О полноте в классе линейных 2-адических автоматов

А. А. Часовских (МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва)

Рассмотрен класс линейных 2-адических автоматов с операциями композиции. Получен алгоритм проверки полноты конечных подмножеств таких автоматов. Найдены все максимальные подклассы, число которых оказалось счетным.

Ключевые слова: конечный автомат, p-адическое число, линейный 2-адический автомат, операции композиции, обратная связь, проблема полноты, алгоритм проверки полноты, последовательный двоичный сумматор, задержка.

1. Введение. Решаемая задача

В настоящее время продолжается изучение широкого спектра свойств класса конечных автоматов, как, например, в работах [?], [?], [?]. Также не ослабевает внимание исследователей к вопросам выразимости в этом классе, ставшим уже классическими. При этом допускаются различные варианты операций. Задачам выразимости автоматов через операции суперпозиции посвящены работы [?], [?], [?]. Изучение выразительных свойств в классе P всех конечных автоматов по операциям композиции [?] затруднено в связи алгоритмической неразрешимостью проблемы полноты [?] и аппроксимационной полноты [?], а также континуальностью числа максимальных подклассов [?]. Поэтому интерес представляют содержательные подклассы P, для которых проблема полноты конечных подмножеств алгоритмически разрешима. К ним относится, например, подкласс линейно-автоматных функций [?], [?].

В этой работе мы будем рассматривать класс L_2 линейных 2-адических автоматов [?], вычисляющих линейные функции от переменных, принимающих значения из кольца $\mathbb{Z}_2$ целых 2-адических чисел, коэффициенты которых принимают значения из подкольца $\mathbb{Z}_{(2)}$ кольца рациональных чисел,

$$\mathbb{Z}_{(2)} = \mathbb{Z}_2 \cap \mathbb{Q}.$$

Формулировка полученного в этой работе результата была анонсирована в [?]

Понятие p-адического числа введено в работе [?]. Подробное исследование кольца $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел содержится в книге [?].

Для заданного натурального числа u_0 определим следующеее подмножество в $\mathbb{Z}_{(2)}$:

$$u_0\mathbb{Z}_{(2)} = \left\{ \ u/v \ \mid \ u/v \in \mathbb{Z}_{(2)}, (u_0, u) = u_0, (u_0, v) = 1 \ \right\},$$

Если u_0 не делится на 2, то через $\frac{\mathbb{Z}_{(2)}}{u_0}$ будем обозначать следующее множество чисел:

$$\left\{ \ u/v \ \mid \ u/v \in \mathbb{Z}_{(2)}, (u_0, u) = 1, (u_0, v) = u_0 \ \right\},$$

Инициальный конечный автомат [?], задаваемый шестеркой $(E_2^n, E_2^s, E_2, \phi, \psi, q_0)$, сопоставляет каждому набору бесконечных входных последовательностей α_i, $\alpha_i = \alpha_i(0), \alpha_i(1), \ldots, \quad \alpha_i(t) \in E_2$, $t = 0, 1, \ldots$, $i = 1, \ldots, n$, $E_2 = \{0, 1\}$, некоторую бесконечную выходную последовательность β, $\beta = \beta(0), \beta(1), \ldots, \quad \beta(t) \in E_2$, $t = 0, 1, \ldots$. Если бесконечной последовательности нулей и единиц α, $\alpha = \alpha(0), \alpha(1), \ldots$, сопоставлять последовательность $\bar{\alpha}$ частичных сумм ряда $\sum_{t=0}^{\infty} \alpha_i(t) 2^t$, являющуюся 2-адическим числом, то рассматриваемый конечный автомат осуществляет преобразование набора 2-адических чисел $(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n)$ в 2-адическое число $\bar{\beta}$. Автоматные преобразователи целых p-адических чисел изучались в работе [?].

Конечный инициальный автомат из P с входным алфавитом E_2^n и выходным алфавитом E_2 называется линейным 2-адическим автоматом, если для определяемого им отображения $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ в $\mathbb{Z}_{(2)}$ найдутся такие числа r_0, r_1, ..., r_n, что для любых $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2$, ..., $\bar{\alpha}_n$ из $\mathbb{Z}_2$ выполнено:

$$f\left(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n\right) = \sum_{i=1}^{n} r_i \bar{\alpha}_i + r_0.$$

В этом случае для функции $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ имеет место разложение:

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i + r_0. \qquad (1)$$

Отображение f, определяемое линейным 2-адическим автоматом, будем называть линейно-автоматной 2-адической функцией (л.а.а. функцией). Множество всех л.а.а. функций обозначим L_2.

В L_2 содержится, например, функция $\xi_a(x)$, определяемая задержкой с начальным состоянием a, $a \in E_2$ [?], которая задается системой канонических уравнений:

$$\begin{cases} q(0) = a, \\ q(t+1) = x(t), \\ y(t) = q(t), \end{cases}$$

а также последовательный двоичный сумматор $f_+^{(2)}(x_1, x_2)$, задаваемый линейным 2-адическим автоматом с системой канонических уравнений:

$$\begin{cases} q(0) = 0, \\ q(t+1) = x_1(t) \wedge x_2(t) \vee q(t) \wedge x_1(t) \vee q(t) \wedge x_2(t), \\ y(t) = x_1(t) \oplus x_2(t) \oplus q(t) \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что справедливы равенства:

$$\xi_a(x) = a + 2x,$$
$$f_+^{(2)}(x_1, x_2) = x_1 + x_2.$$

Для класса L_2, рассматриваемого вместе с операциями композиции [?], в этой работе найдено множество J_2 всхе максимальных подклассов. Множество J_2 оказалось счетным, но, несмотря на это, как и в случае линейно-автоматных функций, в классе L_2 найден алгоритм проверки полноты конечных подмножеств. Этот алгоритм по заданному конечному множеству автоматов из L_2 находит конечное подмножество классов из J_2, невключение в каждый из которых равносильно полноте рассматриваемого множества.

2. Операции композиции

Пусть для л.а.а. функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $f'(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+n'})$, некоторых чисел r_i, $i = 0, 1, \ldots, n + n'$, r_0' из $\mathbb{Z}_{(2)}$ выполнены равенства (??) и (??), соответственно,

$$f'(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+n'}) = \sum_{i=n+1}^{n+n'} r_i x_i + r_0'. \qquad (2)$$

Через f_1, f_2, f_3 обозначим функции, получаемые, соответственно, отождествлением переменных x_{n-1} и x_n функции f, переименованием переменных функции f с x_1, x_2, …, x_n на x'_1, x'_2, …, x'_n, подстановкой функции f вместо переменной $x_{n+n'}$ функции f'. Если к переменной x_n функции f применима обратная связь, то через f_4 обозначим результат ее применения к этой переменной.

Лемма 1. *Имеют место следующие равенства.*

$$f_1\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}\right)=\sum_{i=1}^{n-2} r_i x_i+\left(r_{n-1}+r_n\right) x_{n-1}+r_0, \tag{3}$$

$$f_2\left(x'_1,x'_2,\ldots,x'_n\right)=\sum_{i=1}^{n} r_i x'_i+r_0, \tag{4}$$

$$f_3\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n+n'-1}\right)=\sum_{i=n+1}^{n+n'-1} r_i x_i+\sum_{i=1}^{n} r_i r_{n+n'} x_i+r'_0+r_{n+n'} r_0, \tag{5}$$

$$f_4\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}\right)=\sum_{i=1}^{n-1} r_i\left(1-r_n\right)^{-1} x_i+r_0\left(1-r_n\right)^{-1}. \tag{6}$$

Доказательство. Доказательство равенств (**??**)–(**??**) может быть получено с использованием рассуждений, приведенных в [**?**] для класса L линейно-автоматных функций.

Докажем равенство (**??**). Пусть выполнено равенство (**??**) и к переменной x_n функции f применима операция обратной связи. Тогда $r_n\in 2\mathbb{Z}_{(2)}$. Применив операцию обратной связи к переменной x_n, получим функцию $f_4\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}\right)$.

Через $f_-(x)$ обозначим функцию из L_2, получаемую применением операции обратной связи к переменной x' функции $x+2\cdot x'$. Построив диаграмму переходов конечного автомата, определяющего функцию $x+f_-(x)$, убеждаемся в справедливости равенства:

$$f_-(x)=-x.$$

Из последнего равенства и равенств (**??**), (**??**) для функции $g_n\left(x_n\right)$, $g_n\left(x_n\right)=f\left(0,0,\ldots,0,x_n\right)+f_-\left(f\left(0,0,\ldots,0\right)\right)$ вытекает:

$$g_n\left(x_n\right)=r_n x_n.$$

Используя это соотношение, а также (**??**) и (**??**), получим:

$$f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=f\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},0\right)+g_n\left(x_n\right) \tag{7}$$

Через $h_n(x)$ обозначим функцию, полученную применением обратной связи к переменной x_n функции $x + g_n(x_n)$. Ввиду (**??**), справедливо:

$$f_4(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = h_n(f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)).$$

Отсюда, из свойства (**??**), а также равенства (**??**) следует, что для доказательства (**??**) осталось установить справедливость соотношения:

$$h_n(x) = (1 - r_n)^{-1} x. \tag{8}$$

Функция $h'_{n,\tau}$,

$$h'_{n,\tau}(x) = \underbrace{x + g_n(x + g_n(x + \dots g_n(x + g_n}_{\tau-1 \quad \text{символов } g}(\ x)))),$$

τ-эквивалентна [**?**] функции $h_n(x)$, $\tau = 1, 2, \dots$. Отсюда следует

$$h_n(x) = \sum_{t=0}^{\infty} r_n^t x,$$

где $r_n^0 = 1$.

Поэтому из равенства $(1 - r_n) \sum_{t=0}^{\infty} r_n^t = 1$ вытекает (**??**).

Равенство (**??**), а, вместе с ним, и лемма 1 доказаны.

Замыкание множества M, $M \subseteq L_2$, по операциям композиции (отождествления и переименования переменных, подстановки, обратной связи) будем обозначать $K(M)$ [**?**]. Множество л.а.а. функций M называется замкнутым, если $K(M) = M$, а замкнутое множество M является максимальным (или предполным) классом, если $M \neq L_2$, но для любой функции f, $f \in L_2 \setminus M$, выполнено: $K(M \cup \{f\}) = L_2$.

Лемма 2. *Справедливо равенство:*

$$K\left(\left\{\ f_+^{(2)},\ \ \xi_1\ \right\}\right) = L_2. \tag{9}$$

Доказательство. Заметим, что $\xi_0(x) = f_+^{(2)}(x, x)$. Применяя операцию обратной связи к переменной x функции $\xi_0(x)$, получим константу 0. Для любого натурального числа n из сумматора и константы 0 с использованием операций подстановки и переименования переменных можно получить функцию $x_1 + x_2 + \dots + x_n$, отождествляя все переменные которой, получим nx_1. Как замечено в предыдущей лемме, функция $-x$

получается путем применения операции обратной связи к переменной x' функции $x + \xi_0(x')$. Таким образом, для любого целого числа m выполнено: $mx \in K\left(\left\{\ f_+^{(2)},\ \xi_1\ \right\}\right)$.

Пусть $r \in \mathbb{Z}_{(2)}$, $r = u/v$. По лемме 1 функция rx получается применением операции обратной связи к переменной x' функции $ux + (1-v)x'$.

Подставляя константу 0 вместо переменной x задержки $\xi_1(x)$, получим константу 1. Константу r_0, $r_0 \in \mathbb{Z}_{(2)}$, получим, подставив константу 1 вместо единственной переменной функции $r_0 x$.

Используя функции $r_i x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, константу r_0, сумматор $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1}$ и операции подстановки, получим функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, для которой выполнено равенство (**??**). Лемма 2 доказана.

Соотношение между классом L линейно-автоматных функций и классом L_2 линейно-автоматных 2-адических функций устанавливает следующая

Замечание. Имеют место соотношения:

$$L_2 \not\subseteq L, \tag{10}$$

$$L \not\subseteq L_2, \tag{11}$$

Действительно, соотношение (**??**) вытекает из

$$x_1 + x_2 \notin L, \tag{12}$$

а соотношение (**??**) — из

$$x_1 \oplus x_2 \notin L_2. \tag{13}$$

И, далее, если для некоторой функции $f(x_1, x_2)$ из L_2 выполнены равенства $f(0,0) = 0$, $f(x_1, 0) = x_1$ и $f(0, x_2) = x_2$, то из соотношения $f(x_1, x_2) = r_1 x_1 + r_2 x_2 + r_0$ следует, что $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

Если те же 3 равенства выполнены для некоторой функции $f(x_1, x_2)$ из L, то из соотношения $f(x_1, x_2) = r_1 x_1 \oplus r_2 x_2 \oplus r_0$ следует, что $f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$.

Свойства (**??**) и (**??**) справедливы ввиду неравенства

$$x_1 + x_2 \neq x_1 \oplus x_2.$$

3. Множество замкнутых классов J_2

Пусть выполнено (**??**). Положим:

$$U(f) = \{\ r_i\ \mid\ i = 1, 2, \ldots, n\ \},$$

Для множества M, $M \subseteq L_2$, положим:

$$U(M) = \cup_{f \in M} U(f).$$

Переменная x_i функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющей равенству (**??**), называется существенной, если $r_i \neq 0$. Переменная x_i называется непосредственной, если число r_i, будучи представленным в несократимом виде, имеет нечетный числитель. Операция обратной связи применима к переменной x_i функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точности тогда, когда x_i не является непосредственной переменной.

Далее, рассматривая дроби u/v из $\mathbb{Q}$, считаем, что $(u, v) = 1$. Положим:

$$H^1 = \left\{\ 1 + 2r\ \mid\ r \in \mathbb{Z}_{(2)}\ \right\}.$$

Рассмотрим следующие подмножества в L_2.

$$L_c^1 = \{\ f\ \mid\ f\ \text{имеет ровно одну существенную переменную}\ \},$$
$$L_d^1 = \{\ f\ \mid\ f\ \text{имеет ровно одну непосредственную переменную}\ \},$$
$$T_a = \{\ f\ \mid\ \text{для любых}\ \bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i \in a + 2\mathbb{Z}_2, i = 1, 2, \ldots, n$$
$$\text{выполнено} f(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n) \in a + 2\mathbb{Z}_2\ \},\quad a \in E_2,$$
$$V_1 = \{\ f\ \mid\ f\ \text{имеет не более одной непосредственной переменной}\ \},$$
$$V_o = \{\ f\ \mid\ f\ \text{имеет нечетное число непосредственных переменных}\ \},$$
$$I = \left\{\ f\ \mid\ \text{если выполнено равенство}\ (\textbf{??}), \text{то} \sum_{i=1}^{n} |r_i| \leqslant 1\ \right\}.$$

Пусть p_1, p_2, $\ldots$ — последовательность всех простых чисел, причем $p_1 < p_2 < \ldots$. Тогда $p_1 = 2$. Положим:

$$R_c(p_i) = \left\{\ f\ \mid\ f \in L_2 \setminus L_c^1,\ \text{для любого}\ u/v\right.$$
$$\left.\text{из}\ U(f)\ \text{выполнено:}\ (u, p_i) = p_i\ \right\} \cup$$
$$\left\{f\ \mid\ f \in L_c^1,\ \text{для}\ u/v\ \text{из}\ U(f) \setminus \{0\}\ \text{выполнено:}\ (v, p_i) = 1\right\},\quad i = 2, 3, \ldots,$$

$$R_d\left(p_i\right) = \left\{\ f\ \mid\ f \in L_2 \setminus L_d^1,\ \text{для любого}\ u/v\right.$$
$$\left.\text{из}\ U(f)\ \text{выполнено:}\ (u,p_i) = p_i\ \right\} \cup$$
$$\left\{\ f\ \mid\ f \in L_d^1,\ \text{для любого}\ u/v\ \text{из}\ U(f) \setminus H^1\ \text{выполнено:}\ (u,p_i) = p_i\right.$$
$$\left.\text{а для}\ u/v\ \text{из}\ U(f) \cap H^1\ \text{имеет место:}\ (v,p_i) = 1\ \right\},\quad i = 2,3,\ldots,$$

Через J_2 обозначим следующее мнжество:

$$\left\{\ T_0, T_1, V_1, V_o, I, R_c\left(p_i\right), R_d\left(p_i\right)\ \mid\ i = 2,3,\ldots\ \right\}.$$

Теорема 1. *Для любого Θ, $\Theta \in J_2$ выполнено:*

$$K(\Theta) = \Theta. \tag{14}$$

Для любых различных Θ_1 и Θ_2 из J_2 выполнено:

$$\Theta_1 \not\subseteq \Theta_2. \tag{15}$$

Доказательство. Замкнутость множества Θ, $\Theta \in J_2 \setminus \{I\}$, проводится индукцией по построению элементов из $K(\Theta)$ с использованием рассуждений, имеющихся в [**?**].

Докажем равенство (**??**) в случае $\Theta = I$.

Рассмотрим функции $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ и $f'\left(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+n'}\right)$ из I. Пусть имеют место равенства (**??**) и (**??**) и пусть f_1, f_2, f_3, f_4 построены из f и f' также, как в условии леммы 1. Тогда справедливы равенства (**??**)–(**??**). А, в случае применимости к переменной x_n функции $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ операции обратной связи, выполнено также равенство (**??**).

Имеют место соотношения:

$$\sum_{i=1}^{n} |r_i| \leqslant 1,$$
$$\sum_{i=n+1}^{n+n'} |r_i| \leqslant 1.$$

Отсюда вытекают неравенства:

$$\sum_{i=1}^{n-2} |r_i| + |r_{n-1} + r_n| \leqslant 1,$$
$$\sum_{i=n+1}^{n+n'-1} |r_i| + \sum_{i=1}^{n} |r_i r_{n+n'}| \leqslant 1,$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left| r_i \left(1 - r_n\right)^{-1} \right| \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n-1} |r_i|}{(1 - |r_n|)} \leqslant 1,$$

из которых следует включение:

$$\{ \ f_i \ \mid \ i = 1, 2, 3, 4 \ \} \subseteq I.$$

Поэтому равенство (**??**) в случае $\Theta = I$ доказано.

Теперь покажем справедливость (**??**) для любых различных Θ_1 и Θ_2 из J_2. Для этого каждому классу Θ из J_2 сопоставим множество $\tilde{\Theta}$ функций из L_2 следующим образом.

$$\begin{gathered}
\tilde{T}_0 = \left\{x_1 + x_2\right\}, \\
\tilde{T}_1 = \left\{x_1 + x_2 + 2x_3 + 1\right\}, \\
\tilde{V}_1 = \left\{x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 1, 0\right\}, \\
\tilde{V}_o = \left\{x_1 + x_2 + x_3 + 1\right\}, \\
\tilde{I} = \left\{x + 1, x_1/3 + x_2/3\right\}, \\
\tilde{R}_c\left(p_i\right) = \left\{p_i x_1 + p_i x_2, 2x + 1\right\}, \\
\tilde{R}_d\left(p_i\right) = \left\{p_i x_1 + p_i x_2, x_1 + 2p_i x_2 + 1\right\}.
\end{gathered}$$

Нетрудно видеть, что для любых Θ_1 и Θ_2 из J_2 выполнено: $\tilde{\Theta}_1 \subseteq \Theta_2$, если $\Theta_1 = \Theta_2$ и $\tilde{\Theta}_1 \not\subseteq \Theta_2$, в пртивном случае. Отсюда вытекает второе утверждение теоремы. Теорема 1 доказана.

4. Однородные л.а.а. функции

Л.а.а. функция $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, заданная равенством (**??**), называется однородной, если $r_0 = 0$. Множество всех однородных л.а.а. функций обозначим L_2^0. Имеют место включения:

$$\begin{gathered}
x_1 + x_2 + \cdots + x_n \in L_2^0, \quad n \in \mathbb{N}; \\
rx \in L_2^0, \quad r \in \mathbb{Z}_{(2)}; \\
\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \in L_2^0, \quad r_i \in \mathbb{Z}_{(2)} \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad n \in \mathbb{N};
\end{gathered}$$

Множество J^* замкнутых подклассов замкнутого класса R называется критериальной системой [**?**] в R, если для любого множества M, $M \subseteq R$, равенство $K(M) = R$ имеет место в точности тогда, когда M

не содержится в каждом классе системы J^*. Критериальная система в R, не содержащая собственных критериальных подсистем, называется приведенной.

Положим:

$$J_2^0 = \left\{ \ \Theta^0 \ \mid \ \Theta^0 = \Theta \cap L_2^0, \ \ \Theta \in J_2 \setminus \{T_0, T_1\} \ \right\}.$$

Теорема 2. *Множество J_2^0 является критериальной системой в L_2^0.*

Доказательство. Пусть $M \subseteq L_2^0$ и для любого Θ^0 из J_2^0 выполнно: $M \not\subseteq \Theta^0$. Докажем, что

$$K(M) = L_2^0. \tag{16}$$

В M содержится функция f_o с четным числом непосредственных переменных. Отождествим все переменные этой функции, а к единственной оставшейся переменной применим операцию обратной связи. Получим константу 0.

Выбрав какие-либо две непосредственные переменные некоторой функции f_1 из $M \setminus V_1$, переименуем их в x_1 и x_2, а вместо остальных переменных подставим констванту 0. Тогда для некоторых чисел s_i', $s_i' \in H^1$, $i = 1, 2$, получим функцию $f'(x_1, x_2) = s_1' x_1 + s_2' x_2$. Для функции $f''(x_1, x_2)$,

$$f''(x_1, x_2) = f'\left(f'(0, x_1), f'(x_2, 0)\right),$$

имеем:

$$f''(x_1, x_2) = s'' x_1 + s'' x_2,$$

где $s'' = s_1' s_2'$. Далее положим $f(x_1, x_2) = f''(f''(x_1, 0), f''(x_2, 0))$, Тогда для некоторого s, $s \in H^1$, $s > 0$, имеем:

$$f(x_1, x_2) = s x_1 + s x_2 \in K(M).$$

Докажем, что в $K(M)$ есть функция $r_1' x$, где $r_1' > 1$. Найдется функция f_I', $f_I' \in M \setminus I$. Если все числа в $U(f_I')$ имеют один знак, то, отождествив все переменные функции f_I' и переименовав единственную переменную полученной одноместной функции в x, получим функцию $f_I''(x)$. Нетрудно видеть, что функция $f_I''(f_I''(x))$ — искомая.

В противном случае, используя операции отождествления и переименования переменных, из f_I' можно получить функцию $f_I(x_1, x_2)$, $f_I(x_1, x_2) = r_1 x_1 + r_2 x_2$, где $r_1 > 0$, $r_2 < 0$, $r_1 - r_2 > 1$. Если $r_1 \geqslant 1$ или $r_2 \leqslant -1$, то функция $f_I(x, f_I(0, x))$ — искомая.

Пусть

$$r_1 < 1, \quad r_2 > -1. \tag{17}$$

Рассмотрим последовательность функций f'_n, $n = 1, 2, \ldots$, где

$$f'_n(x) = f_I\left(x,\ \underbrace{f_I\left(f_I\left(\ldots f_I\left(f_I\right.\right.\right.}_{n \text{ символов } f}\left.\left.\left.\left(\ x, x\right), x\right)\ldots\right), x\right)\right).$$

Справедливо равенство

$$f'_n(x) = \left(r_1 + r_2^2 \sum_{i=0}^{n-1} r_1^i + r_2 r_1^n\right) x.$$

Кроме того, несложно показать, что для любого целого неотрицательного n выполнено:

$$r_1 + r_2^2 \sum_{i=0}^{n-1} r_1^i - r_2 r_1^n \geqslant r_1 - r_2.$$

Поэтому для некоторого n_0 имеет место:

$$r_1 + r_2^2 \sum_{i=0}^{n_0-1} r_1^i + r_2 r_1^{n_0} > 1.$$

Таким образом, функция $r'_1 x$ с некоторым $r'_1 > 1$ содержится в $K(M)$ и в случае (**??**).

Для некоторых натуральных чисел u_s и v_s имеем: $s = u_s/v_s$, $(u_s, v_s) = 1$.

Положим

$$P = \left\{\ p_i \ \mid \ s \in p_i \mathbb{Z}_{(2)}\ \right\},$$
$$m = |P|.$$

Пусть $P = \left\{\ p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots p_{i_m}\ \right\}$. Для каждого j, $j = 1, 2, \ldots, m$, найдутся функции $f_{c,j}$, $f_{d,j}$, $\quad f_{c,j} \in M \setminus R_c\left(p_{i_j}\right)$, $f_{d,j} \in M \setminus R_d\left(p_{i_j}\right)$. Докажем, что в $K(M)$ содержатся функции

$$r'_j(x), \quad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{18}$$

такие, что

$$r'_j \in \frac{\mathbb{Z}_{(2)}}{p_{i_j}}. \tag{19}$$

Для заданного j, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, возможны 2 случая.

Случай 1. В $\{f_{c,j}, f_{d,j}\}$ найдется функция f''_j,

$$f''_j \notin R_c\left(p_{i_j}\right) \cup R_d\left(p_{i_j}\right).$$

Случай 2. Имеют место соотношения:

$$f_{c,j} \in R_d\left(p_{i_j}\right) \setminus R_c\left(p_{i_j}\right),$$
$$f_{d,j} \in R_c\left(p_{i_j}\right) \setminus R_d\left(p_{i_j}\right).$$

Рассмотрим случай 1. Если

$$U\left(f''_j\right) \cap \frac{\mathbb{Z}_{(2)}}{p_{i_j}} \neq \varnothing, \tag{20}$$

то функцию $r'_j x$, такую, что r'_j удовлетворяет (**??**), можно получить, используя операции подстановки и переименования переменных из функций f''_j и 0.

Пусть (**??**) не имеет места. Можно выбрать 2 переменные функции f''_j так, что переименовав их в x_1 и x_2 и подставив вместо остальных переменных константу 0, получим функцию $\tilde{r}'_1 x_1 + \tilde{r}'_2 x_2$ такую, что

$$\tilde{r}'_1 x_1 + \tilde{r}'_2 x_2 \notin R_c\left(p_{i_j}\right) \cup R_d\left(p_{i_j}\right)$$

и $\tilde{r}'_1 \notin p_{i_j}\mathbb{Z}_{(2)}$. Множество

$$\left\{\tilde{r}'_1 x_1 + \tilde{r}'_2 x_2, \tilde{r}'_1 x_2 + \tilde{r}'_2 x_1, \tilde{r}'_1 x_1 + \tilde{r}'_2\left(s x_1 + s x_2\right)\right\}$$

содержит функцию $r''_1 x_1 + r''_2 x_2$ со свойствами:

$$r''_1 \in 2\mathbb{Z}_{(2)}, \quad r''_1 \notin p_{i_j}\mathbb{Z}_{(2)}, \quad r''_2 \neq 0. \tag{21}$$

Отсюда следует, что найдется n_j, $n_j \in \mathbb{N}$, что

$$\frac{r''_2}{1 - \left(r''_1\right)^{n_j}} \in \frac{\mathbb{Z}_{(2)}}{p_{i_j}} \setminus \{0\}.$$

Функция $\left(r''_1\right)^{n_j} x_1 + r''_2 x$ содержится в $K(M)$ и к переменная x_1 этой функции вследствие (**??**) применима обратная связь. Применяя обратную связь к этой переменной, получаем функцию $r'_j x$, удовлетворяющую (**??**). Случай 1 разобран.

В случае 2 функция $f_{c,j}$ имеет не менее двух существенных переменных и ровно одну непосредственную. Поэтому, из нее подстановкой константы 0 и переименованием переменных можно получить функцию $r_1^* x_1 + r_2^* x_2$, где

$$r_1^* \in H^1, \quad r_1^* \notin p_{i_j}\mathbb{Z}_{(2)}, \quad r_2^* \neq 0.$$

Функция $f_{d,j}$ имеет едиственную существенную переменную,

$$f_{d,j}(x) = r^* x, \quad r^* \in 2\mathbb{Z}_{(2)}, \quad r^* \notin p_{i_j}\mathbb{Z}_{(2)}.$$

Функция $r_1'' x_1 + r_2'' x_2$,

$$r_1'' x_1 + r_2'' x_2 = r_1^* \left(r^* \left(x_1 \right) \right) + r_2^* \left(x_2 \right)$$

содержится в $K(M)$ и обладает свойствами (**??**). Потому существование в $K(M)$ функции $r_j'(x)$ со свойством (**??**) доказывается с использованием рассуждений, приведенных для случая 1.

Существование последовательности (**??**) со свойством (**??**) доказано.

Для каждого j, $j = 1, 2, \ldots, m$, найдется τ_j, $\tau_j \in \mathbb{N}$, удовлетворяющее соотношениям:

$$\left(r_j' \right)^{\tau_j} s^n \notin p_{i_j}\mathbb{Z}_{(2)}, \quad \left(r_j' \right)^{\tau_j} s^n > 0,$$

найдется τ_0, $\tau_0 \in \mathbb{N}$, удовлетворяющее неравенству:

$$2 \left(r_1' \right)^{\tau_0} s^2 > 1.$$

Положим

$$s_0 = s^n, \quad s_j = \left(r_j' \right)^{\tau_j} s^n, \;\; j = 1, 2, \ldots, m,$$

$$s_{m+1} = s^{n+1} / \left(1 - 2 \left(r_1' \right)^{\tau_0} s^2 \right).$$

Найдется τ', $\tau' \in \mathbb{N}$, такое, что числитель положительного числа

$$\left(r_1' \right)^{\tau'} s$$

больше его знаменателя. Положим:

$$\tilde{s} = \left(r_1' \right)^{\tau'} s.$$

Представим число $\tilde{s}$ несократимой дробью: $\tilde{s} = \frac{\tilde{u}}{\tilde{v}}$.

Положим $n = \tilde{u}(m+2) + 2$, откуда $n > 4$. Тогда

$$4(m+2)u_s = 4(n-2) < 4 \cdot 2^{n-2} = 2^n.$$

Поэтому из функций f и 0, используя операции суперпозиции, можно получить функцию $\tilde{f}\left(x_1, x_2, \ldots, x_{4(m+2)\tilde{u}}\right)$,

$$\tilde{f}\left(x_1, x_2, \ldots, x_{4(m+2)\tilde{u}}\right) = s^n x_1 + s^n x_2 + \cdots + s^n x_{4(m+2)\tilde{u}}.$$

Через $h\left(x_1, x_2, \ldots, x_{4(m+2)\tilde{u}}\right)$ обозначим функцию

$$\begin{gathered}\tilde{f}\left(x_1, x_2, \ldots, x_{4\tilde{u}}, \left(r_1'\right)^{\tau_1} x_{4\tilde{u}+1}, \left(r_1'\right)^{\tau_1} x_{4\tilde{u}+2}, \ldots, \left(r_1'\right)^{\tau_1} x_{8\tilde{u}}\right. \\ \left(r_2'\right)^{\tau_2} x_{8\tilde{u}+1}, \left(r_2'\right)^{\tau_2} x_{8\tilde{u}+2}, \ldots, \left(r_2'\right)^{\tau_2} x_{12\tilde{u}}, \ldots \\ \left(r_m'\right)^{\tau_m} x_{4m\tilde{u}+1}, \left(r_m'\right)^{\tau_m} x_{4m\tilde{u}+2}, \ldots, \left(r_m'\right)^{\tau_m} x_{4(m+1)\tilde{u}}, \\ \frac{s}{1-2\left(r_1'\right)^{\tau_0} s^2} x_{4(m+1)\tilde{u}+1}, \frac{s}{1-2\left(r_1'\right)^{\tau_0} s^2} x_{4(m+1)\tilde{u}+2}, \ldots, \\ \left.\frac{s}{1-2\left(r_1'\right)^{\tau_0} s^2} x_{4(m+2)\tilde{u}}\right).\end{gathered}$$

Справедливо равенство

$$h\left(x_1, x_2, \ldots, x_{4(m+2)\tilde{u}}\right) = \sum_{j=0}^{m+1} \sum_{i=1}^{4\tilde{u}} s_j x_{4j\tilde{u}+i}.$$

Так как наибольший общий делитель числителей положительных чисел $s_0, s_1, \ldots, s_m$ равен 1, а число s_{m+1} отрицательное, то найдутся целые неотрицательные числа n_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, m+1$, удовлетворяющие равенству:

$$1 = \sum_{i=0}^{m+1} n_i s_i. \tag{22}$$

Каждое из чисел n_i представим в следующем виде:

$$n_i = \sum_{j=0}^{l_i} n_{i,j} \tilde{s}^j, \tag{23}$$

где $n_{i,j} \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant n_{i,j} < \tilde{u}$, $j = 0, 1, \ldots, l_i$, $i = 0, 1, \ldots, m+1$.

Используя операции подстановки и переименования переменных, из функций

$$h\left(x_1, x_2, \ldots, x_{4(m+2)\tilde{u}}\right), \quad \tilde{s}x_1 + \tilde{s}x_2, \quad 0$$

получим функцию h',

$$h' = \sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^{l_i} \sum_{j'=1}^{2\tilde{u}} \tilde{s}^j s_i x_{2\tilde{u}(l_0+l_1+\ldots+l_{i-1}+i+j)+j'}.$$

Из функции h', отождествляя нужным образом переменные, подставляя константу 0 и переименовывая переменные, получим функцию h'',

$$h'' = \sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^{l_i} n_{i,j} \tilde{s}^j s_i x_{l_0+l_1+\ldots+l_{i-1}+i+j+1} + \\ + \sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^{l_i} n_{i,j} \tilde{s}^j s_i x'_{l_0+l_1+\ldots+l_{i-1}+i+j+1}$$

Из равенств (**??**) и (**??**) следует, что, используя функцию h'' и операции отождествления и переименования переменных, можно получить сумматор $x_1 + x_2$. Используя рассуждения из доказательства леммы 2, несложно показать, что $K\left(\{x_1 + x_2\}\right) = L_2^0$. Теорема 2 доказана.

5. Основные результаты и их доказательства

Имеет место

Теорема 3. *Множество J_2 является приведенной критериальной системой в L_2, состоящей из предполных классов.*

Доказательство. Пусть $M \subseteq L_2$ и для любого Θ, $\Theta \in J_2$, выполнено: $M \not\subseteq \Theta$. Из теоремы 2 следует, что найдется r', $r' \in \mathbb{Z}_{(2)}$, для которого имеет место включение:

$$x_1 + x_2 + r' \in K(M). \tag{24}$$

Применив к переменной x функции $(x + x + r') + x_3 + r'$ обратную связь, получим функцию $-x_3 - 2r'$. Из равенства

$$\left(x_1 + x_2 + r'\right) + \left(-x_3 - 2r'\right) + r' = x_1 + x_2 - x_3$$

следует, что

$$x_1 + x_2 - x_3 \in K(M). \tag{25}$$

Используя (**??**) и равенство

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{j+1} - x_{j+2} - x_{j+3} - \cdots - x_{2j+1} = \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{j-1} + (x_j + x_{j+1} - x_{j+2}) - x_{j+3} - x_{j+4} - \cdots - x_{2j+1},$$

справедливое для любого j, $j = 2, 3, \dots$, получим:

$$f^{(2j+1)} = x_1 + x_2 + \dots + x_{j+1} - x_{j+2} - x_{j+3} - \dots - x_{2j+1} \in K(M),$$

$j = 1, 2, \dots$.

Применив к переменной x функции $x + x + r'$ операцию обратной связи, получим константу $(-r')$.

Найдутся функции f_0 и f_1,

$$f_0 \in M \setminus T_0, \;\; f_1 \in M \setminus T_1.$$

Множество

$$\left\{-r', f_0\left(-r', -r', \dots, -r'\right), f_1\left(-r', -r', \dots, -r'\right)\right\}$$

содержит константы $\tilde{r}_0$ и $\tilde{r}_1$,

$$\tilde{r}_0 \in 2\mathbb{Z}_{(2)}, \;\; \tilde{r}_1 \notin 2\mathbb{Z}_{(2)}.$$

Пусть $\tilde{r}_0 = \frac{\tilde{u}_0}{\tilde{v}_0}$, $\tilde{r}_1 = \frac{\tilde{u}_1}{\tilde{v}_1}$. Обозначим числа $\tilde{u}_1\tilde{v}_0$ и $\tilde{u}_0\tilde{v}_1$ через a и b, соответственно. Рассмотрим 2 случая.

Если числа $\tilde{r}_0$ и $\tilde{r}_1$ имеют одинаковые знаки, то, применив к переменной x функции

$$f^{2(|a|+|b|)+1}\left(\underbrace{\tilde{r}_0, \tilde{r}_0, \dots, \tilde{r}_0}_{|a| \text{ раз } r}, \underbrace{x, x, \dots, x}_{|b|+1 \text{ раз } x}, \underbrace{\tilde{r}_1, \tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_1}_{|b| \text{ раз } r}, \underbrace{x, x, \dots, x}_{|a| \text{ раз } x}\right)$$

операцию обратной связи, получим константу 0.

Если числа $\tilde{r}_0$ и $\tilde{r}_1$ имеют разные знаки, то константу 0 получим, применив операцию обратной связи к переменной x функции

$$f^{2(|a|+|b|)+1}\left(\underbrace{\tilde{r}_0, \tilde{r}_0, \dots, \tilde{r}_0}_{|a| \text{ раз } r}, \underbrace{\tilde{r}_1, \tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_1}_{|b| \text{ раз } r}, \underbrace{x, x, \dots, x}_{|a|+|b|+1 \text{ раз } x}\right).$$

Таким образом,

$$0 \in K(M), \;\; x_1 + x_2 \in K(M).$$

Функцию $\tilde{r}_1^{-1}(x)$ в случае $\tilde{r}_1 > 0$ получим, применив операцию обратной связи к переменной x' функции

$$f^{2(\tilde{u}_1+\tilde{v}_1)+1}\left(\underbrace{x', x', \ldots, x'}_{\tilde{u}_1+1 \text{ раз } x'}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\tilde{v}_1+\tilde{u}_1 \text{ раз } 0}, \underbrace{x, x, \ldots, x}_{\tilde{v}_1 \text{ раз } x}\right).$$

А в случае $\tilde{r}_1 < 0$ эту функцию получим, применяя операцию обратной связи к переменной x' функции

$$f^{2(-\tilde{u}_1+\tilde{v}_1)+1}\left(\underbrace{x', x', \ldots, x'}_{-\tilde{u}_1+1 \text{ раз } x'}, \underbrace{x, x, \ldots, x}_{\tilde{v}_1 \text{ раз } x}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\tilde{v}_1-\tilde{u}_1 \text{ раз } 0}\right).$$

Имеет место равенство:

$$\xi_1(x) = x + x + \tilde{r}_1^{-1}(\tilde{r}_1).$$

Поэтому

$$\{\ x_1 + x_2,\ \ \xi_1(x)\ \} \subseteq K(M).$$

Отсюда и из леммы 2 следует $K(M) = L_2$, то есть J_2 — критериальная система в L_2. Приведенность этой системы следует из теоремы 1.

Как нетрудно видеть, каждый замкнутый класс системы J_2 является предполным. Предполных классов, не содержащихся в J_2 нет. Действительно, пусть такой класс Θ найдется. Тогда в Θ содержится функция f_1 у котоой не менее 2-х непосредственных переменных. Эта функция может содержаться лишь в конечном подмножестве J_2' классов из множества J_2. Но для каждого Θ', $\Theta' \in J_2'$, в Θ найдется функция $f_{\Theta'}$, не содержащаяся в Θ'. По доказанному выше,

$$K\left(\left\{\ f_1,\ \ f_{\Theta'}\ \mid\ \Theta' \in J'_2\ \right\}\right) = L_2,$$

Поэтому $K(\Theta) = L_2$, что противоречит предположению, что Θ — предполный класс. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Задача проверки полноты конечных систем из L_2 алгоритмически разрешимы.*

Доказательство. Очевидна конечность проверки соотношения $f \in \Theta$ для любых f и Θ, $f \in L_2$, $\Theta \in J_2$. Как отмечалось при доказательстве теоремы 3, для проверки полноты конечного множества функций требуется выполнить конечное число таких проверок. Отсюда вытекает теорема 4.

Список литературы

[1] Гасанов Э. Э. Прогнозирование периодических сверхсобытий автоматами // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2015. — Т. 19, вып. 1. — С. 23–34.

[2] Гербуз В. Г. О связи функций автомата и автоматной функции // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2015. — Т. 19, вып. 2. — С. 135–142.

[3] Гасанов Э. Э., Мастихина А. А. Прогнозирование общерегулярных сверхсобытий автоматами // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2015. — Т. 19, вып. 3. — С. 127–154.

[4] Летуновский А. А. Выразимость линейных автоматов относительно расширенной суперпозиции // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2015. — Т. 19, вып. 1. — С. 161–170.

[5] Бабин Д. Н. Автоматы с суперпозициями, пример нерасширяемости до предполного класса // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2015. — Т. 19, вып. 3. — С. 87–93.

[6] Бабин Д. Н., Летуновский А. А. О возможностях суперпозиции, при наличии в базисе автоматов фиксированной добавки из булевых функций и задержки // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2015. — Т. 19, вып. 3. — С. 71–78.

[7] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. — М.: Наука, 1985.

[8] Кратко М. И. Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов // ДАН СССР. — 1964. — Т. 155, № 1. — С. 35–37.

[9] Буевич В. А. Об алгоритмической неразрешимости распознавания А-полноты для о.-д. функций // Мат. заметки. — 1972. — Вып. 6. — С. 687–697.

[10] Кудрявцев В. Б. О мощности множеств предполных множеств некоторых функциональных систем, связанных с автоматами // Проблемы кибернетики. — 1965. — Вып. 13. — С. 45–74.

[11] Часовских А. А. Проблема полноты для класса линейно-автоматных функций // Дискретная математика. — 2015. — Т. 27, № 2. — С. 134–151.

[12] Часовских А. А. Критериальные системы в классах линейно-автоматных функций над конечными полями // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2015. — Т. 19, вып. 3. — С. 195–207.

[13] Алешин С. В., Пантелеев П. А. Конечные автоматы и числа // Дискретная математика. — 2015. — Т. 27, № 4. — С. 3–20.

[14] Часовских А. А. О полноте в классе конечных автоматов, вычисляющих некоторые аффинные функции // Интеллектуальные системы. — 2013. — Т. 17, вып. 1–4. — С. 202–205.

[15] Hensel K. Zahlentheorie. — Berlin und Leipzig: G.m.b.H., 1913.

[16] Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. Изд. 3. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985.

[17] Лунц А. Г. p-адический аппарат в теории конечных автоматов // Проблемы кибернетики. — 1965. — Вып. 14. — С. 17–30.

[18] Часовских А. А. О полноте в классе линейных автоматов // Математические вопросы кибернетики. — 1991. — Вып. 3. — С. 140–166.