Улучшение нижней оценки на максимальную длину периода выходной последовательности автономного автомата с магазинной памятью

И. Е. Иванов (МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва)

Ранее автором было доказано, что автоматы с магазинной памятью сохраняют периодические последовательности, и была приведена экспоненциальная от характеристик автомата оценка сверху на максимальную длину периода. Для случая, когда алфавит магазина состоит из одного символа, автору удалось понизить общую оценку до квадратичной. В случае алфавита, состоящего хотя бы из двух символов, автором было доказано, что существенно понизить верхнюю оценку нельзя. В данной работе приводится улучшение предложенной ранее нижней оценки. Новое доказательство заметно проще предыдущей конструкции.

Ключевые слова: автомат с магазинной памятью, детерминированная функция, периодические последовательности.

1. Введение

Автомат с магазинной памятью возник в математике в связи с развитием теории формальных языков. Он является распознавателем для контекстно-свободных грамматик. Важность магазинов (известных также под названием стеков) в процессах обработки языков была осознана в начале 1950-х годов. Эттингер [**?**] и Шютценберже [**?**] первыми формализовали понятие автомата с магазинной памятью. Эквивалентность автоматов с магазинной памятью и контекстно-свободных грамматик была показана Хомским [**?**] и Эви [**?**].

Очень скоро стало понятно, что класс контектно-свободных языков устроен сложнее класса регулярных. В работах [**?**, **?**] появились примеры алгоритмически неразрешаемых проблем, а именно:

- не существует алгоритма, позволяющего установить равенство двух контестно-свободных языков;
- не существует алгоритма проверки, что один контектно-свободный язык лежит в другом;
- не существует алгоритма проверки, что пересечение двух контекстно-свободных языков является пустым;
- не существует алгоритма проверки контекстно-свободного языка на регулярность.

Заметим, что все эти проблемы разрешимы в классе регулярных языков. Исследования их свойств довольно скоро сформировали теорию автоматов как отдельное направление дискретной математики. Возникли уже самостоятельные задачи описания автоматов как функциональных систем. Были доказаны фундаментальные свойства автоматов как преобразователей — сохранение периодических последовательностей и, как следствие, отсутствие конечных полных систем (относительно суперпозиции) [**?**]. Д. Н. Бабиным было доказано, что что арность множества автоматных функций равна двум (аналог 13-ой проблемы Гильберта для автоматных функций) [**?**]. Интересные результаты о периодических свойствах конечных автоматов получил А. А. Летуновский, полностью описав периоды выходных последовательностей, которые может генерировать произвольный автомат из замыкания конечной системы автоматов [**?**, **?**].

Оказалось, что многие техники работы с конечными автоматами и регулярными языками для автоматов с магазинной памятью уже не работают. В частности, было показано, что класс языков, разпознаваемых детерминированными автоматами с магазинной памятью, не равен классу всех контекстно-свободных языков, а является его собственным подмножеством [**?**, **?**]. В работе [**?**] было доказано, что автоматы с магазинной памятью сохраняют периодические последовательности. Оказалось, что в случае, когда магазин представляет собой счетчик (то есть алфавит магазина содержит только один символ), максимльная длина периода выходной последовательности квадратично зависит от характеристик автомата. В работе [**?**] было показано, что если в алфавите магазина есть хотя бы два символа, то нельзя ограничить длину выходной последовательности сверху полиномом от характеристик автомата.

В данной работе удалось существенно упростить доказательство и улучшить нижнюю оценку на максимальную длину периода. Приведено более простое доказательство периодичности выходной последовательности автономного автомата с магазинной памятью и верхней оценки на минимальную длину периода.

Работа включает в себя 7 разделов. В разделе 2 формулируются основные определения и обозначения, используемые далее. В следующем разделе приводится доказательство свойства периодичности выходной последовательности для автономного случая. В 4 приводится доказательство верхней оценки на длину периода. Далее приводится доказательство нижней оценки путём построения примеров. В конце работы приведено заключение и список используемой литературы.

2. Определения

Инициальным детерминированным автоматом с магазиной памятью будем называть «девятку»

$$P = \{A, Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0\},$$

где A — входной алфавит, Q — конечное множество состояний, B — выходной алфавит, Γ — алфавит памяти (алфавит ленты магазина), $\varphi : A \times Q \times (\Gamma \cup \lambda) \to Q$ — функция переходов, $\psi : A \times Q \times (\Gamma \cup \lambda) \to B$ — функция выхода, $\eta : A \times Q \times (\Gamma \cup \lambda) \to \Gamma^*$ — функция памяти, $q_0 \in Q$ — начальное состояние, $\gamma_0 \in \Gamma^*$ — начальная запись в магазине.

Функционирование P можно определить с помощью системы канонических уравнений, которые задают в каждый момент времени t состояние автомата $q(t)$, записанное в магазине слово $\gamma(t)$, и выход автомата $b(t)$ при подаче на вход $a(t)$:

$$\begin{cases} q(0) = q_0, \\ \gamma(0) = \gamma_0, \\ z(t) = LS(\gamma(t)), \\ q(t+1) = \varphi(a(t), q(t), z(t)), \\ \gamma(t+1) = S(\gamma(t))\eta(a(t), q(t), z(t)), \\ b(t) = \psi(a(t), q(t), z(t)), \end{cases}$$

где $LS : \Gamma^* \to \Gamma \cup \{\lambda\}$ возвращает последний символ при подаче непустого слова и $LS(\lambda) = \lambda$, а $S : \Gamma^* \to \Gamma^*$ — стирает последний символ входного слова и $S(\lambda) = \lambda$.

Инициальный автомат с магазинной памятью опеделяет детерминированную функцию $f : A^* \to B^*$. Обозначим $\mathcal{M}(A, B)$ множество детерминированных функций, порождаемых автоматами с магазинной памятью. Отметим, что $\mathcal{M}(A, B)$ содержит множество ограниченно-детерминированных функций.

Обозначим $n = |Q|$, $m = |\Gamma|$, $k = \max\limits_{(q,z)\in Q\times\Gamma\cup\{\lambda\}} |\eta(q, z)|$ и будем говорить, что $P \in \mathcal{M}(n, m, k)$. Здесь n — число состояний, m — арность (или ширина) магазина, k — максимальное возможная длина записи в магазин за один такт.

Будем говорить, что $P_0 = \{Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0\}$ — инициальный автомат с магазинной памятью без входа (автономный), если он удовлетворяет системе канонических уравнений:

$$\begin{cases} q(0) = q_0, \\ \gamma(0) = \gamma_0, \\ z(t) = LS(\gamma(t)), \\ q(t+1) = \varphi(q(t), z(t)), \\ \gamma(t+1) = S(\gamma(t))\eta(q(t), z(t)), \\ b(t) = \psi(q(t), z(t)). \end{cases}$$

В тех же обозначениях $n = |Q|$, $m = |\Gamma|$, $k = \max\limits_{(q,z)\in Q\times\Gamma\cup\{\lambda\}} |\eta(q, z)|$ будем говорить, что автомат с магазинной памятью без входа $P_0 \in \mathcal{M}_0(n, m, k)$.

В работе [?] была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $f : A^* \to B^*$ и $f \in \mathcal{M}(A, B)$. Тогда f преобразует периодические сверхслова в периодические.*

Далее будет приведено упрощенное доказательство для автономного случая.

Для автомата с магазинной памятью без входа обозначим $L(P)$ минимальную длину периода периодической последовательности, которую он генерирует. Нас будет интересовать максимальная длина периода в классе автоматов $\mathcal{M}_0(n, m, k)$, а именно:

$$L(n, m, k) = \max_{P\in\mathcal{M}_0(n,m,k)} L(P).$$

Для оценки длины периода автономного автомата с магазинной памятью удобно пользоваться следующими функциями: $\omega(q, \gamma) : Q \times \Gamma^* \to$

$\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ и $\pi(q, \gamma) : Q \times \Gamma^* \to Q$, которые формально определим следующим образом. Пусть автомат находится в состоянии q, а в магазине лежит слово γ. Если существует такое минимальное положительное количество тактов τ работы автомата, что магазин становится пустым, а автомат переходит в состояние q', то положим, что $\omega(q, \gamma) = \tau$, а $\pi(q, \gamma) = q'$ иначе $\omega(q, \gamma) = \infty$, а значение $\pi(q, \gamma)$ не определено.

3. Периодичность выходной последовательности

Теорема 2. *Автономный автомат с магазинной памятью* $P = \{Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0\}$ *генерирует периодическую выходную последовательность.*

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что автомат имеет самую общую функцию выхода, то есть $B = Q \times \Gamma \cup \{\lambda\}$ и $\psi(q, z) = (q, z)$. Рассмотрим последовательности $q(t), \gamma(t), z(t)$, заданные каноническими уравнениями. Для целого $h > 0$ определим $M(h) = \{t \mid |\gamma(t)| \leqslant h\}$.

Если найдётся такое h_0, что $|M(h_0)| = \infty$, то это означет, что найдутся такие t_1 и t_2 из $M(h_0)$, что $q(t_1) = q(t_2)$ и $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, что и доказывает периодичность выходной последовательности в силу детерминированности канонических уравнений.

Пусть теперь для любого h выполнено, что $|M(h)| < \infty$. Заметим, что $M(h+1) \supseteq M(h)$. Значит, начиная с некоторого номера H, будет выполнено, что $|M(h)| > 0$ при $h > H$ и, следовательно, корректно определена последовательность $t_h = \max M(h)$. В последовательности t_h найдутся такие $t_{h_1} < t_{h_2}$, что $q(t_{h_1}) = q(t_{h_2})$ и $z(t_{h_1}) = z(t_{h_2})$. Из определения последовательности t_h следует, что функционирование автомата, начиная с моментов t_h, зависит лишь от верхнего символа магазина и состояния автомата. Тогда из детерминированности канонических уравнений получаем, что для любого неотрицательного целого τ выполнено $q(t_{h_1} + \tau) = q(t_{h_2} + \tau)$ и $z(t_{h_1} + \tau) = z(t_{h_2} + \tau)$, откуда и следует периодичность последовательностей $q(t)$ и $z(t)$ и выходной последовательности. Теорема доказана.

4. Верхняя оценка

Теорема 3. *При* $k > 1$

$$L(n, m, k) \leqslant \frac{n(k^{nm+1} - 1)}{k - 1}.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный автономный автомат с магазинной памятью $P = \{Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0\}$ из $\mathcal{M}_0(n, m, k)$ и докажем оценку для $L(P)$. Не ограничивая общность рассуждения, можно считать, что у выходной последовательности отсутствует предпериод и что автомат имеет самую общую функцию выхода, то есть $B = Q \times \Gamma \cup \{\lambda\}$ и $\psi(q, z) = (q, z)$. Пусть последовательности $q(t), \gamma(t), z(t)$ заданы каноническими уравнениями автомата P.

Рассмотрим несколько случаев.

Пусть автомат P достигает дна магазина бесконечное число раз, то есть любой записанный символ будет удален из магазина. В этом случае для всех достижимых пар из $Q \times \Gamma^*$ определены функции ω и π. Нас будут интересовать значения функций на однобуквенных словах. Причем для каждого правила записи в магазин $\eta(q, z) = \alpha(1) \dots \alpha(\ell)$ можно записать, что

$$\omega(q, z) = 1 + \omega(q_\ell, \alpha(\ell)) + \omega(q_{\ell-1}, \alpha(\ell - 1)) + \ldots + \omega(q_1, \alpha(1)),$$

где $q_\ell = \varphi(q, z)$, и $q_i = \pi(q_{i+1}, \alpha(i + 1))$.

Таким образом, можно составить систему линейных уравнений на значения $w(q, z)$. Пусть вектор $\vec{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_{nm})$ — решение этой системы, причем упорядоченное по возрастанию. Очевидно, что $\omega_1 = 1$, $\omega_i \leqslant 1 + k\omega_{i-1}$ при $i > 1$. Из этих соотношений, следует, что

$$\omega_i \leqslant \sum_{j=0}^{i-1} k^j.$$

Значит, для длины периода выполнено

$$L(P) \leqslant \sum_{q \in Q} \omega(q, \lambda) \leqslant n(1 + k\omega_1) \leqslant n \sum_{i=0}^{nm} k^i \leqslant \frac{n(k^{nm+1} - 1)}{k - 1}.$$

Рассмотрим следующий случай. Пусть последовательность $|\gamma(t)|$ ограничена и $|\gamma(t)| > 0$. Рассмотрим $\ell = \min\limits_{0 < t \leqslant L(P)} |\gamma(t)|$. Обозначим

$\gamma' = \gamma(t_0)$ и $q' = q(t_0)$, где t_0 таково, что $|\gamma(t_0)| = l$. Не ограничивая общности рассуждения, можно считать, что $\gamma_0 = \gamma'$ и $q_0 = q'$. Рассмотрим автомат P', который получится из автомата P заменой начального слова в магазине на $LS(\gamma')$. Очевидно, что P и P' геренируют одни и те же периодические последовательности. Теперь изменим поведение автомата P' следующим образом. Тот такт работы, когда у автомата P' в магазине находится однобуквенное слово $LS(\gamma')$, а сам автомат находится в состоянии q', разобьем на два такта: в первый такт мы стираем $LS(\gamma')$ и остаемся в том же состоянии q', а во втором такте пишем в магазин нужное слово и переходим в следующее состояние. Таким образом, полученный автомат удовлетворяет предыдущему случаю, а длина периода последовательности, которую он генерирует на 1 больше, чем у автомата P. Таким образом, оценка верна и в данном случае.

Рассмотрим последний случай. Пусть последовательность $|\gamma(t)|$ не ограничена. Пусть $\ell = \min\limits_{0<t\leqslant L(P)} |\gamma(t)|$. Обозначим $\gamma' = \gamma(t_0)$ и $q' = q(t_0)$, где t_0 таково, что $|\gamma(t_0)| = l$. Не ограничивая общности рассуждения, можно считать, что $\gamma_0 = \gamma'$ и $q_0 = q'$. Рассмотрим автомат P', который получится из автомата P заменой начального слова в магазине на $LS(\gamma')$. Очевидно, что P и P' геренируют одни и те же периодические последовательности. Теперь изменим поведение автомата P' следующим образом. Добавим состояние q''. Автомат P' из состояния q' переходит в q'', в котором опустошается магазин. При пустом магазине в состоянии q'' P' ведет себя так же, как автомат P, когда находится в состоянии q' и видит символ $LS(\gamma')$ магазина. Полученный автомат удовлетворяет первому рассматриваемому случаю. Учитывая, что $\omega(q'', z) = 1$, видим, что добавленное состояние не увеличивает оценку, что и завершает доказательство.

5. Нижняя оценка

Лемма 1. *Пусть дана система уравнений*

$$\begin{cases} x_0 = a + bx_1, \\ x_1 = a + bx_2, \\ \dots \\ x_{m-1} = a + bx_m, \\ x_m = c \end{cases}$$

где a, b, c — некоторые действительные параметры, причем $b \neq 1$. Тогда

$$x_0 = a\frac{b^m - 1}{b - 1} + b^m c.$$

Доказательство.

$$x_0 = a + bx_1 = a + b(a + bx_2) = a + ab + b^2 x_2 = a + ab + ab^2 + b^3 x_3 = \ldots$$
$$\ldots = a(1 + b + b^2 + \ldots + b^{m-1}) + b^m x_m.$$

Отсюда и получаем, что

$$x_0 = a\frac{b^m - 1}{b - 1} + b^m c,$$

что и требовалось доказать.

Пример 1. Пусть автономный автомат с магазинной памятью $P_m = \{Q, B, \Gamma, \varphi, \eta, \psi, q_n, \lambda\} \in \mathcal{M}_0(n, m, k)$, где $B = \{0, 1\}$, $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$, $\Gamma = \{1, \ldots, m\}$, $m > 1$,

$$\psi(q, z) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ q = q_1, \ z = \lambda, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

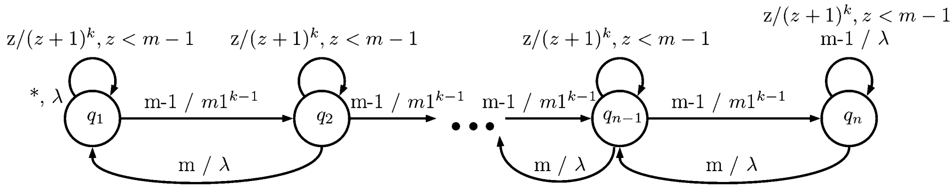
$$\varphi(q, z) = \begin{cases} q_{i+1}, & \text{если } \ q = q_i, \ i \neq n, \ z = m - 1, \\ q_{i-1}, & \text{если } \ q = q_i, \ i \neq 0, \ z = m, \\ q, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\eta(q, z) = \begin{cases} (z + 1)^k, & \text{если } \ z < m - 1, \\ m1^{k-1}, & \text{если } \ q \neq q_n, \ z = m - 1, \\ \lambda, & \text{иначе} \end{cases}$$

Ниже приведем диаграмму этого автомата. Переходы автомата описываются следующим шаблоном z/η, то есть из данного состояния q, при значении верхнего символа магазина z, автомат записывает на выходную ленту пару (q, z), а в магазине стирает последний символ и дописывает слово η. Следующее состояние указывает стрелка. Для удобства записи формул будем считать, что пустому значению λ соотвествует значение $z = 0$.

Из уравнений следует, что

$$\omega(q, z) = 1 + k\omega(q, z + 1), \ z < m - 1.$$



Очевидно, что $\omega(q_n, m-1) = 1$. При $i \neq n$ имеем:

$$\omega(q_i, m) = 1 + \omega(q_{i+1}, m1^{k-1}) = 1 + (k-1)\omega(q_{i+1}, 1) + \omega(q_{i+1}, m).$$

Пусть ω_0 — длина периода последовательности, сгенерированной автоматом с магазинной памятью. Тогда $\omega_0 = 1 + k\omega(q_1, 1)$. Обозначая $\omega_{i,j} = \omega(q_i, j)$ получаем следующую систему линейных уравнений при $m > 2$ (случай $m = 2$ будет рассмотрен отдельно):

$$\begin{cases} \omega_{n,m-1} = 1, \\ \omega_{n,m-2} = 1 + k\omega_{n,m-1}, \\ \dots \\ \omega_{n,i} = 1 + k\omega_{n,i+1}, \\ \dots \\ \omega_{n,1} = 1 + k\omega_{n,2}, \\ \omega_{n-1,m-1} = 2 + (k-1)\omega_{n,1}, \\ \dots \\ \omega_{j,m-2} = 1 + k\omega_{j,m-1}, \\ \dots \\ \omega_{j,i} = 1 + k\omega_{j,i+1}, \\ \dots \\ \omega_{j,1} = 1 + k\omega_{j,2}, \\ \omega_{j-1,m-1} = 2 + (k-1)\omega_{j,1}, \\ \dots \\ \omega_{1,1} = 1 + k\omega_{1,2}, \\ \omega_0 = 1 + k\omega_{1,1} \end{cases}$$

Применяя лемму 1 к уравнениям вида $w_{i,j} = 1 + kw_{i,j+1}$ при каждом фиксированном i и $j = 1, \dots, m-2$, удаётся получить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \omega_{n,m-1} = 1, \\ \omega_{n,1} = \frac{k^{m-2}-1}{k-1} + \omega_{n,m-1}k^{m-2}, \\ \omega_{n-1,m-1} = 2 + (k-1)\omega_{n,1}, \\ \dots \\ \omega_{i,1} = \frac{k^{m-2}-1}{k-1} + \omega_{i,m-1}k^{m-2}, \\ \omega_{i-1,m-1} = 2 + (k-1)\omega_{i,1}, \\ \dots \\ \omega_{2,1} = \frac{k^{m-2}-1}{k-1} + \omega_{2,m-1}k^{m-2}, \\ \omega_{1,m-1} = 2 + (k-1)\omega_{2,1}, \\ \omega_0 = \frac{k^{m-1}-1}{k-1} + k^{m-1}\omega_{1,m-1} \end{cases}$$

Преобразовывая дальше, получаем:

$$\begin{cases} \omega_{n,m-1} = 1, \\ \omega_{n-1,m-1} = 1 + k^{m-2} + \omega_{n,m-1}(k^{m-1} - k^{m-2}), \\ \dots \\ \omega_{i-1,m-1} = 1 + k^{m-2} + \omega_{i,m-1}(k^{m-1} - k^{m-2}), \\ \dots \\ \omega_{1,m-1} = 1 + k^{m-2} + \omega_{2,m-1}(k^{m-1} - k^{m-2}), \\ \omega_0 = \frac{k^{m-1}-1}{k-1} + k^{m-1}\omega_{1,m-1} \end{cases}$$

К полученной системе снова применим лемму 1. Получаем, что

$$\begin{cases} \omega_{1,m-1} = (1 + k^{m-2})\frac{(k^{m-1}-k^{m-2})^{n-1}-1}{k^{m-1}-k^{m-2}-1} + (k^{m-1} - k^{m-2})^{n-1}, \\ \omega_0 = \frac{k^{m-1}-1}{k-1} + k^{m-1}\omega_{1,m-1} \end{cases}$$

Откуда находим период выходной последовательности:

$$\omega_0 = \frac{k^{m-1}-1}{k-1} + k^{m-1}((1+k^{m-2})\frac{(k^{m-1}-k^{m-2})^{n-1}-1}{k^{m-1}-k^{m-2}-1} + (k^{m-1}-k^{m-2})^{n-1}).$$

Теперь перейдем к рассмотрению случая, когда $m = 2$. В этом случае получается следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \omega_{n,1} = 1, \\ \omega_{n-1,1} = 2 + (k-1)\omega_{n,1}, \\ \dots \\ \omega_{i-1,1} = 2 + (k-1)\omega_{i,1}, \\ \dots \\ \omega_{1,m-1} = 2 + (k-1)\omega_{2,1}, \\ \omega_0 = 1 + k\omega_{1,m-1} \end{cases}$$

Применяя лемму 1 и преобразовывая, получаем, что

$$\omega_0 = \begin{cases} 4n-1, \quad \text{при} \quad k=2, \\ 1 + \frac{k}{k-2}((k-1)^n + (k-1)^{n-1} - 2), \quad \text{при} \quad k > 2 \end{cases}$$

Объединяя обе формулы, получаем итоговую:

$$L(P_m) = \omega_0 = \begin{cases} 4n-1, \quad \text{при} \quad m=2,\ k=2, \\ \frac{k^{m-1}-1}{k-1} + k^{m-1}\Big((1+k^{m-2})\frac{(k^{m-1}-k^{m-2})^{n-1}-1}{k^{m-1}-k^{m-2}-1} + \\ \qquad\qquad +(k^{m-1}-k^{m-2})^{n-1}\Big), \ \text{иначе} \end{cases}$$

К сожалению, данный пример автомата для случая $k = 2,\ m = 2$ вырождается, то есть длина периода в этом случае существенно отличается. Поэтому рассмотрим следующий пример.

Пример 2. Пусть автономный автомат с магазинной памятью $P(n') = \{Q, B, \Gamma, \varphi, \eta, \psi, q_s^1, \lambda\} \in \mathcal{M}_0(n, m, k)$, где $n' \in \mathbb{N}$ — параметр, $B = \{0, 1\}$, $Q = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n'} Q_i$, где $Q_i = \{q_s^i, q_{s1}^i, q_{s2}^i, q_1^i, q_2^i, \dots, q_8^i\}$, $\Gamma = \{1, 2\}$,

$$\psi(q, z) = \begin{cases} 1, \quad \text{если} \quad q = q_s^1,\ z = \lambda, \\ 0, \quad \text{иначе} \end{cases}$$

$$\varphi(q,z)=\begin{cases} q_s^i, & \text{если } q=q_{s2}^{i+1},\ z=2,\ i<n',\\ q_s^i, & \text{если } q=q_8^{i-1},\ i>1,\\ q_{s1}^i, & \text{если } q=q_s^i,\ z=1,\\ q_{s2}^i, & \text{если } q=q_s^i,\ z=2,\\ q_1^i, & \text{если } q=q_s^i,\ z=\lambda,\\ q_2^i, & \text{если } q=q_1^i,\\ q_3^i, & \text{если } q=q_2^i,\\ q_3^i, & \text{если } q=q_{s1}^i,\ z=1,\\ q_4^i, & \text{если } q=q_3^i,\\ q_5^i, & \text{если } q=q_4^i,\\ q_5^i, & \text{если } q=q_{s2}^i,\ z=1,\\ q_6^i, & \text{если } q=q_5^i,\\ q_7^i, & \text{если } q=q_6^i,\\ q_7^i, & \text{если } q=q_{s1}^i,\ z=2,\ i<n',\\ q_8^i, & \text{если } q=q_7^i,\ i<n',\\ q_s^{n'}, & \text{если } q=q_{s1}^{n'},\ z=2,\\ q_s^{n'}, & \text{если } q=q_7^{n'} \end{cases}$$

$$\eta(q,z)=\begin{cases} \lambda, & \text{если } q=q_{s2}^{i+1},\ z=2,\ i<n',\\ 11, & \text{если } q=q_8^{i-1},\ i>1,\\ \lambda, & \text{если } q=q_s^i,\ z=1,\\ \lambda, & \text{если } q=q_s^i,\ z=2,\\ 1x, & \text{если } q=q_s^i,\ z=\lambda,\\ 1x, & \text{если } q=q_1^i,\\ 1x, & \text{если } q=q_2^i,\\ 1x, & \text{если } q=q_{s1}^i,\ z=1,\\ 2x, & \text{если } q=q_3^i,\\ 2x, & \text{если } q=q_4^i,\\ 2x, & \text{если } q=q_{s2}^i,\ z=1,\\ 1x, & \text{если } q=q_5^i,\\ 2x, & \text{если } q=q_6^i,\\ 2x, & \text{если } q=q_{s1}^i,\ z=2,\ i<n',\\ 2x, & \text{если } q=q_7^i,\ i<n',\\ \lambda, & \text{если } q=q_{s1}^{n'},\ z=2,\\ 1, & \text{если } q=q_7^{n'} \end{cases}$$

Ниже приведем диаграмму этого автомата. Переходы автомата описываются следующим шаблоном z/η, то есть из данного состояния, при значении верхнего символа магазина z, автомат записывает на выходную ленту пару (q, z), а в магазине стирает последний символ и дописывает слово η. Следующее состояние указывает стрелка. Для удобства записи формул будем считать, что пустому значению λ соотвествует значение $z = 0$.

Данный автомат имитирует работу автомата из предыдущего примера с n' состояниями, $k = 2$, $m = 4$. Обозначим его P'. Поскольку в текущем случае $\Gamma = \{1, 2\}$, то чтобы имитировать автомат мы будем кодировать использовать следующую кодировку:

$\#1$	11
$\#2$	12
$\#3$	21
$\#4$	22

Каждому состоянию P' соотвествует множество состояний Q_i. Текущий автомат устроен таким образом, что в состоянии q_s^i в магазине будет записан корректный код. И каждому переход из состояния q_i в q_j автомата P' соовествует переход из состояний q_s^i в q_s^j текущего автомата с аналогичной трансформацией магазина. Заметим, что в текущем случае на этот переход может потребоваться более одного такта.

Теперь, когда стало понятно из каких соображений строился автомат, строго подсчитаем длину периода выходящей последовательности.

Из уравнений автомата получаем:

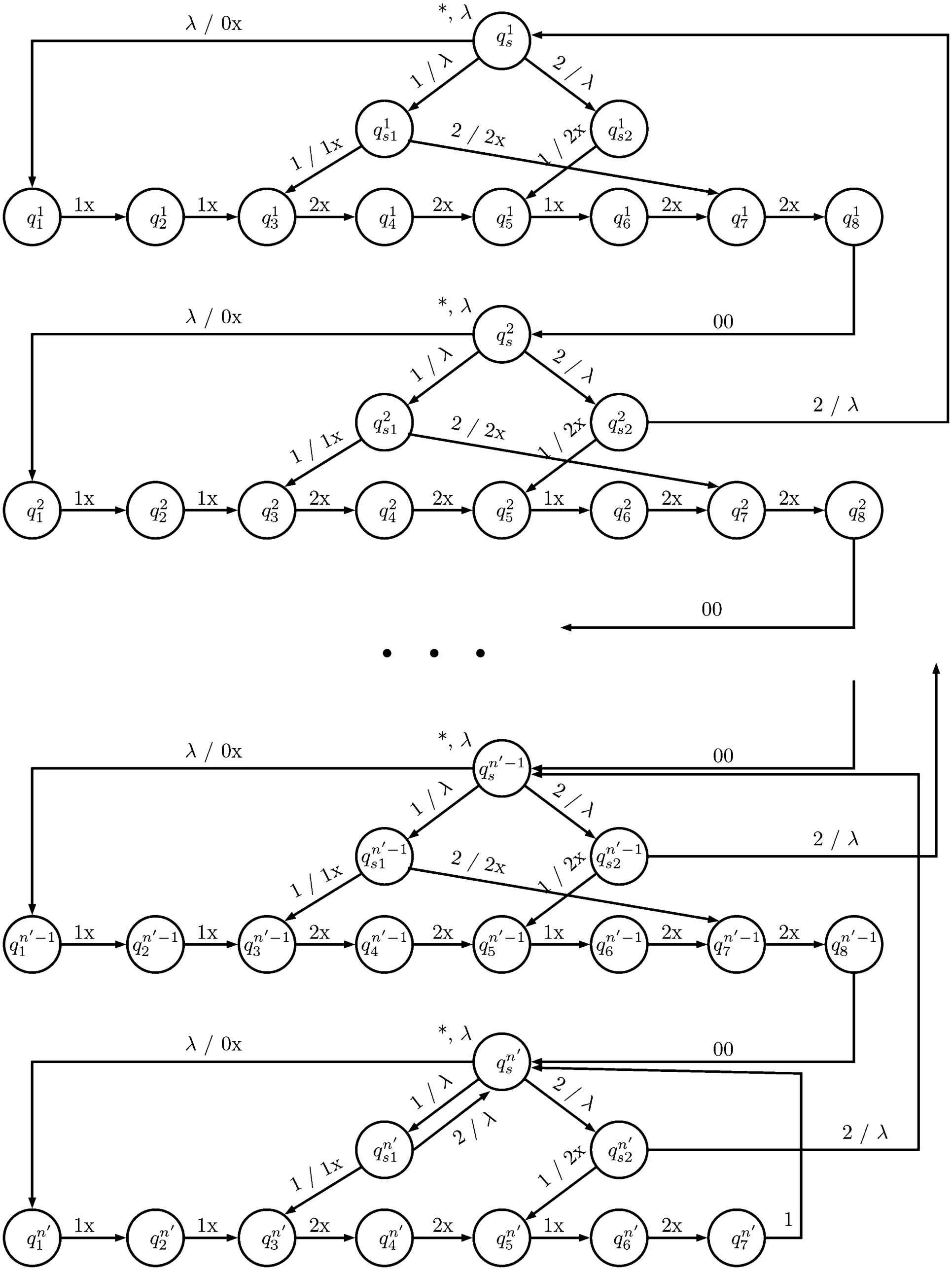
$$\omega(q_s^{n'}, \#3) = 2,$$
$$\omega(q_s^{n'}, \#2) = 5 + \omega(q_s^{n'}, \#3\#3) = 5 + 2\omega(q_s^{n'}, \#3) = 9,$$
$$\omega(q_s^{n'}, \#1) = 7 + \omega(q_s^{n'}, \#2\#3\#3) = 7 + 2\omega(q_s^{n'}, \#3) + \omega(q_s^{n'}, \#2) = 20.$$

Пусть $1 < i < n'$. Тогда

$$\omega(q_s^i, \#3) = 4 + \omega(q_s^{i+1}, \#4\#1) = \\ = 4 + \omega(q_s^{i+1}, \#4) + \omega(q_s^{i+1}, \#1) = 6 + \omega(q_s^{i+1}, \#1)$$

и

$$\omega(q_s^i, \#2) = 6 + \omega(q_s^{i+1}, \#3\#4\#1) = \\ = 6 + \omega(q_s^{i+1}, \#1) + \omega(q_s^{i+1}, \#4) + \omega(q_s^i, \#3) = 14 + 2\omega(q_s^{i+1}, \#1).$$



Откуда получаем, что

$$\omega(q_s^i, \#1) = 8 + \omega(q_s^{i+1}, \#2\#3\#4\#1) = 30 + 4\omega(q_s^{i+1}, \#1).$$

Из полученных выше уравнений составим следующую систему:

$$\begin{cases} \omega(q_s^{n'}, \#1) = 20, \\ \omega(q_s^{n'-1}, \#1) = 30 + 4\omega(q_s^{n'}, \#1), \\ \dots \\ \omega(q_s^{i-1}, \#1) = 30 + 4\omega(q_s^{i}, \#1), \\ \dots \\ \omega(q_s^{1}, \#1) = 30 + 4\omega(q_s^{2}, \#1) \end{cases}$$

Воспользовавшись леммой, получаем, что

$$\omega q_s^1, \#1 = 30 \cdot 4^{n'-1} - 10.$$

Теперь найдем длину периода

$$\begin{gathered} \tau = \omega(q_s^1, \lambda) = 9 + \omega(q_s^2, \#1\#2\#3\#4\#1) = \\ = 9 + \omega(q_s^1, \#1\#2\#3) + \omega(q_s^2, \#4\#1) = 11 + \omega(q_s^1, \#1\#2\#3) + \omega(q_s^2, \#1) = \\ = 11 + \omega(q_s^1, \#1) + \omega(q_s^1, \#2) + \omega(q_s^1, \#3) + \omega(q_s^2, \#1) = \\ = 11 + \omega(q_s^1, \#1) + (14 + 2\omega(q_s^2, \#1)) + (6 + \omega(q_s^{i+1}, \#1)) + \omega(q_s^2, \#1) = \\ = 31 + \omega(q_s^1, \#1) + 4\omega(q_s^2, \#1) = 1 + 2\omega(q_s^1, \#1) = 15 \cdot 4^{n'} - 19. \end{gathered}$$

Подставляя $n' = \frac{n-1}{9}$, получаем

$$\tau = 15 \cdot 4^{\frac{n-1}{9}} - 19.$$

Из примеров следует, что доказана следующая теорема:

Теорема 4. *При $m > 1$, $k > 1$*

$$L(n, m, k) \geqslant \begin{cases} 15 \cdot 4^{\frac{n-1}{9}} - 19, \quad \textit{при} \;\; m = 2, \; k = 2, \\ \frac{k^{m-1}-1}{k-1} + k^{m-1} \Big((1 + k^{m-2}) \frac{(k^{m-1}-k^{m-2})^{n-1}-1}{k^{m-1}-k^{m-2}-1} + \\ \qquad + (k^{m-1} - k^{m-2})^{n-1} \Big), \;\; \textit{иначе} \end{cases}$$

6. Заключение

Основным результатом данной работы является улучшение ранее полученной оценки на максимульную длину периода путем построения примера автономного автомата с магазинной памятью, которые генерирует последовательность, период которой экспоненциально зависит от характеристик автомата. Конструкция приведённого в этой работе примера проще предыдущей конструкции.

Автор выражает благодарность Калачеву Глебу Вячеславовичу и проф. Гасанову Эльяру Эльдаровичу за продуктивные и конструктивные обсуждения, своему научному руководителю проф. Бабину Дмитрию Николаевичу за ценные замечания и внимание к работе.

Список литературы

[1] Oettinger A. Automatic syntatic analysis and the pushdown store // Structure of Language and its Mathematical Concepts. Proc. 12th Symposium on Applied Mathematics. — 1961. — P. 104–129.

[2] Schutzenberger M. P. On contex-free languages and pushdown automata // Information and Control. — 1963. — 6: 3. — P. 246–264.

[3] Chomsky N. Context-free grammars and pushdown storage. Quarlerly Progress Report, № 65. — Research Laboratory of Electronics, Massachusetts Institute of Technology, Cambrige, Mass, 1962.

[4] Evey R. J. Applications of pushdown-store machines // Proc. AFIPS Fall Joint Computer Conference. — 1963. — 24. — P. 215–227.

[5] Bar-Hillel Y., Perles M., Shamir E. On formal properties of simple phrase structure grammars // Z. Phonetik, Sprachwissensch., Kommunikationsforsch. — 1961. — 14. — S. 143–172.

[6] Ginsburg S., Rose G. F. Some recursively unsolvable problems in ALGOL-like languages // J. Assoc. Computing Machinety. — 1963. — 10. — P. 175–195.

[7] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. — М.: Наука, 1985.

[8] Бабин Д. Н. О полноте двухместных автоматных функций относительно суперпозиции // Дискретная математика. — 1989. — Т. 1, вып. 4. — С. 423–431.

[9] Летуновский А. А. Цикловые индексы автомата // Дискретная математика. — 2013. — Т. 25, вып. 4. — С. 24–29.

[10] Летуновский А. А. Выразимость линейных автоматов относительно расширенной суперпозиции // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2015. — Т. 19, вып. 1. — С. 161–170.

[11] Ginsburg S., Greibach S. Deterministic context free languages // Information and Control. — 1966. — Vol. 9, Iss. 6. — P. 620–648.

[12] Иванов И. Е. Некоторые классы функций, вычислимые автоматами // Интеллектуальные системы. — 2014. — Т. 15, вып. 1. — С. 361–378.

[13] Иванов И. Е. Нижняя оценка на максимальную длину периода выходной последовательности автономного автомата с магазинной памятью // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2015. — Т. 19, вып. 3. — С. 145–159.