 \dots p_t) \cup$$

$$\cup \dots \cup ((p_2 - 1) \cdot p_1^{a_1} p_2 \dots p_t, p_1^{a_1} p_2^2 p_3 \dots p_t)) \cup$$

$$\cup((1 \cdot p_1^{a_1} p_2^2 p_3 \dots p_t, p_1^{a_1} p_2^3 p_3 \dots p_t) \cup$$

$$\cup(2 \cdot p_1^{a_1} p_2^2 p_3 \dots p_t, p_1^{a_1} p_2^3 p_3 \dots p_t) \cup$$

$$\cup \dots \cup ((p_2 - 1) \cdot p_1^{a_1} p_2^2 p_3 \dots p_t, p_1^{a_1} p_2^3 p_3 \dots p_t)) \cup$$

. . . .

$$\cup((1 \cdot p_1^{a_1} p_2^{a_2 - 1} p_3 \dots p_t, p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3 \dots p_t) \cup$$

$$\cup(2 \cdot p_1^{a_1} p_2^{a_2 - 1} p_3 \dots p_t, p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3 \dots p_t) \cup$$

$$\cup \dots \cup ((p_2 - 1) \cdot p_1^{a_1} p_2^{a_2 - 1} p_3 \dots p_t, p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3 \dots p_t)) \cup$$

. . . .

$$\cup((1\cdot p_1^{a_1}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t,p_1^{a_1}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2)\cup$$
$$\cup(2\cdot p_1^{a_1}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t,p_1^{a_1}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2)\cup$$
$$\cup\ldots\cup((p_t-1)\cdot p_1^{a_1}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t,p_1^{a_1}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2))\cup$$
$$\cup((1\cdot p_1^{a_1}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2,p_1^{a_1}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^3)\cup$$
$$\cup(2\cdot p_1^{a_1}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2,p_1^{a_1}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^3)\cup$$
$$\cup\ldots\cup((p_t-1)\cdot p_1^{a_1}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^2,p_1^{a_1}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^3))\cup$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\cup((1\cdot p_1^{a_1}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t-1},p_1^{a_1}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t})\cup$$
$$\cup(2\cdot p_1^{a_1}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t-1},p_1^{a_1}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t})\cup$$
$$\cup\ldots\cup((p_t-1)\cdot p_1^{a_1}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t-1},p_1^{a_1}\dots p_{t-1}^{a_{t-1}}p_t^{a_t}))\cup$$
$$\cup((2a_1,2p_1p_2)\cup(2a_2,2p_2p_3)\ldots\cup(2a_{t-1},2p_{t-1}p_t)\cup(2a_t,2p_tp_1)),$$

где при $1\leqslant i\leqslant t-1$ имеем

$$1\leqslant a_i\leqslant p_ip_{i+1},\quad a_i\equiv 0\mod p_i,\quad a_i\equiv -1\mod p_{i+1}$$

и при $i=t$ имеем

$$1\leqslant a_t\leqslant p_1p_t,\quad a_t\equiv 0\mod p_t,\quad a_t\equiv -1\mod p_1.$$

Здесь серия

$$((1,p_1)\cup(2,p_1)\cup\ldots\cup(p_1-3,p_1)\cup(p_1-1,p_1))\cup$$
$$((1,p_2)\cup(2,p_2)\cup\ldots\cup(p_2-3,p_2)\cup(p_2-1,p_2))\cup$$
$$\cup\ldots\cup((1,p_t)\cup(2,p_t)\cup\ldots\cup(p_t-3,p_t)\cup(p_t-1,p_t))$$

накрывает все числа, не сравнимые с 0 и -2 по модулям $p_1,\ldots,p_t$. Серия

$$((1\cdot p_1p_2\dots p_t-2,p_1^2p_2\dots p_t)\cup(2\cdot p_1p_2\dots p_t-2,p_1^2p_2\dots p_t)\cup$$
$$\cup\ldots\cup((p_1-1)\cdot p_1p_2\dots p_t-2,p_1^2p_2\dots p_t))\cup$$
$$\cup((1\cdot p_1^2p_2\dots p_t-2,p_1^3p_2\dots p_t)\cup(2\cdot p_1^2p_2\dots p_t-2,p_1^3p_2\dots p_t)\cup$$
$$\cup\ldots\cup((p_2-1)\cdot p_1^2p_2\dots p_t-2,p_1^3p_2\dots p_t))\cup$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\begin{gathered}
\cup((1 \cdot p_1^{a_1-1} p_2 \dots p_t - 2, p_1^{a_1} p_2 \dots p_t)\cup \\
\cup(2 \cdot p_1^{a_1-1} p_2 \dots p_t - 2, p_1^{a_1} p_2 \dots p_t)\cup \\
\cup \dots \cup ((p_1 - 1) \cdot p_1^{a_1-1} p_2 \dots p_t - 2, p_1^{a_1} p_2 \dots p_t))\cup \\
\cup((1 \cdot p_1^{a_1} p_2 \dots p_t - 2, p_1^{a_1} p_2^2 p_3 \dots p_t)\cup \\
\cup(2 \cdot p_1^{a_1} p_2 \dots p_t - 2, p_1^{a_1} p_2^2 p_3 \dots p_t)\cup \\
\cup \dots \cup ((p_2 - 1) \cdot p_1^{a_1} p_2 \dots p_t - 2, p_1^{a_1} p_2^2 p_3 \dots p_t))\cup \\
\cup((1 \cdot p_1^{a_1} p_2^2 p_3 \dots p_t - 2, p_1^{a_1} p_2^3 p_3 \dots p_t)\cup \\
\cup(2 \cdot p_1^{a_1} p_2^2 p_3 \dots p_t - 2, p_1^{a_1} p_2^3 p_3 \dots p_t)\cup \\
\cup \dots \cup ((p_2 - 1) \cdot p_1^{a_1} p_2^2 p_3 \dots p_t - 2, p_1^{a_1} p_2^3 p_3 \dots p_t))\cup \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\cup((1 \cdot p_1^{a_1} p_2^{a_2-1} p_3 \dots p_t - 2, p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3 \dots p_t)\cup \\
\cup(2 \cdot p_1^{a_1} p_2^{a_2-1} p_3 \dots p_t - 2, p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3 \dots p_t)\cup \\
\cup \dots \cup ((p_2 - 1) \cdot p_1^{a_1} p_2^{a_2-1} p_3 \dots p_t - 2, p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3 \dots p_t))\cup \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\cup((1 \cdot p_1^{a_1} \dots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t - 2, p_1^{a_1} \dots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^2)\cup \\
\cup(2 \cdot p_1^{a_1} \dots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t - 2, p_1^{a_1} \dots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^2)\cup \\
\cup \dots \cup ((p_t - 1) \cdot p_1^{a_1} \dots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t - 2, p_1^{a_1} \dots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^2))\cup \\
\cup((1 \cdot p_1^{a_2} \dots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^2 - 2, p_1^{a_1} \dots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^3)\cup \\
\cup(2 \cdot p_1^{a_1} \dots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^2 - 2, p_1^{a_1} \dots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^3)\cup \\
\cup \dots \cup ((p_t - 1) \cdot p_1^{a_1} \dots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^2 - 2, p_1^{a_1} \dots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^3))\cup \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\cup((1 \cdot p_1^{a_1} \dots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^{a_t-1} - 2, p_1^{a_1} \dots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^{a_t})\cup \\
\cup(2 \cdot p_1^{a_1} \dots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^{a_t-1} - 2, p_1^{a_1} \dots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^{a_t})\cup \\
\cup \dots \cup ((p_t - 1) \cdot p_1^{a_1} \dots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^{a_t-1} - 2, p_1^{a_1} \dots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^{a_t}))
\end{gathered}$$

накрывает все числа, сравнимые с -2 по модулям $p_1, \dots, p_t$, но не сравнимые с -2 по модулю $p_1^{a_1} \dots p_t^{a_t}$. Серия

$$((1 \cdot p_1 p_2 \dots p_t, p_1^2 p_2 \dots p_t) \cup (2 \cdot p_1 p_2 \dots p_t, p_1^2 p_2 \dots p_t)\cup$$

$$\cup \ldots \cup ((p_1 - 1) \cdot p_1 p_2 \ldots p_t, p_1^2 p_2 \ldots p_t))\cup$$

$$\cup((1 \cdot p_1^2 p_2 \ldots p_t, p_1^3 p_2 \ldots p_t) \cup (2 \cdot p_1^2 p_2 \ldots p_t, p_1^3 p_2 \ldots p_t)\cup$$

$$\cup \ldots \cup ((p_1 - 1) \cdot p_1^2 p_2 \ldots p_t, p_1^3 p_2 \ldots p_t))\cup$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cup((1 \cdot p_1^{a_1 - 1} p_2 \ldots p_t, p_1^{a_1} p_2 \ldots p_t)\cup$$

$$\cup(2 \cdot p_1^{a_2 - 1} p_2 \ldots p_t, p_1^{a_1} p_2 \ldots p_t)\cup$$

$$\cup \ldots \cup ((p_1 - 1) \cdot p_1^{a_1 - 1} p_2 \ldots p_t, p_1^{a_1} p_2 \ldots p_t))\cup$$

$$\cup((1 \cdot p_1^{a_1} p_2 \ldots p_t, p_1^{a_1} p_2^2 p_3 \ldots p_t)\cup$$

$$\cup(2 \cdot p_1^{a_1} p_2 \ldots p_t, p_1^{a_1} p_2^2 p_3 \ldots p_t)\cup$$

$$\cup \ldots \cup ((p_2 - 1) \cdot p_1^{a_1} p_2 \ldots p_t, p_1^{a_1} p_2^2 p_3 \ldots p_t))\cup$$

$$\cup((1 \cdot p_1^{a_1} p_2^2 p_3 \ldots p_t, p_1^{a_1} p_2^3 p_3 \ldots p_t)\cup$$

$$\cup(2 \cdot p_1^{a_1} p_2^2 p_3 \ldots p_t, p_1^{a_1} p_2^3 p_3 \ldots p_t)\cup$$

$$\cup \ldots \cup ((p_2 - 1) \cdot p_1^{a_1} p_2^2 p_3 \ldots p_t, p_1^{a_1} p_2^3 p_3 \ldots p_t))\cup$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cup((1 \cdot p_1^{a_1} p_2^{a_2 - 1} p_3 \ldots p_t, p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3 \ldots p_t)\cup$$

$$\cup(2 \cdot p_1^{a_1} p_2^{a_2 - 1} p_3 \ldots p_t, p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3 \ldots p_t)\cup$$

$$\cup \ldots \cup ((p_2 - 1) \cdot p_1^{a_1} p_2^{a_2 - 1} p_3 \ldots p_t, p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3 \ldots p_t))\cup$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cup((1 \cdot p_1^{a_1} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t, p_1^{a_1} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^2)\cup$$

$$\cup(2 \cdot p_1^{a_1} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t, p_1^{a_1} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^2)\cup$$

$$\cup \ldots \cup ((p_t - 1) \cdot p_1^{a_1} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t, p_1^{a_1} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^2))\cup$$

$$\cup((1 \cdot p_1^{a_1} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^2, p_1^{a_1} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^3)\cup$$

$$\cup(2 \cdot p_1^{a_1} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^2, p_1^{a_1} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^3)\cup$$

$$\cup \ldots \cup ((p_t - 1) \cdot p_1^{a_1} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^2, p_1^{a_1} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^3))\cup$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cup((1 \cdot p_1^{a_1} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^{a_t - 1}, p_1^{a_1} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^{a_t})\cup$$

$$\cup(2 \cdot p_1^{a_1} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^{a_t - 1}, p_1^{a_1} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^{a_t})\cup$$

$$\cup \ldots \cup ((p_t - 1) \cdot p_1^{a_1} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^{a_t - 1}, p_1^{a_1} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^{a_t}))$$

накрывает все числа, сравнимые с 0 по модулям $p_1, \ldots, p_t$, но не сравнимые с 0 по модулю $p_1^{a_1} \ldots p_t^{a_t}$. Наконец, серия

$$(2a_1, 2p_1p_2) \cup (2a_2, 2p_2p_3) \ldots \cup (2a_{t-1}, 2p_{t-1}p_t) \cup (2a_t, 2p_tp_1)$$

накрывает все числа, сравнимые с 0 или -2 по модулям $p_1, \ldots, p_t$, но не сравнимые с 0 или -2 по модулю $p_1 \ldots p_t$. Поэтому

$$L(n) \leqslant \sum_{i=1}^{t} (p_i - 2) + 2\sum_{i=1}^{t} (a_i - 1)(p_i - 1) + t =$$

$$= (2a_1 - 1)(p_1 - 1) + \ldots + (2a_t - 1)(p_t - 1).$$

Для доказательства нижней оценки введем обозначения

$$X_1^{1,1} := \{1 \cdot p_1 p_2^{a_2} \ldots p_t^{a_t} - 2, \ldots, (p_1 - 1) \cdot p_1 p_2^{a_2} \ldots p_t^{a_t} - 2\},$$

$$X_1^{1,2} := \{1 \cdot p_1^2 p_2^{a_2} \ldots p_t^{a_t} - 2, \ldots, (p_1 - 1) \cdot p_1^2 p_2^{a_2} \ldots p_t^{a_t} - 2\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X_1^{1,a_1-1} := \{1 \cdot p_1^{a_1-1} p_2^{a_2} \ldots p_t^{a_t} - 2, \ldots, (p_1 - 1) \cdot p_1^{a_1-1} p_2^{a_2} \ldots p_t^{a_t} - 2\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X_1^{t,1} := \{1 \cdot p_1^{a_1} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t - 2, \ldots, (p_t - 1) \cdot p_1^{a_1} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t - 2\},$$

$$X_1^{t,2} := \{1 \cdot p_1^{a_1} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^2 - 2, \ldots, (p_t - 1) \cdot p_1^{a_1} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^2 - 2\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X_1^{t,a_t-1} := \{1 \cdot p_1^{a_1} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^{a_t-1} - 2, \ldots, (p_t - 1) \cdot p_1^{a_1} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^{a_t-1} - 2\},$$

$$X_2^{1,1} := \{1 \cdot p_1 p_2^{a_2} \ldots p_t^{a_t}, \ldots, (p_1 - 1) \cdot p_1 p_2^{a_2} \ldots p_t^{a_t}\},$$

$$X_2^{1,2} := \{1 \cdot p_1^2 p_2^{a_2} \ldots p_t^{a_t}, \ldots, (p_1 - 1) \cdot p_1^2 p_2^{a_2} \ldots p_t^{a_t}\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X_2^{1,a_1-1} := \{1 \cdot p_1^{a_1-1} p_2^{a_2} \ldots p_t^{a_t}, \ldots, (p_1 - 1) \cdot p_1^{a_1-1} p_2^{a_2} \ldots p_t^{a_t}\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X_2^{t,1} := \{1 \cdot p_1^{a_1} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t, \ldots, (p_t - 1) \cdot p_1^{a_1} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t\},$$

$$X_2^{t,2} := \{1 \cdot p_1^{a_1} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^2, \ldots, (p_t - 1) \cdot p_1^{a_1} \ldots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^2\},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$X_2^{t,a_t-1} := \{1 \cdot p_1^{a_1} \dots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^{a_t-1}, \dots, (p_t - 1) \cdot p_1^{a_1} \dots p_{t-1}^{a_{t-1}} p_t^{a_t-1}\},$$

$$X_3^1 := \{b_{1,1}, \dots, b_{1,p_1-2}\},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$X_3^t := \{b_{t,1}, \dots, b_{t,p_t-2}\},$$

$$X_4 := \{c_1, \dots, c_t\},$$

$$Y := (p_1^{a_1} \dots p_t^{a_t} - 2, p_1^{a_1} \dots p_t^{a_t}) \cup (p_1^{a_1} \dots p_t^{a_t}, p_1^{a_1} \dots p_t^{a_t}),$$

где

$$b_{i,j} \equiv j \mod p_i^{a_i}, \quad b_{i,j} \equiv 0 \mod \frac{n}{p_i^{a_i}},$$

$$c_i \equiv -1 \mod p_i^{a_i}, \quad c_i \equiv 0 \mod \frac{n}{p_i^{a_i}}.$$

Покажем, что множество

$$X := X_1^{1,1} \cup \dots \cup X_1^{t,a_t-1} \cup X_2^{1,1} \cup \dots \cup X_2^{t,a_t-1} \cup X_3^1 \cup \dots \cup X_3^t \cup X_4$$

будет опорным семейством для множества Y. Пусть $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$. Нужно доказать, что выполнено хотя бы одно из двух условий:

$$(x_1, x_2 - x_1) \cap (n-2, n) \neq \emptyset, \tag{13}$$

$$(x_1, x_2 - x_1) \cap (n, n) \neq \emptyset. \tag{14}$$

Возможны случаи:

Случай 1.

$x_1 \in X_1^{i,j_1}, x_2 \in X_1^{i,j_2}$, $j_1 \leqslant j_2$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = \frac{n}{p_i^{a_i}} p_i^{j_1}$ и по лемме 1 верно (13).

Случай 2.

$x_1 \in X_1^{i,j_1}, x_2 \in X_1^{i,j_2}$, $j_1 > j_2$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = \frac{n}{p_i^{a_i}} p_i^{j_2}$ и по лемме 1 верно (13).

Случай 3.

$x_1 \in X_1^{i_1,j_1}, x_2 \in X_1^{i_2,j_2}$, $i_1 \neq i_2$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = \frac{n}{p_{i_1}^{a_{i_1}} p_{i_2}^{a_{i_2}}} p_{i_1}^{j_1} p_{i_2}^{j_2}$ и по лемме 1 верно (13).

Случай 4.

$x_1 \in X_1^{i_1,j_1}, x_2 \in X_2^{i_2,j_2}$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = 1$ и по лемме 1 получаем, что верно (13).

Случай 5.
$x_1 \in X_1^{i,j}, x_2 \in X_3^k$ или $x_2 \in X_1^{i,j}, x_1 \in X_3^k$. Случай аналогичен случаю 4.
Случай 6.
$x_1 \in X_1^{i,j}, x_2 = c_i$ или $x_2 \in X_1^{i,j}, x_1 = c_i$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = p_i^j$ и по лемме 1 верно (13).
Случай 7.
$x_1 \in X_1^{i,j}, x_2 = c_k,\ k \neq i$ или $x_2 \in X_1^{i,j}, x_1 = c_k,\ k \neq i$. Тогда верно, что НОД$(x_2 - x_1, n) = p_i^{a_i}$ и по лемме 1 получаем (13).
Случай 8.
$x_1 \in X_2^{i,j_1}, x_2 \in X_2^{i,j_2},\ j_1 \leqslant j_2$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = \frac{n}{p_i^{a_i}} p_i^{j_1}$ и по лемме 1 верно (14).
Случай 9.
$x_1 \in X_2^{i,j_1}, x_2 \in X_2^{i,j_2},\ j_1 > j_2$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = \frac{n}{p_i^{a_i}} p_i^{j_2}$ и по лемме 1 верно (14).
Случай 10.
$x_1 \in X_2^{i_1,j_1}, x_2 \in X_2^{i_2,j_2},\ i_1 \neq i_2$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = \frac{n}{p_{i_1}^{a_{i_1}} p_{i_2}^{a_{i_2}}} p_{i_1}^{j_1} p_{i_2}^{j_2}$ и по лемме 1 верно (14).
Случай 11.
$x_1 \in X_2^{i,j}, x_2 \in X_3^i$ или $x_2 \in X_1^{i,j}, x_1 \in X_3^i$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = \frac{n}{p_i^{a_i}}$ и по лемме 1 верно (14).
Случай 12.
$x_1 \in X_2^{i,j}, x_2 \in X_3^k, i \neq k$ или $x_2 \in X_2^{i,j}, x_1 \in X_3^k, i \neq k$. Тогда верно, что НОД$(x_2 - x_1, n) = \frac{n}{p_i^{a_i} p_k^{a_k}} p_i^j$ и по лемме 1 получаем (14).
Случай 13.
$x_1 \in X_2^{i,j}, x_2 = c_i$ или $x_2 \in X_2^{i,j}, x_1 = c_i$. Случай аналогичен случаю 11.
Случай 14.
$x_1 \in X_2^{i,j}, x_2 = c_k,\ k \neq i$ или $x_2 \in X_2^{i,j}, x_1 = c_k,\ k \neq i$. Случай аналогичен случаю 12.
Случай 15.
$x_1 \in X_3^i, x_2 \in X_3^i$. Случай аналогичен случаю 11.
Случай 16.
$x_1 \in X_3^i, x_2 \in X_3^j,\ i \neq j$. Тогда НОД$(x_2 - x_1, n) = \frac{n}{p_i^{a_i} p_j^{a_j}}$ и по лемме 1 верно (14).
Случай 17.
$x_1 \in X_3^i, x_2 = c_i$ или $x_1 \in X_3^i, x_2 = c_i$. Случай аналогичен случаю 11.
Случай 18.

$x_1 \in X_3^i, x_2 = c_j, i \neq j$ или $x_2 \in X_3^i, x_1 = c_j, i \neq j$. Случай аналогичен случаю 16.
Случай 19.
$x_1 = c_i, x_2 = c_j$. Случай аналогичен случаю 16.
Разбор случаев завершен. Мы показали, что множество X будет опорным семейством для Y. Но в множестве X всего

$$|X_1^{1,1}| + \ldots + |X_1^{t,a_t-1}| + |X_2^{1,1}| + \ldots + |X_2^{t,a_t-1}| + |X_3^1| + \ldots + |X_3^t| + |X_4| =$$

$$= 2(p_1-1)(a_1-1) + \ldots + 2(p_t-1)(a_t-1) + (p_1-2) + \ldots + (p_t-2) + t =$$
$$= (2a_1-1)(p_1-1) + \ldots + (2a_t-1)(p_t-1)$$

элементов. Поэтому по лемме 2 получаем

$$L(p_1^{a_1} \ldots p_t^{a_t}) \geqslant (2a_1-1)(p_1-1) + \ldots + (2a_t-1)(p_t-1).$$

В случае, когда $p_1 > 2, t > 1$, утверждение теоремы доказано. ■

Список литературы

[1] П. С. Дергач, Э. С. Айрапетов. *О прогрессивном разбиении некоторых подмножеств натурального ряда.* Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 3, М., Сс. 79-86.

[2] П. С. Дергач. *О каноническом регулярном представлении S-тонких языков.* Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 1, М., Сс. 211-242.системы, 2014. Т.18, вып. 1, М., Сс. 211-242.

[3] П. С. Дергач. *О проблеме вложения допустимых классов.* Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 2, М., Сс. 143-174.

[4] П. С. Дергач. *О двух размерностях спектров тонких языков.* Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 3, М., Сс. 155-174.

[5] П. С. Дергач, Э. С. Айрапетов. *О прогрессивном разбиении последовательности натуральных чисел, имеющей пропуск длины 2.* Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 2, М., Сс. 67-86. Д. Е. Александров. *Эффективные методы реализации проверки содержания сетевых пакетов регулярными выражениями.* Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 1, М., Сс. 37-60.

[6] Д. Н. Бабин. *Частотные регулярные языки.* Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 1, М., Сс. 205-210.

[7] Д. Е. Александров. *Об оценках автоматной сложности распознавания классов регулярных языков.* Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 4, М., Сс. 161-190.

[8] В. М. Дементьев. *О звездной высоте регулярного языка и циклической сложности минимального автомата.* Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 4, М., Сс. 215-222.

[9] И. Е. Иванов. *О сохранении периодических последовательностей автоматами с магазинной памятью с однобуквенным магазином.* Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 1, М., Сс. 145-160.

[10] А. А. Петюшко. *О контекстно-свободных биграмных языках.* Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 2, М., Сс. 187-208.

[11] И. Е. Иванов. *Нижняя оценка на максимальную длину периода выходной последовательности автономного автомата с магазинной памятью.* Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 3, М., Сс. 175-194.

[12] В. А. Орлов. *О конечных автоматах с максимальной степенью различимости состояний.* Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 1, М., Сс. 213-222.

[13] П. С. Дергач. *О проблеме проверки однозначности алфавитного декодирования в классе регулярных языков с полиномиальной функцией роста.* Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 2, М., Сс. 147-202.

[14] А. М. Миронов. *Основные понятия теории вероятностных автоматов.* Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 2, М., Сс. 283-330.

[15] А. А. Петюшко, Д. Н. Бабин. *Классификация Хомского для матриц биграммных языков.* Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 2, М., Сс. 331-336.

[16] С. Б. Родин. *О связи линейно реализуемых автоматов и автоматов с максимальной вариативностью относительно кодирования состояний.* Интеллектуальные системы, 2016. Т.20, вып. 2, М., Сс. 337-348.