О сложностной функции времени самоочищения лёгких при некоторых патологиях

Ю. Г. Чернова (МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва)

В работе представлена математическая дискретная модель процесса самоочищения лёгких от различных веществ, как превнесённых туда извне, так и получающихся за счёт жизни и деятельности организма. Представлены функции Шеннона времени самоочищения лёгких как в здоровом случае, так и случае патологий двух типов.

Ключевые слова: лёгкие, процесс самоочищения, автоматы, функция Шеннона.

Процесс транспортировки вещества по легким осуществляется за счет ресничкового механизма. Его образует поле ресничек, покрывающих внутреннюю часть бронхов легких, которое способно загружаться веществом, поступающим из вне, и перемещать его, а также вещество, образовавшееся за счет жизнидеятельности организма, из нижних слоев в верхние, и в итоге удалять его во вне с потоком выдыхаемого воздуха. Этот механизм, который осуществляет транспортировку вещества снизу вверх, и является предметом нашего изучения.

В [1] построена автоматная модель процесса самоочищения лёгких, которые представлятся в виде дихотомического дерева, каждое рёбра которого имеет определённое количество ресничек и ему приписаны параметры, такие как мера переброса ресничек (максимальное количество вещества, передаваемое по ребру на соседнее сверху), ёмкость ресничек (максимальное количество вещества, которое ресничка способно удержать), глубина дерева лёгких и т. п.

В работе представлен сравнительный анализ функций Шеннона времени самоочищения в случае здоровых лёгких [4] (случай здоровых лёгких), в случае очагового поражения пропускной способности и (или) эффективности ресничкового механизма [3] (случай с патологией лёгких

I типа) и в случае патологии ресничкового механизма, выражающейся в равномерном угнетении его транспортной функции с течением времени в связи с наличием постоянной нагрузки на реснички [2] (случай с патологией лёгких II типа). Последняя модель позволяет упрощенно описывать процесс транспортировки никотина в лёгких курящего человека. Также были проведены численные эксперименты и для каждого из указанных случаев представлены графики зависимостей времени самоочищения лёгких от таких параметров как их глубина, число ресничек на ребре и мера переброса.

Введём необходимые обозначения для описания результатов.

Лёгкие представляются полным дихотомическим ориентированным к корню деревом, которое называется *I-деревом* и обозначается D^{-1}, со следующими параметрами.

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\mathbb{N}_k = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ и l, $l \in \mathbb{N}$, считается глубиной этого I-дерева. Считается, что ребро I-дерева D^{-1}, инцидентное корню, имеет глубину 1.

Каждое ребро из D^{-1} разделено на n, $n \in \mathbb{N}$, равных частей, называемых *ресничками*, и занумерованных числами i, $i \in \mathbb{N}_n$, возрастающими в направлении, обратном ориентации ребра.

Каждому ребру глубины j, $j \in \mathbb{N}_l$, приписывается два числа $2^{l-j}b$ и $2^{l-j}r$, где $b, r \in \mathbb{N}$ и $r \leqslant b$, называемых *емкостью* и *мерой переброса* ресничек ребер глубины j, соответственно.

Такое I-дерево D^{-1} с описанными выше параметрами b, r, n и l обозначается $D^{-1}(b, r, n, l)$.

С этим I-деревом связывается некоторый процесс, который называется *процессом транспортировки* вещества по I-дереву $D^{-1}(b, r, n, l)$. Он обусловлен рядом допущений.

Считается, что в $D^{-1}(b, r, n, l)$ заданы распределения нагрузок по всем ресничкам, учитывая, что нагрузка может быть нулевой. Пусть V' — суммарная нагрузка по всем ресничкам, а V — максимально возможная суммарная нагрузка по всем ресничкам. V назовем *объемом I-дерева (легких)*, а V' — *исходным объемом загруженности I-дерева*.

I-дерево $D^{-1}(b, r, n, l)$ с исходным объемом загруженности V' обозначается $D^{-1}(b, r, n, l; V')$.

Каждая ресничка осуществляет прием вещества извне и переброс своей нагрузки на следующую ресничку с меньшим номером внутри ребра.

Прием ресничкой вещества, имеющего массу d, $d \in \mathbb{N}_0$ и $d \leqslant V - V'$, из внешней среды внутри ребра уровня j, $j \in \mathbb{N}_l$, осуществляется по следующему правилу (для этого правила ориентация считается обратной к заданной).

A_1) Если нагрузка реснички равна ее емкости, то прием вещества не осуществляется.

$Б_1$) При нагрузке d_1, меньшей емкости первой с такой назрузкой реснички, она осуществляет прием вещества максимально возможной массы d_2, такой что $d_2 \leqslant \min(2^{l-j}b - d_1, d)$, где $2^{l-j}b$ — емкость этой реснички.

$В_1$) Следующая за ресничкой из $Б_1$) принимает массу d_3, как и в $Б_1$), с заменой там d на $d - d_2$.

$Г_1$) Оставшаяся масса вещества опускается до следующей реснички с большим номером в ребре, для которой не выполняется условие A_1). Она осуществляет прием вещества по правилу $В_1$) или $Б_1$).

$Д_1$) Если ресничка в рассматриваемом ребре является последней, не удовлетворяющей условию A_1), то оставшаяся масса вещества делится пополам (если число нечетное, то та из частей, которая на единицу больше другой, опускается на левое ребро, при условии, что реснички поддерева, инцидентного этому ребру, могут принять это вещество, в противном случае оставшееся вещество передается правому ребру); и каждая из частей вещества воспринимается соответствующими ребрами, как описано выше.

E_1) Процесс, описываемый позициями A_1)–$Д_1$), начинается с ребра, которое инцидентно корню.

Переброс ресничкой вещества осуществляется на соседнюю ресничку с меньшим номером внутри ребра уровня j, $j \in \mathbb{N}_l$, по такому правилу.

A_2) Если следующая ресничка имеет не нулевую нагрузку, то переброс с реснички не осуществляется.

$Б_2$) Если нагрузка реснички не превосходит ее меры переброса $2^{l-j}r$ и не выполнено условие A_2), то перебрасывается на следующую вся нагрузка реснички и считается, что ее нагрузка становится равной нулю.

$В_2$) Если на ресничке нагрузка m и $m > 2^{l-j}r$, то она перебрасывает на следующую ресничку нагрузку $2^{l-j}r$ и оставляет у себя нагрузку $m - 2^{l-j}r$.

Если ресничка в ребре последняя, то переброс нагрузки осуществляется по правилам A_2), $Б_2$), $В_2$).

$Г_2$) Если ребро инцидентно корню, то переброс с наименьшей по номеру реснички осуществляется в среду по правилам $Б_2$) и $В_2$) в предположении, что среда играет роль реснички с нулевой нагрузкой.

$Д_2$) Если ребро не инцидентно корню, то есть его вершина инцидентна следующему ребру, то нагрузка с наименьшей по номеру реснички этого ребра передается наибольшей по номеру ресничке другого ребра по правилам А$_2$), Б$_2$), В$_2$).

Считается, что процесс транспортировки вещества по I-дереву $D^{-1}(b,r,n,l;V')$ осуществляется в дискретные моменты времени $t = 1,2,3,\ldots$

В первый момент I-дерево $D^{-1}(b,r,n,l;V')$ имеет заданное распределение нагрузок по его ресничкам.

Ко второму моменту осуществляется прием вещества массой $d(1)$ по правилам А$_1$)–Е$_1$), и затем осуществляется переброс нагрузок с реснички на ресничку во всем I-дереве или выброс в среду в соответствии с правилами А$_2$), Б$_2$), В$_2$), Г$_2$), Д$_2$). А если подается масса d, не превосходящая объема I-дерева, то та ее часть, которая не осела на ресничках, выбрасывается в среду.

Если в каждый момент $t = 1,2,3,\ldots$ все реснички I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l;V')$ осуществляют прием вещества нулевой массы, то такой процесс называется *процессом транспортировки* вещества по этому I-дереву *в чистой среде*. При наступлении момента t, в который все реснички I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l;V')$ впервые стали равными нулю, считается, что произошло *полное самоочищение* этого I-дерева.

Под распределением нагрузки V' I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l;V')$ понимается любое из возможных распределений нагрузок всех его ресничек таких, что суммарный объем их нагрузок равен V'. Ясно, что $V' \leqslant V$, где V — объем I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l)$ и $V = 2^{l-1}bnl$.

Введем функцию $L(b,r,n,l,V')$ для I-дерева $D^{-1}(b,r,n,l;V')$, которая равна наибольшему из времен, за которое происходит полное самоочищение $D^{-1}(b,r,n,l;V')$ при произвольном начальном распределении загрузки V' этого I-дерева. Эту функцию обычно называют сложностной функцией Шеннона.

Теорема 1. *Функция $L(b,r,n,l,V')$ в зависимости от соотношений параметров b,r,n,l и V' принимает следующие значения:*

1) если $(2^l-1)bn \leqslant V' \leqslant V$, то $L(b,r,n,l,V') =]\frac{b}{r}[(2nl-1)$;

2) если $0 < V' < (2^l-1)bn$, то

i) при $r=1$ имеем:

a) если $V' \leqslant bn$, то

$$L(b,1,n,l,V') = \begin{cases} V' + b(n-1), & \text{если } l=1 \text{ и } n =]\frac{V'}{b}[, \\ 2V' -]\frac{V'}{b}[+ nl - 1, & \text{иначе;} \end{cases}$$

б) если $bn < V' \leqslant bn + (l-1)n$, *то*
$$L(b,1,n,l,V') = V' + n(l+b-1) - 1;$$
в) если $V' > bn + (l-1)n$, *то*

$$L(b,r,n,l,V') = \begin{cases}]\frac{b_{h_3}}{2^{l-1}}[+2b(nl-1), & \text{если } k_3 = 1 \text{ и } h_3 = 1, \\ 2\left(]\frac{b_{h_3}}{2^{l-k_3}}[+(b-1)(n(l-k_3+1)-h_3)+nl-\frac{3}{2}\right), & \text{иначе}; \end{cases}$$

ii) при $r > 1$ *имеем:*

а) если $V' \leqslant nl$, *то* $L(b,r,n,l,V') = V' + nl - 1$;

б) если $V' > nl$, *то*

$$L(b,r,n,l,V') = \begin{cases}]\frac{b_{h_3}}{2^{l-1}r}[+2]\frac{b}{r}[(nl-1), & \text{если } k_3 = 1 \text{ и } h_3 = 1, \\ 2\left(]\frac{b_{h_3}}{2^{l-k_3}r}[+(]\frac{b}{r}[-1)(n(l-k_3+1)-h_3)+nl-\frac{3}{2}\right), & \text{иначе}; \end{cases}$$

где

$$k_3 = 1 + [l - \log_2(\tfrac{V'-nl}{(b-1)n} + 1)], h_3 = n -]\frac{V'-nl-(2^{l-k_3}-1)(b-1)n}{2^{l-k_3}(b-1)}[+1,$$
$$b_{h_3} = V' - nl - (2^{l-k_3}-1)(b-1)n - 2^{l-k_3}(b-1)(n-h_3) + 1.$$

Теперь перейдём к рассмотрению лёгких с патологиями I типа.

Дерево с очаговым поражением будем обозначать *I′-деревом* D^{-1}. Опишем основные параметры для I′-дерева.

Очагом назовем поддерево I′-дерева, начинающееся с ребра уровня l', где $1 \leqslant l' \leqslant l$, и заканчивающееся на уровне $l'+d-1$, где $1 \leqslant d \leqslant l-l'+1$. Под *диаметром* очага понимается пораженная часть цепи в нем.

Как и ранее, каждому ребру приписаны два параметра: нагрузка ресничек и их мера переброса. Под *нагрузкой (эффективностью)* реснички понимается максимальное количество вещества, которое может находится на ней. Нагрузка зависит от параметра $b, b \in \mathbb{N}$. Под *мерой переброса* понимается максимальное количество вещества, которое может перебросить эта ресничка соседней сверху. Мера переброса зависит от параметра r, $r \in \mathbb{N}$, $r \leqslant b$.

Параметры нагрузки и меры переброса увеличиваются в 2 раза по сравнению с предыдущим уровнем, поэтому на ребре глубины j, $j \in \mathbb{N}_l$, максимальная нагрузка будет равна $2^{l-j}\tilde{b}$, мера переброса — $2^{l-j}\tilde{r}$, где за $\tilde{b}$ и $\tilde{r}$ обозначены параметры b или b' и r или r' в случаях здорового ребра или ребра с патологией соответственно, где $b, b', r, r' \in \mathbb{N}$, $r' \leqslant r$, $b' \leqslant b$,

$r \leqslant b$. Другими словами, на ребре глубины j максимальная нагрузка будет равна $2^{l-j}b$, максимальная мера переброса — $2^{l-j}r$ в случаях $j = 1, 2, \ldots, l'-1$ и $j = l'+d, l'+d+1, \ldots, l$ (ребро здоровое) или $2^{l-j}b'$ и $2^{l-j}r'$ в случае $j = l', l'+1, \ldots, l'+d-1$ (ребро проходит через очаг поражения).

Такое I$'$-дерево D^{-1} с описанными выше параметрами b, r, n, l, l', d, b' и r' обозначается $D^{-1}(b, r, n, l, l', d, b', r')$.

Процесс транпортировки вещества в данном случае происходит по вышеописанным правилам А$_1$)–Е$_1$) и А$_2$)–Д$_2$), но с тем уточнением, что при перебросе вещества с реснички здорового ребра (с параметрами b и r) на ресничку пораженного (с параметрами b' и r') мерой переброса r будет величина $r = \min(r, \frac{b'}{2})$.

Пусть $L'(b, n, r, l, l', d, b, r')$ — время самоочищения лёгких с очагом поражения диаметра d, начинающегося с уровня l'.

Теорема 2. (ухудшение пропускной способности ресничек) *Пусть* $b, r, r', k \in \mathbb{N}$*, такие что* $b = kr$, $r' \leqslant r$. *Тогда*

$$L'(b, n, r, l, l', d, b, r') = \begin{cases} k(2nl' - 2n - 1) + \\ \;+ 2nd]\frac{b}{r'}[+ 2nk]\frac{r}{r'}[(l-l'-d+1), \; l' \neq 1; \\ ]\frac{b}{r'}[(2nd - 1) + 2kn]\frac{r}{r'}[(l - d), \; l' = 1. \end{cases}$$

Теорема 3. (ухудшение эффективности ресничек) *Пусть* $b, b', r, k \in \mathbb{N}$*, такие что* $b = kr$, $b' \leqslant b$. *Тогда*

$$L'(b, n, r, l, l', d, b', r) = \begin{cases} k + 2k(n(l' - 1) - 1) + 2nd + 2]\frac{b}{b'}[+ \\ \;+ 2k]\frac{r}{b'}[(n(l-l'-d+1)-1), \; l' \neq 1, r > b'; \\ k + 2k(n(l' - 1) - 1) + 2nd]\frac{b'}{r}[+ \\ \;+ 2nk(l - l' - d + 1), \; l' \neq 1, r \leqslant b'; \\ 2k]\frac{r}{b'}[(n(l - d) - 1) + 2nd + \\ \;+ 2]\frac{b}{b'}[-1, \; l' = 1, r > b'; \\ ]\frac{b'}{r}[+(nd - 1)(2]\frac{b'}{r}[-1) + \\ \;+ n(l-d)(2k-1)+nl-1, \; l' = 1, r \leqslant b'. \end{cases}$$

Теорема 4. (одновременное ухудшение пропускной способности и эффективности ресничек) *Пусть* $b, b', r, r', k \in \mathbb{N}$*, такие что* $b = kr$, $b' \leqslant b$, $r' \leqslant r$, d *— диаметр очага поражения пропускной способности ресничек и их эффективности, начиная с уровня* l'. *Тогда*

$$L'(b,n,r,l,l',d,b',r') = \begin{cases} 2nk]\frac{r}{r'}[(l-l'-d+1)+2nk(l'-1)-k+ \\ \quad +2nd]\frac{b'}{r'}[+2]\frac{r}{r'}[-1-2n, l'\neq 1, r\leqslant b'; \\ 2nl]\frac{r}{r'}[(k+1)+]\frac{b'}{r'}[(2nd-1)-2nl- \\ \quad -2]\frac{r}{r'}[(ndk-1)-1, l'=1, r\leqslant b'; \\ k(2nl'-2n-1)+2nd]\frac{b'}{r'}[+1+2n]\frac{b'}{r'}[(l-l'-d+1)\cdot \\ \quad \cdot(]\frac{b}{b'}[+]\frac{r}{r'}[)-2n(l-l'-d+1)(]\frac{b'}{r'}[-1), \\ \quad l'\neq 1, r>b'>r'; \\ 2nk(l'-1)-k+2n(2d-1)-3n(l-l')+2n\cdot \\ \cdot(l-l'-d+1)(]\frac{r}{b'}[+1)+1, l'\neq 1, r>b', b'\leqslant r'; \\ ]\frac{b'}{r'}[(2nd-1)+2n]\frac{b'}{r'}[(l-d)(]\frac{b}{b'}[+]\frac{r}{r'}[)- \\ \quad -2n(l-d)(2]\frac{b'}{r'}[+1)+1, l'=1, r>b'>r'; \\ 2nd+2n(l-d)(]\frac{b}{b'}[+]\frac{r}{b'}[-1), \\ \quad l'=1, r>b', b'\leqslant r'. \end{cases}$$

При патологии II типа предполагается, что мера переброса ресничек принадлежит множеству рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и каждые $T\in\mathbb{N}$ тактов уменьшается в $k\in\mathbb{Q}$ раз по следующему закону

$$r(1)=2^{l-i}r,\quad r(t+1)=2^{l-i}r/k^{[t/T]},\qquad k\in(1;2],\quad T\in\mathbb{N}.$$

Все остальные правила переходов соответствуют тем, что были определены ранее.

Пусть $k=(1-d)^{-1},\quad d\in\left(0;\frac{1}{2}\right]$. Тогда закон изменения меры переброса будет иметь вид

$$r(1)=2^{l-i}r,\quad r(t+1)=2^{l-i}r(1-d)^{[t/T]}.$$

Теорема 5. *Если* $T>\frac{bd}{r}$, *то*

$$L(b,r,n,l,T,k)=\sum_{J=1}^{ln}\tau_J+\omega,$$

где $\omega\in\{ln-1,\ 2ln-2-T+q_n\}$, *а* τ_J, q_n *определяются из следующих условий:*
если $J=1$, *то*

$$\tau_1=Tn_1+q_1,\quad n_1=\left[\log_{(1-d)}\left(1-\frac{bd}{Tr}\right)\right],\quad q_1=\left]\frac{bd-Tr}{rd(1-d)^{n_1}}+\frac{T}{d}\right[,$$

если $J > 1$, *то*

$$\tau_J = T - q_{J-1} + n_J T + q_J,$$

$$n_J = \left[\log_{(1-d)} \left(1 - \frac{d\left(b - \left]\frac{T-q_{J-1}}{2}\right[r\right)}{\left]\frac{T-J}{2}\right[r(1-d)} \right) \right],$$

$$q_J = 2 \left] \frac{b - \left]\frac{T-q_{J-1}}{2}\right[r - \left]\frac{T-J}{2}\right[r(1-d)\frac{1-(1-d)^{n_J+1}}{d}}{r(1-d)^{n_J}} \right[+ J.$$

Был проведен ряд численных экспериментов для сравнения времён самоочищения лёгких в здоровом случае и в случае патологий I и II типов при изменении параметров дерева лёгких, таких как мера переброса ресничек, количество ресничек на ребрах и глубина лёгких. Эксперименты проводились в среде Matlab 2012® (8.0). Полученные результаты представлены в виде следующих графиков (рис. 1–3).

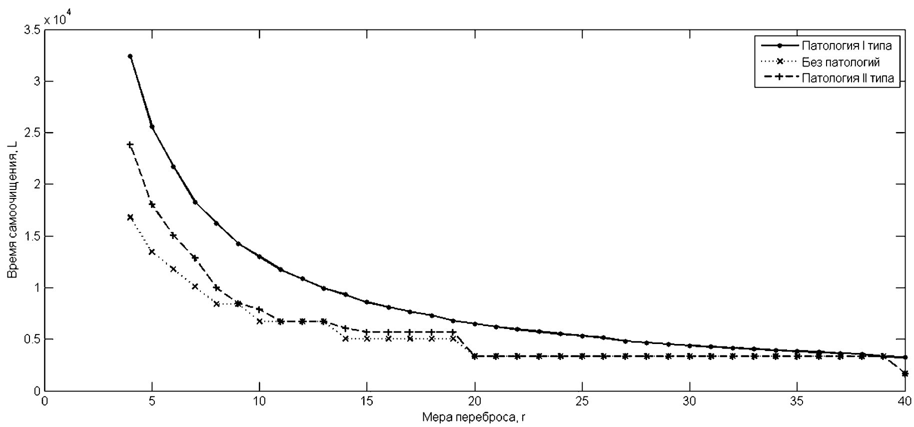

Рис. 1. График зависимости временной фунции Шеннона от меры переброса.

Как видно из графика на рис. 1 при достаточно малой мере переброса лёгким с патологией I типа требуется большее время на самоочищение по сравнению с лёгкими с патологией II типа и тем со здоровыми лёгкими. Но при увеличении меры переброса эффект патологии снижается, то есть время очищения лёгких практически такое же как и в случае здоровых лёгких.

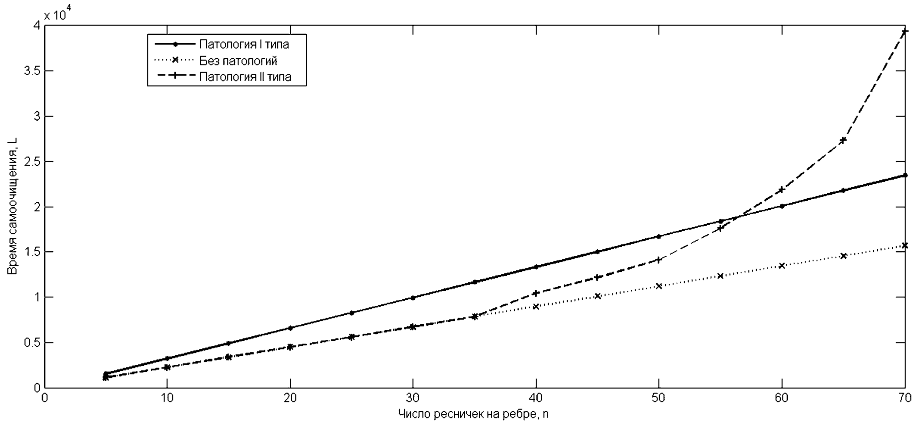

Рис. 2. График зависимости временной фунции Шеннона от числа ресничек на ребре.

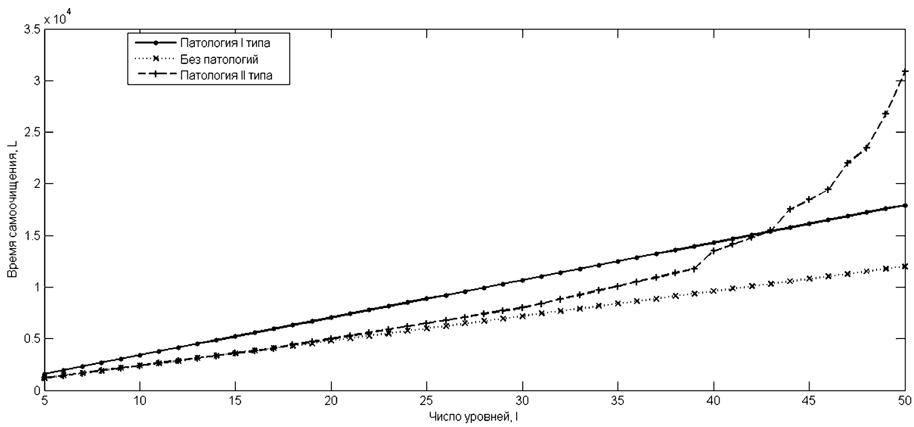

Рис. 3. График зависимости временной фунции Шеннона от глубины дерева лёгких.

По полученным графикам на рис. 2 можно сделать следующие выводы. Функция Шеннона времени самоочищения лёгких в здоровом случае и случае с патологией I типа зависят линейно от количества ресничек на ребре. При этом при малом числе ресничек на ребре лёгкие с патологией II типа имеют практически то же время самоочищения, что и в случае здоровых лёгких, но при увеличении числа ресничек на ребре функция Шеннона для лёгких с патологией II типа резко возрастает.

Аналогичные выводы можно сделать и по рис. 3. Функция Шеннона времени самоочищения лёгких в здоровом случае и случае с патологией I типа зависят линейно от количества уровней в дереве лёгких. При малой глубине лёгкие с патологией II типа имеют практически то же время самоочищения, что и в случае здоровых лёгких, но при увеличении глубины лёгких функция Шеннона для лёгких с патологией II типа резко возрастает.

Список литературы

[1] Чернова Ю. Г. Автоматное моделирование функционирования лёгких. — Ташкент: Полиграфический центр Филиала МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Ташкенте, 2015.

[2] Аскарова А. Ш. Об очищении лёгких от никотина в чистой среде // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2014. — Т. 18, вып. 4. — С. 191–206.

[3] Докучаева Т. В. Процесс самоочищения лёгких с очаговыми паражениями в чистой среде // Интеллектуальные системы. — 2010. — Т. 14, вып. 1–4. — С. 157–182.

[4] Chernova Ju. Shannon's function of the lungs' clearance time // VI International Conference on Optimization Methods and Applications «Optimization and applications» (OPTIMA–2015), Petrovac, Montenegro. — ВЦ РАН Москва, 2015. — С. 46–47.