Порядковое представление распределения меры возможности

Д. А. Балакин

В статье исследуется представление упорядоченности возможностей [1] элементарных событий, с точностью до изоморфизма задающее меру возможности, матрицами и функциями попарных сравнений значений возможностей, его свойства и операции над такими представлениями, в частности маргинализация совместного распределения, расчет условного распределения по совместному, экспертное восстановление распределения и принятие оптимальных решений.

Ключевые слова: частичный порядок, конечное множество, восстановление порядка, сортировка, сравнение.

Введение

В первом варианте теории возможностей [1] мера возможности принимает значения в шкале $\mathcal{L} = ([0,1], \leqslant, +, \times)$, определенной как отрезок $[0,1]$ с естественной упорядоченностью $\leqslant$ и операциями $+ : [0,1]^2 \to [0,1] : a + b \stackrel{\text{def}}{=} \max\{a,b\}$ и $\times : [0,1]^2 \to [0,1] : a \times b \stackrel{\text{def}}{=} \min\{a,b\}$. Группа автоморфизмов $\mathcal{L}$ порождается группой Γ строго монотонных непрерывных функций $\gamma(\cdot) : [0,1] \to [0,1]$, $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$, сохраняющих упорядоченность $\leqslant$, с композицией «$\circ$» в качестве групповой операции. Это означает, что $\forall \gamma \in \Gamma$ $\gamma[0,1] = [0,1]$, $\forall\, a, b \in [0,1]$ $\gamma(a * b) = \gamma(a) * \gamma(b)$, где $*$ — символ любой из бинарных операций: сложения $+$ и умножения $\times$, и для бинарных отношений $a \leqslant b \Leftrightarrow \gamma(a) \leqslant \gamma(b)$. [1] Каждый автоморфизм $\gamma : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ определяет изоморфизм $\gamma : \mathcal{L} \to \gamma\mathcal{L}$ следующим образом: $\forall a \in \mathcal{L}$ $\forall \gamma \in \Gamma$ $a \mapsto \gamma(a) \in \gamma\mathcal{L}$, $a + b \mapsto \gamma(a + b) = \gamma(a) + \gamma(b)$, $a \times b \mapsto \gamma(a \times b) = \gamma(a) \times \gamma(b)$, $a \leqslant b \Leftrightarrow \gamma(a) \leqslant \gamma(b)$, $a, b \in \mathcal{L}$. Обозначим

[1] Из этого и требований непрерывности операций $* : [0,1]^2 \to [0,1]$, коммутативности $*$ и свойств 0 и 1: $a + 0 = a \times 1 = a$, $a \in [0,1]$ следуют равенства $a + b = \max\{a,b\}$, $a \times b = \min\{a,b\}$, $a, b \in [0,1]$ [1].

$\gamma\mathcal{L}$, $\gamma \in \overline{\Gamma}$, где $\overline{\Gamma}$ — группа изоморфизмов, отвечающая группе Γ, шкалу, изоморфную шкале $\mathcal{L}$ и назовём её «координатным представлением» шкалы $\mathcal{L}$. Будучи сформулированными в некоторых шкалах (координатных представлениях) $\mathcal{L}'$ и $\mathcal{L}''$, модели считаются эквивалентными, если существует шкала $\mathcal{L} = \gamma'\mathcal{L}' = \gamma''\mathcal{L}''$, $\gamma', \gamma'' \in \overline{\Gamma}$, в которой их формулировки совпадают, а содержательно истолкованы могут быть только те модели, формулировки которых не зависят от выбора (координатного представления) шкалы $\mathcal{L}$ и, следовательно, их содержание одинаково для любых исследователей, для которых координатные представления играют роль «систем отсчета».

Таким образом, с точки зрения содержательной интерпретации существенна только упорядоченность различных значений возможности, сохраняющаяся при любом непрерывном изотонном отображении шкалы значений возможности на себя, а не сами эти значения. Поэтому представляет интерес инвариантное относительно выбора шкалы значений возможности представление возможности $\mathrm{P} : \mathcal{X} \to \mathcal{L}$. Такое представление особенно полезно при построении совокупной оценки возможности по распределениям возможностей, полученным из различных источников и потому, возможно, принимающим значения в различным шкалах.

Порядковые представления меры

Идея представления неопределенности с помощью отношения над множеством событий восходит к работам [2, 3], авторы которых искали порядковый вариант вероятности (успешно — в том смысле, что существует необходимое условие того, что некоторая упорядоченность есть упорядоченность по вероятности, безуспешно — в том смысле, что это условие не является достаточным, см. далее).

Рассматриваемое в [4] порядковое представление неопределенности есть (частичный, если некоторые события несравнимы) предпорядок $\leqslant_\mu$ на множестве $\mathcal{X}$ событий — подмножеств множества элементарных событий X, обладающий следующими свойствами:

1. Рефлексивность: $\forall A \in \mathcal{X}\ A \leqslant_\mu A$,

2. Нетривиальность: $\varnothing \leqslant_\mu X$,

3. Соответствие логическому выводу:

$$\forall A, B \in \mathcal{X}\ A \subset B \Rightarrow A \leqslant_\mu B \tag{1}$$

и $\forall A, B, C, D \in \mathcal{X}\ D \subset A \Rightarrow C \leqslant_\mu B$,

4. Транзитивность: $\forall A, B, C \in \mathcal{X}$ если $A \leqslant_\mu B$ и $B \leqslant_\mu C$, то $A \leqslant_\mu C$.

Такой предпорядок определяется некоторой нечеткой (в смысле Сугэно) мерой μ, если $\forall A, B \in \mathcal{X}$ $A \leqslant_\mu B \iff \mu(A) \leqslant \mu(B)$. Многие меры, используемые для моделирования неопределенности, удовлетворяют условиям 1.–4. В частности, сравнительные вероятности, введенные в [2] и подробно изученные в контексте принятия решений в [5] являются также линейными упорядоченностями и обладают свойством $\forall A, B, C \in \mathcal{X} : A \cap (B \cup C) = \varnothing$ $B \leqslant_\mu C \iff A \cup B \leqslant_\mu A \cup C$, но не любое такое соотношение соответствует хотя бы одной вероятности, и оно не описывается своим сужением на одноточечные множества.

Последним свойством (упорядоченность по мере описывает меру с точностью до изоморфизма), как показано в [4], обладают упорядоченности по возможности $\leqslant_{\mathrm{P}}$ и по необходимости $\leqslant_{\mathrm{N}}$. Они также являются линейными и имеют характерные свойства

$$\forall A, B, C \in \mathcal{X}\, (A \leqslant_{\mathrm{P}} B \& A \leqslant_{\mathrm{P}} C) \Rightarrow A \cup C \leqslant_{\mathrm{P}} B \cup C \tag{2}$$

для упорядоченности по возможности,

$$\forall A, B, C \in \mathcal{X}\, (A \leqslant_{\mathrm{N}} B \& A \leqslant_{\mathrm{N}} C) \Rightarrow A \cap C \leqslant_{\mathrm{N}} B \cap C$$

для упорядоченности по необходимости.

Как показано в [6], свойств 1, 2 и линейности упорядоченности на шкале значений возможности достаточно для того, чтобы однозначно определить упорядоченность возможностей любых множеств $A, B \in \mathcal{X}$, пользуясь только упорядоченностью возможностей элементарных событий: $\mathrm{P}(A) \leqslant \mathrm{P}(B) \iff \forall x_1 \in A\ \exists x_2 \in B : \mathrm{P}(\{x_1\}) \leqslant \mathrm{P}(\{x_2\})$. Поэтому в данной статье рассматриваются упорядоченности по распределениям мер возможности.

В [4] также рассмотрено соответствие между различными модификациями условия 2 и свойствами соответствующих им мер. В [7], ее расширенном варианте [8] и в [9] рассмотрен более общий случай упорядоченности при выполнении только условия 1.

Способы представления бинарных отношений (в частности, матрицами) и соответствие свойств отношений свойствам представляющих их матриц описаны в [10] и применительно к отношениям, описывающим предпочтения, в [11].

Случай конечного множества элементарных событий

Определение 1 ([1]). *Пусть* $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P}_\Omega)$ *— пространство с возможностью,* $(X, \mathcal{A})$ *— измеримое пространство,* $\mathcal{A}$ *—* σ*-алгебра подмножеств* X *и задана функция* $q : Y \to X$*, такая, что* $\forall A \in \mathcal{A}$ $q^{-1}(A) \overset{def}{=} \{y \in Y, q(y) \in A\} \in \mathcal{B}$*. Функция* q *называется* $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$*-измеримой и* задает нечеткий элемент ξ*, определенный на* $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P}_\Omega)$ *и принимающий значения в* $(X, \mathcal{A})$*. Нечеткий элемент* ξ определяет *на* $(X, \mathcal{A})$ возможность P^ξ*:* $\mathrm{P}^\xi(\xi \in A) = \mathrm{P}_\Omega(q^{-1}(A))$*,* $A \in \mathcal{A}$*, и поэтому называется* каноническим *для пространства с возможностью* $(X, \mathcal{A}, \mathrm{P}^\xi)$*.*

Определим функцию g^ξ*:* $X \to \mathcal{L}$*:* $g^\xi(x) = \mathrm{P}^\xi(\xi = x) = \mathrm{P}_\Omega(q^{-1}(\{x\}))$*,* $x \in X$*, называемую* распределением возможностей значений нечеткого элемента ξ, или короче — распределением нечеткого элемента ξ*.*

Как известно [1, §2.5.1, 3.9], [12], для нечеткого элемента ξ, принимающего конечное число значений $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, упорядоченность возможностей элементарных событий $p_j = \mathrm{P}(\{x_j\})$, $j = 1, \ldots, n$, и возможности пустого множества, по определению равной 0, может быть задана матрицей G^ξ размера $(n+1) \times (n+1)$, где

$$G^\xi_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } p_i \leqslant p_j, \\ 0, \text{ если } p_i > p_j, \end{cases} \quad p_{n+1} = 0, i, j = 1, \ldots, n+1.$$

Пусть значения матричных элементов рассматриваются как принадлежащие шкале значений возможности, $\mathcal{L}$, и определены операции сложения $+$ для матриц одинакового размера как поэлементного $\max$: $(A+B)_{ij} \overset{\text{def}}{=} \max\{A_{ij}, B_{ij}\}$, умножения $\times$, аналогичному обычному матричному умножению: если A — матрица $m \times n$, B — матрица $n \times q$, то $(A \times B)_{ij} = \max\limits_{k=1,\ldots,n} \min\{A_{ik}, B_{kj}\}$, $A \times B$ — матрица размера $m \times q$, отрицания $\overline{}$ как поэлементной замены 0 на 1 и наоборот: $\overline{A}_{ij} = \begin{cases} 1, A_{ij} = 0, \\ 0, A_{ij} = 1. \end{cases}$

В этих обозначениях матрица G, все элементы которой 0 или 1, описывает нечеткий элемент тогда и только тогда, когда:

$$G + G^T = E, \tag{3.1}$$

$$G + \overline{G \times G} = E, \tag{3.2}$$

$$\min_{i=1,\ldots,n} G_{i,n+1} = 0, \tag{3.3}$$

$$\min_{j=1,\dots,n} G_{n+1,j} = 1 \tag{3.4}$$

(требования полноты, транзитивности, существования хотя бы одного элементарного события с ненулевой возможностью и неотрицательности всех значений возможности, соответственно), где E — матрица, все элементы которой равны 1, G^T — транспонированная матрица G.

Доказательство.
Необходимость

1. Полнота (3.1): для любых $i, j = 1, \dots, n+1$ $p_i \leqslant p_j$ и/или $p_j \leqslant p_i$, поэтому $G_{ij} = 1$ и/или $G_{ji} = G^T_{ij} = 1$, т. е. $G_{ij} + G^T_{ij} = 1$.

2. Транзитивность (3.2): для любых $i, j = 1, \dots, n+1$ в силу линейности упорядоченности значений возможности $p_i \leqslant p_j$ или $p_j \leqslant p_i$, то есть $\max\{G_{ij}, G_{ji}\} = 1$ и по определению транзитивности если существует такое $k = 1, \dots, n+1$, что $p_i \leqslant p_k$ и $p_k \leqslant p_j$, то $p_i \leqslant p_j$, то есть $(\exists k = 1, \dots, n+1 : \min\{G_{ik}, G_{kj}\} = 1) \to G_{ij} = 1$, что эквивалентно $\max\{\overline{\max\{\min\{G_{ik}, G_{kj}\} | k = 1, \dots, n+1\}}, G_{ij}\} = 1$.

3. Существование хотя бы одного ненулевого значения (3.3): существует хотя бы одно $i = 1, \dots, n$, для которого $p_i > 0 = p_{n+1}$ (поскольку $\sup\limits_{i=1,\dots,n} p_i = 1$ по условию нормировки). Следовательно, для всех таких i $G_{i,n+1} = 0$, и поэтому $\min\limits_{i=1,\dots,n} G_{i,n+1} = 0$.

4. Неотрицательность (3.4): для всех $j = 1, \dots, n$ $p_j \geqslant 0 = p_{n+1}$, что эквивалентно $G_{n+1,j} = 1$ и, следовательно, $\min\limits_{j=1,\dots,n} G_{n+1,j} = 1$.

Достаточность

1. Полнота: если существуют такие $i, j = 1, \dots, n+1$, что $G_{ij} + G^T_{ij} = 0$, то $G_{ij} = G_{ji} = 0$ и, следовательно, одновременно $p_i < p_j$ и $p_j < p_i$, что невозможно при полноте упорядоченности.

2. Транзитивность: если существуют такие $i, j = 1, \dots, n+1$, что $\max\{\overline{\max\{\min\{G_{ik}, G_{kj}\} | k = 1, \dots, n+1\}}, G_{ij}\} = 0$, то $G_{ij} = 0$ и $\max\{\min\{G_{ik}, G_{kj}\} | k = 1, \dots, n+1\} = 1$, т. е. $G_{ij} = 0$ и $\exists k = 1, \dots, n+1$: $\min\{G_{ik}, G_{kj}\} = 1$, что эквивалентно одновременной истинности при некотором $k = 1, \dots, n+1$ $G_{ij} = 0$, $G_{ik} = G_{kj} = 1$, т. е. $p_i > p_j$, $p_i \leqslant p_k \leqslant p_j$, что невозможно при транзитивности упорядоченности.

3. Существование хотя бы одного ненулевого значения: если $\min\limits_{i=1,\ldots,n} G_{i,n+1} = 0$, то для всех $i = 1, \ldots, n$, для которых $G_{i,n+1} =$, $p_i > 0$.

4. Неотрицательность: если $\min\limits_{j=1,\ldots,n} G_{n+1,j} = 1$, то $\forall i = 1, \ldots, n$ $p_i \geqslant p_{n+1} = 0$.

■

В частности, из условий (3.1) и (3.2) следует отсутствие циклов (исключая, разумеется, циклы из элементарных событий с одинаковой возможностью), поскольку из (3.1) и (3.2) следует то, что упорядоченность множества $\{1, \ldots, n+1\}$, факторизованного по отношению эквивалентности $i \sim j \iff p_i = p_j$, определённая матрицей G, является линейной.

Замечание. Поскольку $\forall x, y \geqslant 1$ $x+y \geqslant 1$, $x+0 \geqslant 1$, $x \cdot y \geqslant 1$, $x \cdot 0 = 0$, где $+$ и $\cdot$ — символы обычного сложения и умножения, то при доопределении $\overline{x} = \begin{cases} 1, x = 0, \\ 0, x \geqslant 1, \end{cases}$ $x \in [0, +\infty)$, и замены равенства «$x = 1$» на неравенство «$x \geqslant 1$» и т.п. вместо описанных выше операций (реализованных, например, в пакете NumPy для булевых матриц) могут использоваться обычные матричные сложение и умножение. Однако вычисление $A \times B$ может, вообще говоря, быть быстрее вычисления результата обычного матричного умножения AB, поскольку, в частности, если для некоторого k $\min\{A_{ik}, B_{kj}\} = 1$, максимум по k уже достигнут. Алгоритм умножения для квадратных бинарных матриц $n \times n$, имеющий среднюю сложность $O(n^2)$, описан в статье [13].

Теорема 1. *Если $\eta = f(\xi)$ — нечеткий элемент — функция ξ, принимающий значения из $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$, то матрица G^η, задающая с точностью до изоморфизма распределение возможностей его значений, может быть вычислена по формуле*

$$G^\eta = \overline{\Phi^T \times \overline{G^\xi \times \Phi}}, \tag{4}$$

где матрица Φ определена равенствами $\Phi_{ij} = \begin{cases} 1, f(x_i) = y_j, \\ 0, f(x_i) \neq y_j, \end{cases}$ $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, $\Phi_{n+1,j} = 1$, $j = 1, \ldots, m+1$, $\Phi_{i,m+1} = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Пусть $g^\xi : X \to \mathcal{L}$ и $g^\eta : X \to \mathcal{L}$ — распределения нечетких элементов ξ и η, соответственно. При $i, j \leqslant m$ $g^\eta(y_i) \leqslant$

$g^\eta(y_j) \iff \max\{g^\xi(x_k)|k = 1,\dots,n, f(x_k) = y_i\} \leqslant \max\{g^\xi(x_l)|l = 1,\dots,n, f(x_l) = y_j\}$, что эквивалентно тому, что для любого $k \in \{1,\dots,n\}$ такого, что $f(x_k) = y_i$ существует такое $l \in \{1,\dots,n\}$, что $f(x_l) \leqslant y_j$ и $g^\xi(x_k) \leqslant g^\xi(x_l)$), то есть $G^\eta_{ij} = 1$ тогда и только тогда, когда $\forall k \in \{1,\dots,n+1\}(\Phi_{ki} = 1) \to (\exists l \in \{1,\dots,n+1\} : \Phi_{lj} = 1, G^\xi_{kl} = 1)$, где $\to$ — импликация. Но $\exists l \in \{1,\dots,n+1\} : \Phi_{lj} = 1, G^\xi_{kl} = 1$ тогда и только тогда, когда $\max\limits_{l=1,\dots,n+1} \min\{\Phi_{lj}, G^\xi_{kl}\} = (G^\xi \times \Phi)_{kj} = 1$. Аналогично, $\forall k \in \{1,\dots,n\}(\Phi_{ki} = 1) \to ((G^\xi \times \Phi)_{kj} = 1)$ тогда и только тогда, когда $\min\limits_{k=1,\dots,n} \max\{\overline{\Phi_{ki}}, (G^\xi \times \Phi)_{kj}\} = 1$. С учетом двойственности max и min это может быть записано в виде $\max\limits_{k=1,\dots,n} \min\{\Phi_{ki}, \overline{(G^\xi \times \Phi)_{kj}}\} = 0$, то есть $G^\eta_{ij} = (\overline{\Phi^T \times \overline{G^\xi \times \Phi}})_{ij}$, $i, j = 1,\dots,m$.

При $i \leqslant m$ $G^\eta_{i,m+1} = 1 \iff g^\eta(y_i) = 0 \iff \forall k \in \{1,\dots,n+1\}(\Phi_{ki} = 1) \to (G^\xi_{k,n+1} = 1)$, то есть $G^\eta_{i,m+1} = \overline{\max\limits_{k=1,\dots,n+1} \min\{\Phi^T_{ik}, \overline{G^\xi_{k,n+1}}\}}$. В силу определения Φ $G^\xi_{k,n+1} = = \max\limits_{k=1,\dots,n+1} \min\{G^\xi_{kl}, \Phi_{l,m+1}\}$ и потому $G^\eta_{i,m+1} = (\overline{\Phi^T \times \overline{G^\xi \times \Phi}})_{i,m+1}$, $i = 1,\dots,m$.

При $j \leqslant m+1$ $G^\eta_{m+1,j} = 1$ в силу неотрицательности возможности. С другой стороны, $\max\limits_{k=1,\dots,n+1} \min\{G^\xi_{n+1,k}, \Phi_{kj}\} = 1$ и потому $G^\eta_{m+1,j} = (\overline{\Phi^T \times \overline{G^\xi \times \Phi}})_{m+1,j}$, $j = 1,\dots,m+1$. ■

Для инвариантного описания совместного распределения может быть использована аналогичная конструкция, но с двойным индексированием по каждому нечеткому элементу. Например, пусть $G^{\xi,\eta}$ описывает совместное распределение нечетких элементов ξ и η, принимающих значения $\{x_1, x_2,\dots,x_n\}$ и $\{y_1,\dots,y_m\}$, соответственно, то есть $G^{\xi,\eta}_{ijkl} = \begin{cases} 1, p_{ij} \leqslant p_{kl}, \\ 0, p_{ij} > p_{kl}, \end{cases}$ $p_{n+1,j} = p_{i,m+1} = 0, i, k = 1,\dots,n+1, j, l = 1,\dots,m+1$, тогда матрица G^ξ, описывающая маргинальное распределение нечеткого элемента ξ, определяется равенствами

$$G^\xi_{pq} = \overline{\max_{\substack{i=1,\dots,n+1,\\ j=1,\dots,m+1}} \min\{\Phi_{pi}, \overline{\max_{\substack{k=1,\dots,n+1,\\ l=1,\dots,m+1}} \min\{G^{\xi,\eta}_{ijkl}, \Phi_{kq}\}}\}},$$

где $\Phi_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & \text{если } \max\{i,j\} \leqslant n, \\ 0, & \text{если } \max\{i,j\} = n+1, \end{cases}$ и не зависит от индексов по η, что соответствует функции $f(x,y) = x$.

Матрица $G^{\xi|\eta=y_j}$, описывающая условное распределение нечеткого элемента ξ при условии $\eta = y_j$, определяется равенствами

$$G^{\xi|\eta=y_j}_{ik} = G^{\xi,\eta}_{ijkj}, i,k = 1,\ldots,n+1.$$

Замечание 1. Матриц $G^{\xi|\eta}$ и G^{η} недостаточно для восстановления $G^{\xi,\eta}$, поскольку ни соответствующая условному распределению $g^{\xi|\eta}$ матрица $G^{\xi|\eta}$, ни матрица G^{η} не содержат информации об том, как упорядочены различные значения $g^{\xi|\eta}$ по отношению к g^{η}.

Экспертное восстановление возможности

Примером ситуации, в которой необходимо рассматривать распределения возможностей, выраженные в различных шкалах, является построение коллективной экспертной оценки распределения возможностей значений нечеткого элемента, рассмотренное в [1, §3.9]. Эксперты оценивают возможности равенств нечеткого элемента ξ его значениям $\xi = x_1$, …, $\xi = x_n$ в своих шкалах, но, поскольку коллективное решение, представляющее мнения всех экспертов, должно быть инвариантным относительно выбора их шкал, для построения коллективной экспертизы каждому эксперту следует оценить максимальный инвариант распределения возможностей — упорядоченность значений возможностей элементарных событий по отношению друг к другу и к 0, причем предполагается, что оценка распределения, предложенная каждым экспертом, не зависит от мнения других экспертов.

Эта задача поиска коллективной оценки решается в [1, §3.9] с помощью поиска такой матрицы парных сравнений, для которой сумма расстояний от нее до матриц парных сравнений, предложенных экспертами, минимальна (медиана Кемени). В [12], где решается похожая задача, анализируются свойства метрик на матрицах отношений и показано, что при выполнении ряда естественных условий (аксиомы метрики, инвариантность к переобозначению элементарных событий, инвариантность к добавлению или отбрасыванию элементарных событий, об упорядоченности возможности которых по отношению к остальным эксперты согласны) и условию, по которому для любых двух матриц сравнений $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ $\rho(G^{(1)},G^{(2)}) = \rho(G^{(1)},G^{(3)}) + \rho(G^{(2)},G^{(3)})$, где $G^{(3)}$ — такая матрица сравнений, согласно которой $p_i < p_j$, $i,j = 1,\ldots,n+1$, если это имеет место согласно $G^{(1)}$ или $G^{(2)}$, и $p_i = p_j$, если либо это имеет место согласно и $G^{(1)}$, и $G^{(2)}$, или согласно $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ p_i и p_j упорядочены противоположным образом (т.е. $\min\{G_{ij}^{(1)}, G_{ij}^{(2)}\} \leqslant G^{(3)} \leqslant \max\{G_{ij}^{(1)}, G_{ij}^{(2)}\}$, $i, j = 1, \ldots, n+1$), то удовлетворяющая этим условиям метрика ρ существует и с точностью до произвольного множителя, соответствующего масштабу, определяется равенством

$$\rho(G^{(1)}, G^{(2)}) = \sum_{i,j=1}^{n+1} |G_{ij}^{(1)} - G_{ij}^{(2)}|. \tag{5}$$

В (5) и далее в этом разделе сложение и вычитание понимаются в обычном смысле. Таким образом, матрица G для матриц сравнений $G^{(1)}, \ldots, G^{(K)}$, предложенных K экспертами, определяется как решение задачи

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{i,j=1}^{n+1} |G_{ij} - G_{ij}^{(k)}| \sim \min_G, \tag{6}$$

где матрица G должна удовлетворять условиям (3). Поскольку число булевых матриц размера $n+1 \times n+1$, $n \geqslant 1$, удовлетворяющих условиям (3), конечно и отлично от 0, то её решение всегда существует.

Задача (6) с ограничениями (3) может быть сведена к задаче булевского программирования с линейной целевой функцией и квадратичными и линейными ограничениями: пусть $U_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{K} G_{ij}^{(k)}$, тогда $\sum\limits_{k=1}^{K} \rho(G, G^{(k)}) = \sum\limits_{i,j=1}^{n+1} (G_{ij}(K - U_{ij}) + (1 - G_{ij})U_{ij}) = \sum\limits_{i,j=1}^{n+1} G_{ij}(K - 2U_{ij}) + \sum\limits_{i,j=1}^{n+1} U_{ij}$. Ограничение на полноту соответствующей G упорядоченности (3.1) дает ограничения — линейные неравенства $\forall i, j = \overline{1, n+1}$ $G_{ij} + G_{ji} \geqslant 1$. Ограничение на транзитивность соответствующей G упорядоченности (3.2) дает ограничения — квадратичные неравенства $\forall i, j = \overline{1, n+1}$ $G_{ij}^2 - G_{ij} \geqslant 0$. Условие существования хотя бы одного элементарного события с ненулевой возможностью (3.3) дает ограничение — линейное неравенство $\sum\limits_{i=1}^{n+1} G_{i,n+1} \leqslant n$. Условия неотрицательности возможностей (3.4) дают ограничения — линейные равенства $\forall j = \overline{1, n+1}$ $G_{n+1,j} = 1$. Таким образом, задача целочисленного программирования имеет вид

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} G_{ij}(K - 2U_{ij}) \sim \min_{\{G_{ij}\}, i,j=\overline{1,n+1}},$$

при условиях

$$\begin{array}{lr} \forall i,j=\overline{1,n+1} & G_{ij} \in \{0,1\}, \\ \forall i,j=\overline{1,n+1} & G_{ij}+G_{ji} \geqslant 1, \\ \forall i,j=\overline{1,n+1} & -G_{ij} + \sum\limits_{k=1}^{n+1} G_{ik}G_{kj} \geqslant 0, \\ & \sum\limits_{i=1}^{n+1} G_{i,n+1} \leqslant n, \\ \forall j=\overline{1,n+1} & G_{n+1,j} = 1. \end{array}$$

В качестве характеристики качества результата может использоваться расстояние (5) от решения задачи (6) с условиями (3), до решения задачи (6) с частью условий (3), например, без условия транзитивности (3.2), приводящего к запрету циклов. (В этом случае задача может быть сведена к задаче булевского программирования с линейными ограничениями, см. [14].) Если это расстояние велико, т. е. добавление условия транзитивности (3.2) существенно изменяет решение, то экспертиза вызывает недоверие.

Другие способы проверки качества полученной таким образом коллективной экспертизы рассмотрены в [1, §3.9]. В частности, актуален вопрос об обнаружении некомпетентности или «сговора» экспертов. Для обнаружения подобных «дефектов» коллективной экспертизы можно воспользоваться *матрицей корреляции частных экспертных решений*, элементы которой определяются равенствами

$$< G^{(k)}, G^{(k')} >= \frac{(G^{(k)}, G^{(k')})_2}{\|G^{(k)}\|_2 \|G^{(k')}\|_2}, k, k' = 1, \ldots, K, \tag{7}$$

где $G^{(k)}$ — матрица, предложенная k-м (из K) экспертов, $(G^{(k)}, G^{(k')})_2 = \sum\limits_{i,j=1}^{n+1} (G_{ji}^{(k)} - G_{ij}^{(k)})(G_{ji}^{(k')} - G_{ij}^{(k')})$, $\|G^{(k)}\|_2 = \sqrt{(G^{(k)}, G^{(k)})_2}$. Очевидно, для любых $G^{(k)}$, $G^{(k')}$ $< G^{(k)}, G^{(k')} >\in [-1, 1]$, причем

1. $< G^{(k)}, G^{(k')} >= 1$, если $G^{(k)} = G^{(k')} = G$ (одинаковое упорядочение значений по возможности),

2. $< G^{(k)}, G^{(k')} >= -1$, если $G^{(k)} = G^{(k')T}$ (противоположное упорядочение значений по возможности),

причем в обоих случаях результаты экспертизы $G^{(k)}$ и $G^{(k')}$ экспертов «k» и «k'» вызывают подозрение. В случае, когда один эксперт оценивает, например, качество объекта на основе результатов анализа K его характеристик, и каждая матрица $G^{(k)}$ соответствует k-й характеристике, $k = 1, \ldots, K$, значения матрицы корреляции не могут быть интерпретированы подобным образом, но могут быть полезными для выявления взаимозависимости этих характеристик.

Случай произвольного множества элементарных событий

Пусть теперь нечеткий элемент ξ принимает значения, принадлежащие произвольному множеству X. В этом случае аналогом матрицы G^ξ будет функция $G^\xi : \overset{\circ}{X} \times \overset{\circ}{X} \to \{0, 1\}$, определяемая равенствами

$$G^\xi(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, \text{ если } g^\xi(x_1) \leqslant g^\xi(x_2), \\ 0, \text{ если } g^\xi(x_1) > g^\xi(x_2), \end{cases} \quad x_1, x_2 \in \overset{\circ}{X},$$

где $\overset{\circ}{X} \overset{\text{def}}{=} X \cup \{\varnothing\}$, g^ξ — распределение возможностей нечеткого элемента ξ, доопределенное значением возможности пустого множества $g^\xi(\varnothing) = 0$. Эта функция является характеристической для графика бинарного отношения «иметь не большую возможность, чем» на $\overset{\circ}{X} \times \overset{\circ}{X}$.

Пусть операции $+$, $\times$, ^{T}, $\overline{}$ заданы равенствами: $(A + B)(x, z) = \max\{A(x, z), B(x, z)\}$, $(A \times B)(x, z) = \sup\limits_{y \in \overset{\circ}{Y}} \min\{A(x, y), B(y, z)\}$[2],

$A^T(z, x) = A(x, z)$, $\overline{A}(x, z) = \begin{cases} 1, A(x, z) = 0, \\ 0, A(x, z) \neq 0, \end{cases}$ $A : \overset{\circ}{X} \times \overset{\circ}{Y} \to \{0, 1\}$, $B : \overset{\circ}{Y} \times \overset{\circ}{Z} \to \{0, 1\}$, $x \in \overset{\circ}{X}$, $z \in \overset{\circ}{Z}$.

Как и в случае конечного множества элементарных событий, для того, чтобы функция G описывала некоторый нечеткий элемент, необходимо и достаточно выполнения условий

$$G + G^T = E, G + \overline{G \times G} = E, \inf_{x \in X} G(x, \varnothing) = 0, \inf_{x \in X} G(\varnothing, x) = 1, \quad (8)$$

[2]Как и в случае конечного множества элементарных событий, с теми же оговорками может использоваться и операция $\cdot$: $(A \cdot B)(x, z) = \int\limits_{\overset{\circ}{Y}} A(x, y)B(y, z)dy$.

где E — функция $\overset{\circ}{X} \times \overset{\circ}{X} \to \{0,1\}$, тождественно равная 1, поскольку, аналогично конечному случаю, для любых $x, y \in \overset{\circ}{X}$ в силу линейности упорядоченности значений возможности $g^\xi(x) \leqslant g^\xi(y)$ или $g^\xi(y) \leqslant g^\xi(x)$, то есть $\max\{G^\xi(x,y), G^\xi(y,x)\} = 1$ и по определению транзитивности если существует такое $z \in \overset{\circ}{X}$, что $g^\xi(x) \leqslant g^\xi(z)$ и $g^\xi(z) \leqslant g^\xi(y)$, то $g^\xi(x) \leqslant g^\xi(y)$, то есть $(\exists z \in \underline{\overset{\circ}{X} : \min\{G^\xi(x,z), G^\xi(y,z)\} = 1)} \to G^\xi(x,z) = 1$, что эквивалентно $\max\{\sup\{\min\{G^\xi(x,z), G^\xi(z,y)\} | z \in \overset{\circ}{X}\}, G^\xi(x,y)\} = 1$.

Теорема 2. *Если $\eta = f(\xi)$ — нечеткий элемент — функция ξ, принимающая значения в Y, то описывающая его распределение функция G^η может быть вычислена по формуле*

$$G^\eta = \overline{\Phi^T \times \overline{\overline{G^\xi \times \Phi}}}, \tag{9}$$

где $\Phi(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } f(x) = y, \\ 0, & \text{если } f(x) \neq y, \end{cases}$ $x \in X$, $y \in Y$[3], $\Phi(\varnothing, y) = 1$, $y \in \overset{\circ}{Y}$, $\Phi(x, \varnothing) = 0$, $x \in X$.

Доказательство. Для любых $y_1, y_2 \in \overset{\circ}{Y}$ $g^\eta(y_1) \leqslant g^\eta(y_2) \iff \forall x_1 \in X : f(x_1) = y_1\ \exists x_2 \in X : f(x_2) = y_2, g^\xi(x_1) \leqslant g^\xi(x_2)$, то есть $G^\eta(y_1,y_2) = 1 \iff \forall x_1 \in X(\Phi(x_1,y_1) = 1) \to (\exists x_2 \in X : G^\xi(x_1,x_2) = 1, \Phi(x_2,y_2) = 1)$ что эквивалентно $\forall x_1 \in X(\Phi(x_1,y_1) = 1) \to \left(\sup\limits_{x_2 \in X} \min\{G^\xi(x_1,x_2), \Phi(x_2,y_2)\} = 1\right)$. Это условие выполняется тогда и только тогда, когда $\inf\limits_{x_1 \in X} \max\{\overline{\Phi(x_1,y_1)}, \sup\limits_{x_2 \in X} \min\{G^\xi(x_1,x_2), \Phi(x_2,y_2)\}\} = 1$ или, с учетом двойственности, $(\overline{\Phi^T \times \overline{\overline{G^\xi \times \Phi}}})(y_1,y_2) = 1$. ■

Замечание. Как и в случае конечного числа элементарных событий, для пары нечетких элементов ξ и η, функций, соответствующих переходному распределению $g^{\xi|\eta}$ и маргинальному распределению g^η, недостаточно для восстановления $G^{\xi,\eta}$, поскольку они не содержат информации об том, как упорядочены различные значения $g^{\xi|\eta}$ по отношению к g^η. Тем не менее, поиск оптимального (минимизирующего некоторый функционал)

[3] Сужение функции Φ на $X \times Y$ — характеристическая функция графика отображения f.

переходного распределения возможен, если оптимальность распределения не зависит от выбора шкалы, но при этом приходится ставить задачу оптимизации для совместного распределения, и поэтому она может быть более сложной по сравнению с «функциональным» представлением распределений. Пример постановки такой задачи см. в теореме 5.

Постановка задачи построения коллективной оценки

В случае произвольного множества элементарных событий задача построения коллективной оценки, комбинирующей распределения, которым соответствуют функции $G^{(1)}, \ldots, G^{(K)}$, аналогично § ставится как задача

$$\sum_{k=1}^{K} \rho(G, G^{(k)}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{K} \int\limits_{\overset{\circ}{X}} \int\limits_{\overset{\circ}{X}} |G(x,y) - G^{(k)}(x,y)| \mu(dx)\mu(dy) \sim \min_{G}, \qquad (10)$$

поиска функции G, соответствующей некоторому классу эквивалентности распределений возможности, то есть удовлетворяющей условиям (8). Здесь сумма и умножение понимаются в обычном смысле, μ — фиксированная мера, определенная на σ-алгебре подмножеств $\overset{\circ}{X}$, по которой производится интегрирование в смысле Лебега (например, мера Лебега), относительно $\mu \times \mu$ все функции $G^{(k)}$ являются измеримыми[4]. В случае, если $\mu(\overset{\circ}{X}) < \infty$, интеграл в (10) существует для всех измеримых G.

Теорема 3. *Пусть μ — конечная мера, определенная на σ-алгебре подмножеств $\overset{\circ}{X}$, относительно которой в* (10) *производится интегрирование в смысле Лебега, и относительно $\mu \times \mu$ все функции $G^{(k)}$ являются измеримыми. Тогда решение задачи* (10) *при условиях* (8)*, существует.*

Доказательство. Множество измеримых G, очевидно, вложено в $L^1(\overset{\circ}{X} \times \overset{\circ}{X}, \mu \times \mu)$ и является в нём слабо замкнутым. Функционал $\sum\limits_{k=1}^{K} \rho(G, G^{(k)})$, как и в конечном случае, на допустимых функциях G равен сумме линейного функционала и константы: $\sum\limits_{k=1}^{K} \rho(G, G^{(k)}) = \int\limits_{\overset{\circ}{X}} \int\limits_{\overset{\circ}{X}} G(x,y)(1 -$

[4] Достаточным, но не необходимым условием $\mu \times \mu$-измеримости функции G является μ-измеримость соответствующего ей распределения g.

$2U(x,y))\mu(dx)\mu(dy) + \int\limits_{\overset{\circ}{X}}\int\limits_{\overset{\circ}{X}} U(x,y)\mu(dx)\mu(dy)$, где U — функция, определенная равенствами $U(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{K} G^{(k)}(x,y)$, $x,y \in \overset{\circ}{X}$, а следовательно, является слабо непрерывным. Для произвольной функции G, удовлетворяющей условиям (8), и любого $\epsilon > 0$ если $(\mu \times \mu)(E) \leqslant \epsilon$, то $\int\limits_{\overset{\circ}{X}}\int\limits_{\overset{\circ}{X}} G(x,y)\mu(dx)\mu(dy) \leqslant \int\limits_{\overset{\circ}{X}}\int\limits_{\overset{\circ}{X}} \mu(dx)\mu(dy) \leqslant \epsilon$, т. е. множество функций G, удовлетворяющих условиям (8), является равномерно интегрируемым. Согласно [15] (поскольку пространство $\mathbb{R}^1$ с обычной нормой является рефлексивным) равномерная интегрируемость — необходимое и достаточное условие относительной слабой компактности множества функций G, удовлетворяющих условиям (8). Поскольку это множество также является замкнутым, то выполняются условия слабого варианта теоремы Вейерштрасса, и множество решений задачи (10) непусто. ■

Для численного решения задачи (10) с условиями (8) может использоваться, например, метод штрафных функций [16].

Результаты этого и предшествующих разделов опирались только на математические свойства меры возможности, а не на её содержательную интерпретацию. Поэтому эти результаты применимы и к любой другой мере с теми же математическими свойствами, в частности — к мере правдоподобия, описанной в [1, 17].

Пример. *Пусть исследователя интересует неопределенная величина* $\widetilde{x}$, *о которой у него есть некоторые априорные знания и от значения которой зависит контролирующая (случайный) результат наблюдений* $\omega \in \Omega$ *вероятность* $\mathrm{Pr}(\cdot; x)$. *Для комбинирования априорной информации и информации, полученной посредством наблюдений, исследователь:*

1. *предложил распределение правдоподобий* $t^{\widetilde{x}}$ *значений неопределенного элемента (н.э.)* $\widetilde{x}$, *показанное на рис. 1а,*

2. *затем получил по случайным данным наблюдений* ω, *распределение вероятностей* $\mathrm{Pr}(\cdot; x)$ *которых контролировалось некоторым значением* $x \in X$ *этого н.э., распределение правдоподобий* $t_0^{\widetilde{x}}(\cdot, \omega)$, *показанное на рис. 1б как эмпирическую оценку распределения согласно описанному в [17] методу,*

3. *счёл, что эти распределения достаточно хорошо согласуются друг с другом, чтобы скорректировать предложенное им распределение*

правдоподобий с помощью эмпирически восстановленного (например, в том случае, когда значение $\sup\limits_{x'\in X}\Pr(\{\omega'\in\Omega:\Pr(\omega';x')\geqslant \Pr(\omega;x')\};x')$ *максимальной вероятности получить те же результаты наблюдений, что и в действительности, или — любые не более вероятные, если истинное значение* $\widetilde{x}$ *— одно из имеющих единичное правдоподобие согласно предложенному им распределению (на рис. 1а), было близко к* 1*).*

Результат коррекции, полученный как решение задачи (10)*, в которой* μ *— мера Лебега,* $X=[-1,1]$*,* $K=2$*,* $G^{(1)}$ *— функция, соответствующая распределению* $t^{\widetilde{x}}$*,* $G^{(2)}$ *— функция, соответствующая распределению* $t_0^{\widetilde{x}}(\cdot,\omega)$*, показан на рис. 1е, на рис. 1в показано одно из соответствующих ему изоморфных между собой распределений правдоподобий. В случае, если исследователь придает большее или меньшее значение своим априорным знаниям, он может учесть это, заменив в* (10) *внешнюю сумму на выпуклую комбинацию её слагаемых, в которой коэффициент при функции, соответствующей предложенному им распределению, соответственно больше или меньше.*

Эмпирическое восстановление возможности

Эмпирическое восстановление Pr-измеримой ([1, гл. 2]) возможности в случае конечного множества элементарных событий основано на описанных в [18] и [1, §3.3, 3.4] алгоритмах. Пусть X — конечное множество элементарных событий мощности s, $\nu^{(n)}(x)$ — частота события $\{x\}$ после n испытаний, $\delta^{(n,s)}=\left(\frac{2}{n}\ln\frac{1}{\alpha^{(s)}}\right)^{1/2}$, $2s\alpha^{(s)}$ — оценка сверху вероятности ошибочных решений. Тогда алгоритм эмпирического восстановления функции $G:\mathring{X}\times\mathring{X}\to\{0,1\}$, описывающей контролировавшее наблюдения распределение возможностей, имеет следующий вид:

1. Для любых $x_1,x_2\in X, x_2\neq x_1$ и каждого $n=1,2,\dots$ $G(x_1,x_1)=1$, $G(\varnothing,x_1)=1$, $G(x_1,\varnothing)=\begin{cases}0, \ \nu^{(n)}(x_1)>0,\\ 1, \ \nu^{(n)}(x_1)=0,\end{cases}$ а также

   - если $\nu^{(n)}(x_2)-\nu^{(n)}(x_1)>\delta^{(n,s)}$, то $G(x_1,x_2)=1$;
   - если $\nu^{(n)}(x_1)-\nu^{(n)}(x_2)>\delta^{(n,s)}$, то $G(x_2,x_1)=1$;
   - иначе продолжать испытания.

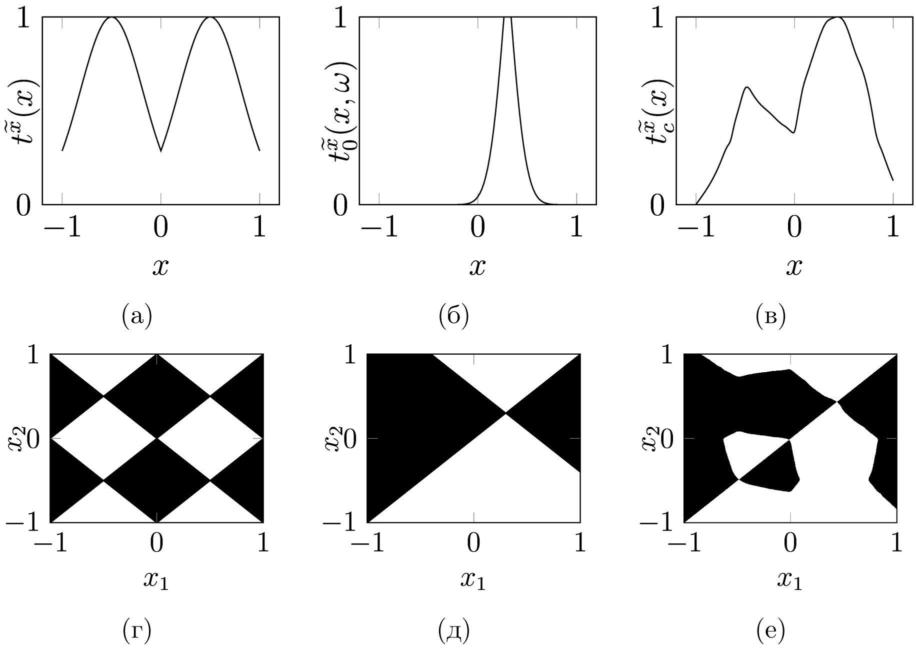

Рис. 1: (а) Распределение $t^{\widetilde{x}}$ правдоподобий н.э. $\widetilde{x}$, предложенное исследователем; (б) Распределение $t_0^{\widetilde{x}}(\cdot,\omega)$ правдоподобий н.э. $\widetilde{x}$, эмпирически восстановленное по данным наблюдений ω; (в) Скорректированное по данным наблюдений распределение $t_c^{\widetilde{x}}$ правдоподобий н.э. $\widetilde{x}$, предложенное исследователем; (г)–(д) Соответствующие (а)–(б) графики бинарных отношений «иметь не большее правдоподобие, чем» (черный цвет — единичные значения, белый — нулевые); (е) График бинарного отношения «иметь не большее правдоподобие, чем», соответствующий скорректированному по данным наблюдений распределению правдоподобий.

2. Для каждого $x \in X$ $X_x^+ \overset{\text{def}}{=} \{x' \in X : G(x,x') = 1\}$, $\widehat{f(x)}^{(n)} \overset{\text{def}}{=} = \nu^{(n)}(x) + \sum\limits_{x' \in X_x^+} \nu^{(n)}(x')$

   - если $\widehat{f(x)}^{(n)} > 1 + \delta^{(n,s)}$, то $\forall x_1 \in X_x^+$, $\forall x_2 \in X \setminus X_x^+$ $G(x_1,x_2) = 0$;
   - если $\widehat{f(x)}^{(n)} < 1 - \delta^{(n,s)}$, то для всех таких $x_1 \in X \setminus X_x^+$, что для любого $x_2 \in X \setminus X_x^+$ $G(x_2,x_1) = 1$, $G(x,x_1) = 1$;
   - иначе продолжать испытания.

3. Транзитивно замкнуть G: $\forall x_1, x_2, x_3 \in X$ если $G(x_1, x_2) = G(x_2, x_3)$, то $G(x_1, x_3) = G(x_1, x_2)$. (Этот шаг может также быть выполнен отображением $G \mapsto G \times (I + G)^k$ для любого $k \geqslant s$, где B^k — k-я степень B в смысле умножения $\times$, I — функция, соответствующая бинарному отношению «=» [13].)

В случае, если упорядоченность вероятностей элементарных событий известна заранее, шаг 1 пропускается и используется описывающая эту упорядоченность функция G. Условия остановки с вероятностью 1 за конечное число испытаний те же, что и в [1]: $\forall x_1, x_2 \in X$ $\mathrm{pr}(x_1) \neq \mathrm{pr}(x_2)$ в случае постоянных вероятностей элементарных событий $\mathrm{pr}(x)$, $x \in X$, и $\forall n > n_0$ $\forall x_1, x_2 \in X$ $|\mathrm{pr}^{(n)}(x_1) - \mathrm{pr}^{(n)}(x_2)| \geqslant (1 + \epsilon_{n,s})\delta^{(n,s)}$, где $\mathrm{pr}^{(n)}(x) = \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \mathrm{Pr}_j(\{x\})$, Pr_j — контролировавшая j-е испытание вероятность, $\epsilon_{n,s} > 0$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha^{(s)})^{\epsilon^2_{n,s}} < \infty$ для первого шага, $\forall x_1$ $f(x) \neq 1$, где $f(x) = \mathrm{pr}(x) + \sum\limits_{x' \in X : \mathrm{pr}(x') \geqslant \mathrm{pr}(x)} \mathrm{pr}(x')$ в случае постоянных вероятностей элементарных событий и $\forall n > n_0$ $\forall x \in X$ $|f(x)^{(n)} - 1| \geqslant (1+\epsilon_{n,s})\delta^{(n,s)}$, где $f(x)^{(n)} = \mathrm{pr}^{(n)}(x) + \sum\limits_{x' \in X : \mathrm{pr}^{(n)}(x') \geqslant \mathrm{pr}^{(n)}(x)} \mathrm{pr}^{(n)}(x')$, в случае изменяющихся от испытания к испытанию вероятностей элементарных событий.

Оптимальные решения в задаче идентификации

Пусть субъект, принимающий решения, определяет семейство $\mathcal{L}^\lambda = (L, \mathcal{P}(L), \mathrm{P}^{\lambda,(k,d)}, \mathrm{N}^{\lambda,(k,d)})$, $(k, d) \in K \times D$ нечетких пространств потерь [1, §6.4], где λ — нечеткий элемент со значениями в множестве элементарных потерь L, отображения $\mathrm{P}^{\lambda,(\cdot,\cdot)} : (K \times D) \times \mathcal{P}(L) \to [0, 1]$ и $\mathrm{N}^{\lambda,(\cdot,\cdot)} : (K \times D) \times \mathcal{P}(L) \to [0, 1]$ — переходные возможность и необходимость для пространств $(K \times D, \mathcal{P}(K \times D))$, $(L, \mathcal{P}(L))$, $\mathrm{pl}^\lambda_{k,d} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{P}^{\lambda,(k,d)}(V)$, $\mathrm{nl}^\lambda_{k,d} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{N}^{\lambda,(k,d)}(V)$ — соответственно возможность и необходимость множества V потерь, существенных для субъекта, принимающего решения, отвечающих паре $(k, d) \in K \times D$. Тогда модель идентификации — тройка $(g^{\xi,\varkappa}, \widetilde{h}^{\xi,\varkappa}, \mathcal{L}^\lambda)$, в которой $g^{\xi,\varkappa}, \widetilde{h}^{\xi,\varkappa}$ характеризуют свойства системы, а семейство $\mathcal{L}^\lambda$ нечетких пространств и множество V определены субъектом, принимающим решения, в соответствии с условиями ее функционирования при, возможно, неверной интерпретации ее состояний. Достаточная для выбора оптимального четкого решения информация описывается функцией

$$G(k_1, x_1, d_1, k_2, x_2, d_2) = \begin{cases} 1, \mathrm{pl}^{\lambda}_{k_1,d_1} \times g^{\xi,\varkappa}(x_1, k_1) \leqslant \mathrm{pl}^{\lambda}_{k_2,d_2} \times g^{\xi,\varkappa}(x_2, k_2), \\ 0, \mathrm{pl}^{\lambda}_{k_1,d_1} \times g^{\xi,\varkappa}(x_1, k_1) > \mathrm{pl}^{\lambda}_{k_2,d_2} \times g^{\xi,\varkappa}(x_2, k_2), \end{cases}$$

$k_1, k_2 \in \overset{\circ}{K}$, $x_1, x_2 \in \overset{\circ}{X}$, $d_1, d_2 \in \overset{\circ}{D}$, причём доопределяется $\mathrm{pl}^{\lambda}_{k,\varnothing} = 1$, $k \in \overset{\circ}{K}$. Чёткое решающее правило $d_* : X \to D$ является оптимальным, если оно минимизирует возможность потерь

$$\mathrm{PL}^{\lambda}(d) = \sup_{x \in X, k \in K} \mathrm{pl}^{\lambda}_{k,d(x)} \times g^{\xi,\varkappa}(x, k),$$

причем для нахождения оптимального чёткого решающего правила достаточно [1, §6.4] при каждом $x \in X$ минимизировать

$$\mathrm{PL}^{\lambda}(d(x); x) = \sup_{k \in K} \mathrm{pl}^{\lambda}_{k,d(x)} \times g^{\xi,\varkappa}(x, k).$$

Теорема 4. *Любое чёткое решающее правило $d_* : X \to D$, для которого при любом $d' : X \to D$ $G\mathrm{L}^{d}(d_*, d') = 1$, где*

$$G\mathrm{L}^{\lambda;d}(d_1, d_2) = \inf_{k_1 \in K, x_1 \in X} \sup_{k_2 \in K, x_2 \in X} G(k_1, x_1, d_1(x_1), k_2, x_2, d_2(x_2)),$$

является оптимальным, и для выполнения этого условия достаточно при каждом $x \in X$ потребовать, чтобы

$$\forall d' \in D \; G\mathrm{L}^{\lambda;d}(d_*(x), d'; x) = 1,$$
$$G\mathrm{L}^{\lambda;d}(d_1, d_2; x) = \inf_{k_1 \in K} \sup_{k_2 \in K} G(k_1, x, d_1, k_2, x, d_2).$$

Доказательство. $\mathrm{PL}^{\lambda}(d_1) \leqslant \mathrm{PL}^{\lambda}(d_2)$ тогда и только тогда, когда $(\forall k_1 \in K, x_1 \in X \; \exists k_2 \in K, x_2 \in X$: $\mathrm{pl}^{\lambda}_{k_1,d_1(x_1)} \times g^{\xi,\varkappa}(x_1, k_1) \leqslant \mathrm{pl}^{\lambda}_{k_2,d_2(x_2)} \times g^{\xi,\varkappa}(x_2, k_2))$, что эквивалентно $(\forall k_1 \in K, x_1 \in X \; \exists k_2 \in K, x_2 \in X$: $G(k_1, x_1, d_1(x_1), k_2, x_2, d_2(x_2) = 1)$. Это выполняется тогда и только тогда, когда $\inf_{k_1 \in K, x_1 \in X} \sup_{k_2 \in K, x_2 \in X} G(k_1, x_1, d_1(x_1), k_2, x_2, d_2(x_2)) = 1$.

Аналогично, $\mathrm{PL}^{\lambda}(d_1; x) \leqslant \mathrm{PL}^{\lambda}(d_2; x) \iff (\forall k_1 \in K \; \exists k_2 \in K$: $\mathrm{pl}^{\lambda}_{k_1,d_1} \times g^{\xi,\varkappa}(x, k_1) \leqslant \mathrm{pl}^{\lambda}_{k_2,d_2} \times g^{\xi,\varkappa}(x, k_2))$, что эквивалентно $(\forall k_1 \in K$ $\exists k_2 \in K$: $G(k_1, x, d_1, k_2, x, d_2 = 1)$. Это выполняется тогда и только тогда, когда $\inf_{k_1 \in K} \sup_{k_2 \in K} G(k_1, x, d_1, k_2, x, d_2) = 1$. ■

Рассмотрение нечетких оптимальных решений осложнено проблемой с восстановлением совместного распределения по условному и маргинальному (см. замечание 1). Нечёткое решающее правило $g^{\delta|\xi}$ (распределение возможностей значений принимаемого решения, если получен заданный результат наблюдения) является оптимальным, если оно минимизирует возможность потерь

$$\mathrm{PL}^{\lambda}(g^{\delta|\xi}) = \sup_{x\in X, k\in K, d\in D} \mathrm{pl}^{\lambda}_{k,d} \times g^{\delta|\xi}(d|x) \times g^{\xi,\varkappa}(x,k), \tag{11}$$

причём для нахождения оптимального нечёткого решающего правила достаточно [1, §6.4] при каждом $x \in X$ минимизировать

$$\mathrm{PL}^{\lambda}(g^{\delta|\xi}(\cdot|x)) = \sup_{k\in K, d\in D} \mathrm{pl}^{\lambda}_{k,d} \times g^{\delta|\xi}(d|x) \times g^{\xi,\varkappa}(x,k). \tag{12}$$

Теорема 5. *Любое оптимальное нечёткое решающее правило, описываемое такой функцией $G^{\delta|\xi}$, задаётся для любых $k \in \overset{\circ}{K}, x \in \overset{\circ}{X}, d_1, d_2 \in \overset{\circ}{D}$ равенствами $G^{\delta|\xi}(d_1, d_2; x) = G\mathrm{L}(k, x, d_1, d_1, k, x, d_2, d_2)$, где $G\mathrm{L}$ — такая удовлетворяющая условиям (8), за исключением требования существования хотя бы одного события с ненулевой возможностью, функция, что:*

1. *для функции*
$$G\mathrm{L}(\cdot, \cdot, \varnothing, \cdot, \cdot, \cdot, \varnothing, \cdot) \tag{13}$$
выполняются условия (8) (фактически, достаточно требования существования хотя бы одного события с ненулевой возможностью, поскольку остальные условия выполняются и для самой функции $G\mathrm{L}$);

2. *при любых $x \in \overset{\circ}{X}$, $d_1, d_2 \in \overset{\circ}{D}$, $k_1, k_2 \in \overset{\circ}{K}$*
$$G\mathrm{L}(k_1, x, \varnothing, d_1, k_1, x, \varnothing, d_2) = G\mathrm{L}(k_2, x, \varnothing, d_1, k_2, x, \varnothing, d_2); \tag{14}$$

3. *при любых $k_1, k_2 \in \overset{\circ}{K}$, $x_1, x_2 \in \overset{\circ}{X}$, $d_1, d_2 \in \overset{\circ}{D}$*
$$\inf_{d'\in\overset{\circ}{D}} \sup_{d''\in\overset{\circ}{D}} G\mathrm{L}(k_1, x_1, d_1, d', k_2, x_2, d_2, d'') = \\ = G(k_1, x_1, d_1, k_2, x_2, d_2); \tag{15}$$

4. множество

$$\{(k,x,d) \in K \times X \times D | \exists k^* \in K, x^* \in X, d^* \in D : \\ \inf_{d' \in D} G\mathrm{L}(k,x,d,d',k^*,x^*,d^*,d^*) = 1\} \quad (16)$$

максимально по включению среди всех функций $G\mathrm{L}$, удовлетворяющих условиям (8), за исключением требования существования хотя бы одного события с ненулевой возможностью, и условиям (13)–(15).

Доказательство. Функция $G\mathrm{L}$ определяется равенствами
$G\mathrm{L}(k_1,\, x_1, d_1, d_1', k_2, x_2, d_2, d_2') =$
$\begin{cases} 1, \mathrm{pl}^{\lambda}_{k_1,d_1} \times g^{\xi,\varkappa}(x_1,k_1) \times g^{\delta|\xi}(d_1'|x_1) \leqslant \mathrm{pl}^{\lambda}_{k_2,d_2} \times g^{\xi,\varkappa}(x_2,k_2) \times g^{\delta|\xi}(d_2'|x_2), \\ 0, \mathrm{pl}^{\lambda}_{k_1,d_1} \times g^{\xi,\varkappa}(x_1,k_1) \times g^{\delta|\xi}(d_1'|x_1) > \mathrm{pl}^{\lambda}_{k_2,d_2} \times g^{\xi,\varkappa}(x_2,k_2) \times g^{\delta|\xi}(d_2'|x_2), \end{cases}$
$k_1, k_2 \in \overset{\circ}{K}$; $x_1, x_2 \in \overset{\circ}{X}$, $d_1, d_1', d_2, d_2' \in \overset{\circ}{D}$. Выражение $\mathrm{pl}^{\lambda}_{k,d} \times g^{\xi,\varkappa}(x,k) \times g^{\delta|\xi}(d'|x)$, $k \in \overset{\circ}{K}$, $x \in \overset{\circ}{X}$, $d, d' \in \overset{\circ}{D}$, очевидно, принимает значения в шкале возможностей, но не является распределением возможностей. Тем не менее, это выражение может рассматриваться как значения распределения возможностей нечетких элементов λ (взятого при условии d и принимающего два значения, «существенные потери есть» и «существенных потерь нет»), ξ, $\varkappa$ и δ при фиксированном значении $\lambda =$«существенные потери есть». Распределением возможностей является и функция $\mathrm{pl}_{k,\varnothing} \times g^{\xi,\varkappa}(x,k) \times g^{\delta|\xi}(d|x)$, что приводит к условию (13). Поэтому функция $G\mathrm{L}$ должна удовлетворять условиям (8), за исключением требования существования хотя бы одного события с ненулевой возможностью (которое может не выполняться, например, если $\mathrm{pl}^{\lambda}_{\cdot,\cdot} \equiv 0$).

Поскольку $\sup_{d' \in \overset{\circ}{D}} \mathrm{pl}^{\lambda}_{k,d} \times g^{\xi,\varkappa}(x,k) \times g^{\delta|\xi}(d'|x) = \mathrm{pl}^{\lambda}_{k,d} \times g^{\xi,\varkappa}(x,k)$, учет информации о задаче, представленной функцией G (соответствие упорядоченности значений согласно распределению, соответствующему G, и согласно распределению, соответствующему $G\mathrm{L}$) приводит к условию (15).

Распределение $g^{\delta|\xi}$ не зависит от $\varkappa$, чему соответствует условие (14), а условное распределение при $\xi = x \in \overset{\circ}{X}$ и $\mathrm{pl}^{\lambda}_{k,\varnothing} = 1$ и фиксированном, но произвольном $\varkappa = k \in \overset{\circ}{K}$ является распределением $g^{\delta|\xi}$.

Если и только если для распределения $g^{\delta|\xi}$ значение $\mathrm{PL}^{\lambda}(g^{\delta|\xi})$ минимально, то максимально по включению множество таких $(k,x,d) \in K \times X \times D$, что $\mathrm{pl}^{\lambda}_{k,d} \times g^{\xi,\varkappa}(x,k) \leqslant \mathrm{PL}^{\lambda}(g^{\delta|\xi})$, т. е., существуют такие $\exists k^* \in$

$K, x^* \in X, d^* \in D$, что для любого $d' \in D$ $\mathrm{pl}^{\lambda}_{k,d} \times g^{\xi,\varkappa}(x,k) \times g^{\delta|\xi}(d'|x) \leqslant \mathrm{pl}^{\lambda}_{k^*,d^*} \times g^{\xi,\varkappa}(x^*,k^*) \times g^{\delta|\xi}(d^*|x^*)$. Очевидно, это множество при фиксированном значении $\mathrm{PL}^{\lambda}(g^{\delta|\xi})$ не зависит от $g^{\delta|\xi}$. ■

Хорошо видно, что задача поиска функции $G\mathrm{L}$ является более сложной, чем минимизация ожидаемой возможности потерь (11). В частности, для поиска оптимальной $G\mathrm{L}$ необходимо осуществить условную минимизацию функционала, а с учетом (12) для нахождения оптимального распределения при фиксированном результате наблюдения достаточно одной безусловной минимизации функции одной переменной [1].

Заключение

В отличие от работ [4, 6], в которых рассматриваются продолжение частичной упорядоченности по распределению нечеткой меры на область определения этой меры, соответствие свойств такого продолжения и свойств исходной меры (аддитивность, max-итивность и т.д.) и свойства основанной на такой упорядоченности логики, и от монографии [12], в которой рассматривается построение комбинированного распределения, в этой статье рассмотрены операции над нечеткими элементами в порядковом представлении, как правило, выполняемые в обычном, функциональном их представлении.

Рассмотренное в этой статье порядковое представление распределений нечетких элементов и мер возможности, для которых эти нечеткие элементы являются каноническими, позволяет выполнять многие из этих операций, в частности, рассчитывать распределение значений функции от нечеткого элемента или от элементов, производить маргинализацию совместного распределения, рассчитывать условное распределение по совместному, эмпирически восстанавливать распределение нечеткого элемента, принимающего конечное множество значений и принимать оптимальные решения.

Однако не все эти действия одинаково удобно выполнять в различных представлениях нечетких элементов: в случае конечного множества элементарных событий вычисление функции от одного неопределенного элемента позволяет использовать хорошо известные алгоритмы линейной алгебры, а вычисление условного распределения сводится к взятию матричного элемента. Формирование распределения возможности, соответствующего объединению информации, содержащейся в нескольких распределениях возможности, принимающих значения в различных шкалах, более естественно осуществляется в порядковом представлении (если их «взаимная упорядоченность» несущественна, как в случае экспертного восстановления возможности, описанном в [1], где предполагается, что оценка каждого эксперта не зависит от мнения других экспертов).

С другой стороны, формулы, описывающие четкие оптимальные решения, более естественно формулируются в терминах распределений, эмпирическое восстановление нечетких элементов в обычном представлении не требует дополнительного шага для обеспечения транзитивности, а получение совместного распределения по условному и маргинальному в порядковом представлении невозможно. Для варианта теории возможностей, в котором содержательно истолкованы могут быть значения возможности, отличные от 0 и 1, в порядковом представлении необходимо указать также упорядоченности возможностей элементарных событий по отношению этим значениям возможности, что приводит к увеличению размера соответствующих матриц в конечном случае. Вследствие указанной сложности использования условных и переходных распределений (вместо непосредственного поиска условного или переходного распределения приходится искать соответствующее ему совместное) использование нечетких решающих правил (что необходимо для оптимальности принимаемых решений, если объект, от состояния которого зависят последствия принимаемых решений, активен и может конфликтовать с субъектом, принимающим решения, то есть в том случае, когда состояние объекта и принимаемое решение являются зависимыми нечеткими элементами) также существенно сложнее в порядковом представлении.

В заключение — моя искренняя благодарность моему научному руководителю Юрию Петровичу Пытьеву за постановку задачи и её обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 14-07-00441.

Список литературы

[1] Пытьев Ю. П. Возможность как альтернатива вероятности. 2 изд., перераб. и дополн. М. : Физматлит, 2015. 596 с.

[2] de Finetti B. Foresight: Its logical laws, its subjective sources // Studies in subjective probability / Ed. by J. Kyburg, H. E. Smokler. Huntingdon, N.Y. : Krieger Pub. Co., 1980. P. 53–118.

[3] Ramsey F. P. Truth and probability // Studies in subjective probability / Ed. by J. Kyburg, H. E. Smokler. Huntingdon, N.Y. : Krieger Pub. Co., 1980. P. 23–52.

[4] Dubois D., Prade H. Formal representations of uncertainty // Decision-making Process: Concepts and Methods / Ed. by D. Bouyssou, D. Dubois, M. Pirlot, H. Prade. London, UK : ISTE, 2009. P. 85–156.

[5] Savage L. J. The foundations of statistics. 2 ed. New York : Dover Publications Inc., 1972. 310 p.

[6] Halpern J. Y. Defining Relative Likelihood in Partially-Ordered Preferential Structures // J. AI Research. 1997. Vol. 7. P. 1–24.

[7] Friedman N., Halpern J. Y. Plausibility measures and default reasoning // Proceedings of the 13th National Conference on Artificial Intelligence. Portland, OR, 1996. P. 1297–1304.

[8] Friedman N., Halpern J. Y. Plausibility measures and default reasoning // Journal of the ACM. 2001. Vol. 48. P. 648–685. URL: http://arxiv.org/abs/cs.AI/9808007.

[9] Halpern J. Y. Plausibility measures: A general approach for representing uncertainty // Proceedings of the 17th International Joint Conference on AI (IJCAI 2001). 2001. P. 1474–1483.

[10] Rosen K. H. Discrete Mathematics and Its Applications. 7 edition. New York, NY : McGraw-Hill, 2012. 1072 p.

[11] Bouyssou D., Vincke P. Binary Relations and Preference Modeling // Decision-making Process: Concepts and Methods / Ed. by D. Bouyssou, D. Dubois, M. Pirlot, H. Prade. London, UK : ISTE, 2009. P. 49–84. doi:10.1002/9780470611876.ch2

[12] Литвак Б. Г. Экспертная информация: Методы получения и анализа. М. : «Радио и связь», 1982. 184 с.

[13] O'Neil P.E., O'Neil E.J. A Fast Expected Time Algorithm for Boolean Matrix Multiplication and Transitive Closure // Information and Control. 1973. Vol. 22. P. 132–138.

[14] Conitzer V., Davenport A., Kalagnanam J. Improved Bounds for Computing Kemeny Rankings // Proceedings of the 21st National

Conference on Artificial Intelligence. Vol. 1 of AAAI'06. Boston, Massachusetts : AAAI Press, 2006. P. 620–626.

[15] Diestel J. Remarks on Weak Compactness in $L_1(\mu, X)$ // Glasgow Mathematical Journal. 1976. December. Vol. 18, № 01. P. 87–91. doi:10.1017/S0017089500003074

[16] Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М. : Факториал Пресс, 2002. 824 с.

[17] Пытьев Ю. П. Математическое моделирование субъективных суждений модельера-исследователя о модели объекта исследования // Математическое моделирование. 2013. Т. 25, № 4. С. 102–125.

[18] Пытьев Ю. П. Математические методы и алгоритмы эмпирического восстановления стохастических и нечетких моделей // Интеллектуальные системы. 2007. Т. 11, № 1-4. С. 277–327.