

Класс автоматов с суперпозициями, не расширяющийся до предполного

Д. Н. Бабин (МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва)

Для суперпозиции строится пример, не расширяющегося до предполного класса, множества автоматов.

Ключевые слова: автомат, суперпозиция, предполный класс.

Введение

Известно, что решение задач полноты и выразимости для систем автоматных функций наталкивается на существенные трудности [1]. Так в работе [2] установлена континуальность множества предполных классов для систем автоматных функций, а в работе [3] установлена алгоритмическая неразрешимость задачи полноты относительно суперпозиции и обратной связи для конечных систем автоматных функций. При этом в классе автоматов с операцией суперпозиции имеет место неполнота любой конечной системы автоматов [1], а система, состоящая из автоматов с двумя входами образуют полную систему [4]. Оставался открытым вопрос о расширяемости замкнутых классов до предполных. В этой статье автор предъявил замкнутый класс автоматов, не расширяющийся до предполного класса.

Другие результаты по задаче выразимости автоматов относительно суперпозиции содержатся в работах [9, 10, 11]. Общий обзор результатов в теории автоматов дан в работе [12].

Основные определения и результаты

Пусть $E_2 = \{0, 1\}$, \mathbf{P}_2 — множество булевых функций вида

$$g : E_2^n \rightarrow E_2.$$

Пусть E_2^∞ — множество всех сверхслов из нулей и единиц

$$a(1)a(2)\dots,$$

где $a(j) \in E_2$, $j = 1, 2, \dots$

Функция вида

$$f : (E_2^\infty)^n \rightarrow (E_2^\infty)^m$$

называется *автоматной функцией* (*a-функцией*), она задается рекуррентно соотношениями

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1(1) = q_0_1, \\ \dots \\ q_s(1) = q_0_s \\ q_1(t+1) = \varphi_1(q_1(t), \dots, q_s(t), a_1, \dots, a_n), \\ \dots \\ q_s(t+1) = \varphi_s(q_1(t), \dots, q_s(t), a_1, \dots, a_n) \\ b_1(t) = \psi_1(q_1(t), \dots, q_s(t), a_1, \dots, a_n) \\ \dots \\ b_m(t) = \psi_m(q_1(t), \dots, q_s(t), a_1, \dots, a_n) \end{array} \right.$$

Вектор $q = (q_1, \dots, q_s)$ задает *состояние* a-функции f , q_0 — её *начальное состояние*, буквы

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ и } b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$$

называются *входной и выходной буквами*, а сверхслова

$$a(1)a(2)\dots, \quad b(1)b(2)\dots \text{ —}$$

входными и выходными сверхсловами, соответственно.

Вектор-функции φ и ψ называются функциями *переходов и выходной функцией*, соответственно, а шестерка

$$(E_2^n, E_2^s, E_2^m, \varphi, \psi, q_0) \text{ —}$$

автоматом, порождающим функцию f . Будем считать, что все состояния автомата достижимы из начального. Мы будем использовать для автомата обозначение

$$A = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0),$$

при этом предполагая что $A \subseteq E_2^n, Q \subseteq E_2^s, B \subseteq E_2^m$.

Класс всех a -функций обозначим через \mathbf{P} . В этом классе обычным образом вводятся операции суперпозиции автоматных функций. Для суперпозиции используются модификации операций из [5].

$$\left\{ \begin{array}{l} (\eta f)(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_2, x_3, \dots, x_n, x_1), \\ (\varepsilon f)(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3, \dots, x_n) \\ (\varpi f)(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_3, \dots, x_n) \\ (\delta f)(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \\ (f * g)(x_1, x_2, \dots, x_{m+n-1}) = f(g(x_1, \dots, x_m), x_{m+1}, \dots, x_{m+n-1}) \end{array} \right.$$

Автоматы, имеющие одинаковые автоматные функции, называются эквивалентными. Автоматы

$$\begin{aligned} A_1 &= (A_1, Q_1, B_1, \varphi_1, \psi_1, q_0^1), \\ A_2 &= (A_2, Q_2, B_2, \varphi_2, \psi_2, q_0^2) \end{aligned}$$

называются изоморфными, если они получаются взаимно-однозначным переименованием входного, выходного алфавитов и множества состояний δ, λ, τ соответственно, $\tau(q_0^1) = q_0^2$, то есть диаграммы коммутативны

$$\begin{array}{ccc} \varphi_1 : Q_1 \times A_1 \longrightarrow Q_1 & \psi_1 : Q_1 \times A_1 \longrightarrow B_1 & \\ \downarrow \tau \quad \downarrow \delta \quad \downarrow \tau & \downarrow \tau \quad \downarrow \delta \quad \downarrow \lambda & \\ \varphi_2 : Q_2 \times A_2 \longrightarrow Q_2 & \psi_2 : Q_2 \times A_2 \longrightarrow B_2. & \end{array}$$

Автоматная функция автомата получается из автоматной функции изоморфного ему, подстановкой на этот автомат сверху и снизу подходящих булевых функций. В дальнейшем нам будет удобно называть эквивалентными также автоматы изоморфные эквивалентным.

Пусть $R \subseteq \mathbf{P}$, обозначим через $[R]$ — множество a -функций, эквивалентных получающихся из R с помощью операций суперпозиции. Класс автоматных функций R называется замкнутым, если

$$R = [R].$$

Класс автоматных функций R называется предполным, если $R \subset \mathbf{P}$ и для любой автоматной функции $f \notin R$ выполнено

$$\{\{f\} \cup R\} = \mathbf{P}.$$

Автоматную функцию G_0 , задаваемую уравнениями

$$\left\{ \begin{array}{l} q(1) = 0, \\ q(t+1) = a(t), \\ b(t) = q(t), \end{array} \right.$$

назовём автоматной функцией «задержки».

Автоматную функцию T_0 , задаваемую уравнениями

$$\left\{ \begin{array}{l} (q_1(1), q_2(1)) = (0, 0) \\ (q_1(t+1), q_2(t+1)) = (a_1(t), a_2(t)); \text{ при } a_1(t)a_2(t) = 00 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{и } a_1(t)a_2(t) = 11 \\ (q_1(t+1), q_2(t+1)) = (q_1(t), q_2(t)), \text{ при } a_1(t)a_2(t) = 01 \\ (q_1(t+1), q_2(t+1)) = (q_2(t), q_1(t)), \text{ при } a_1(t)a_2(t) = 10 \\ (b_1(t), b_2(t)) = (q_1(t), q_2(t)), \end{array} \right.$$

назовём автоматной функцией «триггер».

Константной автоматной функцией назовем автоматную функцию, выдающую одно и тоже периодическое выходное сверхслово на всех входных сверхсловах. Класс константных автоматных функций обозначим через \mathbf{K} . Обозначим множество добавочных автоматов через

$$D_1 = \mathbf{K} \cup \mathbf{P}_2 \cup \{G_0, T_0\}.$$

Автомат называется *автоматом Медведева*, если

$$B = Q, \psi(q, a) = q, q \in Q, a \in A.$$

Функция переходов $\varphi : Q \times A \rightarrow Q$ естественным образом обобщается на слова входного алфавита $\varphi : Q \times A^* \rightarrow Q$ по формуле

$$\varphi(q, \alpha a) = \varphi(\varphi(q, \alpha), a).$$

Аналогично обобщается выходная функция $\psi : Q \times A \rightarrow B$ на слова входного алфавита $\psi : Q \times A^* \rightarrow B$ по формуле

$$\psi(q, \alpha a) = \psi(\varphi(q, \alpha), a).$$

Через $\bar{\psi} : Q \times A^* \rightarrow B^*$ обозначается выходная функция на словах, рекуррентно вычисляемая по формуле

$$\bar{\psi}(q, \alpha a) = \bar{\psi}(q, \alpha)\psi(q, \alpha a).$$

Пусть $\varphi_a(q) = \varphi(q, a)$, $a \in A$, множество подстановок вида $\{\varphi_a, a \in A\}$ порождает полугруппу подстановок $S_A = \{\varphi_\alpha, \alpha \in A^*\}$, называемую полугруппой автомата A . Для множества автоматов M , обозначим через $S_M = \{S_A | A \in M\}$ множество полугрупп автоматов из M .

Автомат называется групповым, если все φ_a (а следовательно и все φ_α , $\alpha \in A^*$) являются биекциями на Q . В этом случае полугруппа автомата является группой. Имеет место

Теорема 1. *Не существует предположенного класса автоматных функций содержащего замкнутый класс $[\mathbf{K} \cup \mathbf{P}_2 \cup \{G_0, T_0\}]$.*

Основная лемма и доказательство теоремы

Существует другой подход к функциональной системе автоматов с операцией суперпозиции. Этот подход отслеживает зависимость полугруппы автомата результата от полугрупп автоматов участников суперпозиции [6].

Пусть S конечная полугруппа, с нею ассоциируется *стандартный автомат полугруппы S*

$$A_S = (S, S^1, S, \circ, \psi_0, 1),$$

где S^1 — это полугруппа S (с добавленной единицей, если единицы нет), \circ операция умножения в полугруппе S , $\psi_0(q, a) = q$, $q \in S^1$. Заметим, что полугруппа стандартного автомата полугруппы S есть S .

$$S_{A_S} = S.$$

Множество всех стандартных автоматов полугрупп обозначим через

$$M_0 = \{A_S | S \in \mathbf{S}\}.$$

Если полугруппа S транзитивно действует на множестве Q , то автомат

$$A = (S, Q, Q, \varphi, \psi_0, q_0),$$

где $\varphi(q, s) = s(q)$, $q \in Q$, $s \in S$, назовём *стандартным автоматом с полугруппой S* .

Обозначим через \mathbf{S} функциональную систему конечных полугрупп с операциями взятия подполугрупп и гомоморфных образов, а через $\langle \mathbf{S}_0 \rangle$ замыкание множества полугрупп $\mathbf{S}_0 \subseteq \mathbf{S}$ относительно указанных операций. Пусть

$$D_0 = \{\mathbf{P}_2 \cup \{G_0, T_0\}\}.$$

Через $\mathbf{PRIME} \subseteq \mathbf{S}$ обозначим множество простых конечных групп. Известная теорема Крона-Роудза [6], в определённых выше автоматных терминах имеет вид

Теорема 2 ([6]). 1) Пусть $M \subseteq M_0$ система стандартных автоматов полугрупп, тогда $M \cup D_0$ полна точно тогда, когда $\langle S_M \rangle \supseteq \mathbf{PRIME}$.

2) Пусть $C \in \mathbf{PRIME}$ тогда $A_C \in [M \cup D_0]$ точно тогда когда найдётся $F \in M$, $A_C \in [F \cup D_0]$.

Пусть $A' \subseteq A^*$ некоторое конечное подмножество входных слов, автомат

$$A' = (A', Q, B', \bar{\varphi}, \bar{\psi}, q_0),$$

где $B' = \bar{\psi}(Q, A')$, называется *подавтоматом* автомата A . Если же $A' \subseteq A^t$ является подмножеством слов одной и той же длины t , то указанный подавтомат назовём *t-подавтоматом* автомата A . *t-подавтоматы* являются частным случаем вербальных подавтоматов, изученным автором в работе [8]. Там автор показал, что операция взятия вербального подавтомата перестановочна с операцией суперпозиции.

Пусть C *простая некоммутативная группа*, а \tilde{C} ей изоморфная транзитивная группа перестановок на множестве Q , автомат Медведева

$$Pr(C) = (\tilde{C}, Q, \tilde{C}, \tilde{\varphi}, \psi_0, q_0)$$

назовём *простым* автоматом, здесь $\tilde{\varphi}(q, \tilde{c}) = \tilde{c}(q)$. То есть, простой автомат — это стандартный автомат с простой группой.

Скажем, что а.-функция V выразима *параллельной суперпозицией* через а.-функции из M , если она выразима схемой из автоматов $M \cup D_1$, в которой никакой путь ведущий от выхода одного автомата из M не попадает на вход другого автомата из M .

Множество простых автоматов для всех некоммутативных простых групп обозначим через **Prime**. Для одной простой группы C возможно существование нескольких неизоморфных простых автоматов, но все они выразимы друг через друга параллельными суперпозициями с использованием булевых функций [9]. Заметим что, если $C_1 \subseteq C$ простая подгруппа группы C , то простой автомат с группой C_1 выразим суперпозициями с использованием булевых функций через простой автомат с группой C [7].

Основная лемма. Пусть $Pr(C) \in [M \cup D_1]$, тогда найдётся один автомат $A \in M$ такой что $Pr(C) \in [A \cup D_1]$.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим систему автоматов $\mathbf{Prime} \cup D_1$. По теореме 2 это полная система, она содержит систему из стандартных автоматов с простыми группами, простые коммутативные группы являются подгруппами подходящих простых некоммутативных групп, а $D_1 \supseteq D_0$. Система **Prime** останется полной, если в ней оставить только знакопеременные простые группы. В самом деле: всякая группа является подгруппой подходящей знакопеременной, в том числе и знакопеременная меньшего порядка. Без ограничения общности будем

считать, что **Prime** состоит только из автоматов со знакопеременными группами.

Если существует предполный класс

$$\mathbf{M} \supseteq \mathbf{D}_1 = [\mathbf{K} \cup \mathbf{P}_2 \cup \{G_0, T_0\}],$$

то для $\mathbf{Prime} \cap \mathbf{M}$ имеется две возможности:

1) выполнено $\mathbf{Prime} \subset \mathbf{M}$;

2) число простых групп для автоматов из $\mathbf{Prime} \cap \mathbf{M}$ конечно. В самом деле: если $\mathbf{PRIME} \cap \mathbf{M}$ бесконечно, то для всякого автомата с простой группой C в этом множестве найдётся автомат со знакопеременной группой, содержащей C в качестве подгруппы.

В первом случае \mathbf{M} полная система, и не является предполным классом. Во втором случае по основной лемме и теореме 2 полугруппа добавляемого автомата должна иметь бесконечно много простых групп-делителей, что противоречиво. Поэтому $[\mathbf{M} \cup \{f\}] \neq \mathbf{P}$. Теорема доказана.

Доказательство основной леммы

Напомним, что $D_1 = \mathbf{K} \cup \mathbf{P}_2 \cup \{G_0, T_0\}$ это добавочная система из константных автоматов, булевых функций, «задержки» и «триггера».

Пусть f и g автоматные функции, задаваемые автоматами

$$\mathbf{F} = (A, Q, V, \varphi, \psi, q_0), \quad \mathbf{G} = (B, P, V, \bar{\varphi}, \bar{\psi}, q_0),$$

$B \subseteq A^t$, $i \geq j, k, t$ натуральные числа. Скажем, что f копирует g , если для любого натурального s и для любого входного сверхслова $\beta \in B^\infty$ выполнено

$$f(i + ks) = g(j + ks),$$

где $f(i + st)$ и $g(j + st)$ выходная буква функций f и g после подачи сверхслова $\beta \in B^\infty$ в моменты $i + kt$ и $j + kt$, соответственно. Имеют место

Лемма о копировании [4]. Если автоматная функция f копирует автоматную функцию g , порождённую автоматом Медведева, то g выражима через f параллельной суперпозицией.

Лемма 1. Если автомат A эквивалентен простому автомату $Pr(C)$, то найдётся его групповой t -подавтомат эквивалентный простому автомату с той же группой C .

Доказательство леммы 1. Пусть $Pr(C) = (\tilde{C}, R, \tilde{C}, \tilde{\varphi}, \psi, e)$, $A = (\tilde{C}, Q, \tilde{C}, \varphi, \psi, q_0)$,

Пусть $c_0 \in \tilde{C}$ входная буква, рассмотрим подавтоматы

$$Pr(C)', A',$$

порождённые множеством двухбуквенных слов

$$\{cc_0 | c \in \tilde{C}\}.$$

Это эквивалентные автоматы, так как их автоматные функции являются сужением эквивалентных автоматных функций на множество $(\tilde{C}c)^*$. При этом автомат $Pr(C)'$ это простой автомат с группой C .

Если $\varphi_{c_0} : Q \rightarrow Q$, не биекция, то $Q' = \varphi_{c_0}(Q) \subset Q$, а подавтомат A' это автомат $(\tilde{C}c, Q', \tilde{C}c, \varphi, \psi, q_0')$, с меньшим множеством состояний Q' .

Продолжая эту процедуру мы придём к автомату, эквивалентному простому, у которого все $\varphi_c : Q \rightarrow Q$, являются биекциями, (то есть групповому). Лемма доказана.

Утверждение 1. Если в автомате A есть групповой подавтомат эквивалентный простому автомату $Pr(C)$, то найдётся и групповой t -подавтомат эквивалентный простому автомату с той же группой C .

Доказательство утверждения. В самом деле: пусть

$$A = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0), \quad A' \subset A^*, \\ A' = (A', Q, B', \bar{\varphi}, \bar{\psi}, q_0),$$

групповой подавтомат эквивалентный простому автомату $Pr(C)$. Пусть $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$. Среди слов длины $2n$, содержащих ровно две копии каждого элемента $c_i, i = 1, \dots, n$ найдутся такие

$$s_{i,j} = (c_1)(c_1^{-1})(c_2)(c_2^{-1}) \dots ((c_i)(c_j)(c_i^{-1})(c_j^{-1})) \dots (c_n)(c_n^{-1}),$$

которые, как элементы группы C — суть коммутаторы $c_i c_j c_i^{-1} c_j^{-1}$.

Пусть C_1 — это множество коммутаторов группы C . Среди слов длины $4n$ в алфвите C содержащих ровно четыре копии каждого элемента найдутся такие что, как элементы группы C — это попарные произведения коммутаторов $c_i c_j c_i^{-1} c_j^{-1} c_k c_l c_k^{-1} c_l^{-1}$ и сами коммутаторы. Обозначим множество элементов группы C представимых такими словами через C_2 ,

и т. д. для длины $2kn$ — через C_k . Словами из C_k представимы произведения не более k штук коммутаторов. Выполнено соотношение

$$C_1 \subseteq C_2 \subseteq \dots C_k.$$

Поскольку простая группа порождается своими коммутаторами, найдётся такое k , что $C_k = C$.

Пусть $\Theta : C \rightarrow A'$, биекция входных алфавитов автоматов A и $Pr(C)$. Слова из $\Theta(C^{kn})$ имеют одинаковую длину, поскольку в них входит каждое слово из A' по $2k$ раз. Выбрав из них разных представителей для каждого элемента группы C получим t -подавтомат автомата A , эквивалентный $Pr(C)$. Утверждение доказано.

Лемма 2. Пусть групповой автомат F , эквивалентный простому автомату, получился операцией подстановки автомата A на автомат B , тогда простой автомат с той же группой выразим параллельной суперпозицией либо через автомат A , либо через автомат B .

Доказательство. По лемме 1 можно считать, что автомат F групповой, а автоматы A и B приведенные. Заметим, что простой автомат $Pr_1(C)$ получается из автомата F «склеивкой» эквивалентных состояний, поэтому существует гомоморфизм групп

$$f : G_F \rightarrow C.$$

Очевидно, что автомат A — тоже групповой, и существует гомоморфизм группы автомата F на группу верхнего автомата A

$$g : G_F \rightarrow G_A.$$

В групповом приведенном автомате A существует входное слово α_0 попарно отличающее все состояния и задающее тождественную подстановку состояний [7].

Ядро $Ker(g)$ гомоморфизма g это множество перестановок, тождественно действующих в верхнем автомате A . По теореме о гомоморфизмах $f(Ker(g))$ — нормальный делитель в простой группе C . Возможны варианты 1,2.

1. В случае, если $f(Ker(g)) = E$, по теореме о гомоморфизмах получаем

$$\begin{array}{ccc} f : G_F & \longrightarrow & C \\ & g \searrow \nearrow h & \\ & G_A & \end{array}$$

существование гомоморфизма $h : G_A \rightarrow C$. Рассмотрим t -подавтомат A' верхнего автомата $A = (A, Q, Y, \varphi, \psi, q_0)$, порождённый множеством входных слов $A' = \{a\alpha_0 | a \in A\}$.

$$A' = (A', Q, Y', \bar{\varphi}, \bar{\psi}, q_0),$$

Множество этих слов в автомате $Pr_1(C)$ задаёт подстановки составляющие всю группу C , при этом автомат A' эквивалентен приходящем t стандартному автомату Медведева, с группой G , поскольку $\bar{\psi}(q_1, a\alpha_0) \neq \bar{\psi}(q_2, a\alpha_0)$ при всех $q_1, q_2 \in Q$ и при всех $a \in A$.

Как следует из [9], из стандартного автомата с группой G можно параллельной суперпозицией получить автомат A_G , а из него (группа C является гомоморфным образом G) можно получить параллельной суперпозицией простой автомат с группой C .

2. В случае, если $f(Ker(g)) = C$ — это вся группа C , по лемме 1 и утверждению в алфавите A можно выбрать конечное подмножество слов X одинаковой длины, таких что их подстановки в автомате F лежат в ядре $Ker(g)$ и эти же слова порождают все элементы группы C в автомате $Pr_1(C)$. Тогда подавтомат

$$A'' = (X, Q, Y', \bar{\varphi}, \bar{\psi}, q_0),$$

является t -подавтоматом нижнего автомата B и эквивалентен $Pr_1(C)$. Применяя утверждение и лемму о копировании получаем, что простой автомат с группой C выразим параллельной суперпозицией через автомат B . Лемма доказана.

Доказательство основной леммы. Пусть автомат $F \in [M \cup D_1]$ эквивалентен простому автомату с группой C . Зафиксируем схему, реализующую автомат F как результат подстановки автомата A на автомат B , так чтобы в части схемы равной A , как и в части схемы равной B , присутствовали автоматы из множества M .

По лемме 1 и утверждению можно считать автомат F групповым, по лемме 2 простой автомат с группой C выразим либо через верхний автомат A либо через нижний автомат B , при этом глубина суперпозиции, выражающей каждый из автоматов A и B (считая глубину лишь по автоматам из M) меньше по сравнению с глубиной суперпозиции, выражающей исходный автомат F .

Продолжим декомпозицию до тех пор пока схема не станет глубины 1 (считая глубину лишь по автоматам из M).

Далее, в параллельной суперпозиции соберём в блоки все автоматы одного типа $A_i \in M_1$, где M_1 конечное множество автоматов из M в первоначальной схеме. Последовательно применяя лемму 2, так чтобы разделять параллельные блоки между компонентами суперпозиции, будем каждый раз получать выразимость простого автомата параллельной суперпозицией всё более меньшего числа автоматов из M_1 , пока не получим выразимость искомого автомата параллельной суперпозицией всего одного из них. Основная лемма доказана.

Список литературы

- [1] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. — М.: Наука, 1985.
- [2] Кудрявцев В. Б. О мощностях множеств предполных классов некоторых функциональных систем, связанных с автоматами // ДАН СССР. — 1963. — Т. 151, № 3. — С. 493–496.
- [3] Кратко М. И. Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов // ДАН СССР. — 1964. — Т. 155, № 1. — С. 35–37.
- [4] Бабин Д. Н. О полноте двухместных автоматных функций относительно суперпозиции // Дискретная математика. — 1989. — Т. 1, вып. 4. — С. 423–431.
- [5] Мальцев А. И. Итеративные алгебры и многообразие Поста // Алгебра и логика. — 1966. — Т. 5, № 2. — С. 5–24.
- [6] Арбиб М. Алгебраическая теория автоматов языков и полугрупп. — М.: Статистика, 1975.
- [7] Алешин С. В. Об одном следствии теоремы Крона-Роудза // Дискретная математика. — 1999. — Т. 11, вып. 4. — С. 101–109.
- [8] Бабин Д. Н. Вербальные подавтоматы и задача полноты // Вестник Московского университета. — 1985. — № 3. — С. 54–56.
- [9] Алешин С. В. Алгебраические системы автоматов. — М.: Maks Press, 2016.
- [10] Летуновский А. А. Выразимость линейных автоматов относительно расширенной суперпозиции // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2015. — Т. 19, вып. 1. — С. 161–170.

- [11] Бабин Д. Н., Летуновский А. А. О возможностях суперпозиции, при наличии в базисе автоматов фиксированной добавки из булевых функций и задержки // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2015. — Т. 19, вып. 3. — С. 71–77.
- [12] Кудрявцев В. Б. Кафедра математической теории интеллектуальных систем (MaTIC) // Интеллектуальные системы. — 2014. — Т. 18, вып. 2. — С. 5–30.