Максимальные множества булевых функций, реализуемых инициальным булевым автоматом с двумя или тремя константными состояниями

Л. Н. Сысоева (НИУ «Высшая школа экономики», Москва)

Рассматривается задача о реализации булевых функций инициальными булевыми автоматами с константными состояниями и n входами, $n \geqslant 1$. Найдены все множества максимальной мощности, состоящие из булевых функций, которые могут быть реализованы одним автоматом такого типа с двумя или тремя состояниями при условии возможности произвольного порядка подачи наборов значений входных переменных на входы автомата.

Ключевые слова: булева функция, инициальный автомат, реализация булевых функций.

Пусть $P_2(n)$ — множество всех булевых функций, зависящих от фиксированных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $n \geqslant 1$. Под булевым автоматом будем понимать автомат $V = (\{0,1\}, \{0,1\}, Q, F, G)$ с произвольным числом входов, входным алфавитом $\{0,1\}$, выходным алфавитом $\{0,1\}$, алфавитом состояний Q, функцией перехода G и функцией выхода F. Определения автомата и инициального автомата можно найти в [1, 2]. Пусть n — число входов автомата V. Без ограничения общности будем полагать, что входы автомата V занумерованы от 1 до n и на i-й вход автомата V подается значение булевой переменной x_i. Тем самым можно считать, что в каждый момент времени на входы автомата V подается некоторый двоичный набор значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и для любого состояния $q \in Q$ функция выхода $F(q, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является булевой функцией от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Булев автомат V будем называть булевым автоматом с константными состояниями, если для любого $q \in Q$ функция $F(q, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является константной булевой функцией 0 или 1.

Пусть $V_{q_1} = (\{0,1\}, \{0,1\}, Q, F, G, q_1)$ — инициальный булев автомат с начальным состоянием q_1 и n входами. Пусть $C = (\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2, \ldots, \widetilde{\beta}_{2^n})$ — упорядоченная последовательность всех двоичных наборов длины n, $n \geqslant 1$. Будем говорить, что автомат V_{q_1} с последовательностью C реализует булеву функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если при последовательной подаче на входы автомата V_{q_1} наборов из C в каждый момент $t = 1, 2, \ldots, 2^n$ на выходе автомата V_{q_1} выдается значение $f(\widetilde{\beta}_t)$. Будем также говорить, что функция f реализуется автоматом V_{q_1}, если для некоторой последовательности наборов C автомат V_{q_1} с последовательностью C реализует f. Последовательность C будем называть последовательностью подаваемых наборов. Обозначим через $P(V_{q_1})$ множество всех функций из $P_2(n)$, реализуемых автоматом V_{q_1}, а через $\overline{P(V_{q_1})}$ множество всех функций из $P_2(n)$, которые не могут быть реализованы автоматом V_{q_1}.

Под 0-состоянием булевого автомата V будем понимать состояние с функцией выхода $0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а под 1-состоянием — состояние с функцией выхода $1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Без существенного ограничения общности мы будем рассматривать инициальные булевы автоматы, содержащие хотя бы одно 0-состояние и хотя бы одно 1-состояние, при этом начальным состоянием является 0-состояние. Множество всех таких автоматов с двумя или тремя константными состояниями и n фиксированными входами обозначим через $\mathfrak{V}_2(n)$ или $\mathfrak{V}_3(n)$ соответственно. Инициальные булевы автоматы с фиксированным числом константных состояний, реализующие максимальное возможное число булевых функций из $P_2(n)$, называются квазиуниверсальными.

В настоящей работе рассматривается задача описания множеств булевых функций из $P_2(n)$, которые могут быть реализованы одним квазиуниверсальным автоматом с двумя или тремя константыми состояниями. В работах [3, 4] получены точные значения максимального числа булевых функций от n фиксированных переменных, реализуемых автоматами из $\mathfrak{V}_2(n)$ и $\mathfrak{V}_3(n)$ соответственно и описаны все автоматы, на которых эти оценки достигаются, при $n > 1$. Далее эти результаты сформулированы в виде теорем 1, 2, 4, 5. В работах [5, 6] исследовались вопросы реализации булевых функций формулами над автоматными функциями.

Пусть V_{q_1} — инициальный булев автомат из $\mathfrak{V}_2(n)$ и $g : Q \times \{0,1\}^n \to Q$ — функция переходов автомата V_{q_1}. Обозначим через M множество наборов $\widetilde{\alpha}$, таких, что $g(q_1, \widetilde{\alpha}) = q_2$, а через N — множество наборов $\widetilde{\alpha}$, таких, что $g(q_2, \widetilde{\alpha}) = q_1$. Заметим, что автомат V_{q_1} однозначно задается множествами M и N.

Теорема 1. *Для любого $n \geqslant 2$ максимальная мощность множества $P(V_{q_1})$ для автомата V_{q_1} из $\mathfrak{V}_2(n)$ равна $\frac{5}{8} \cdot |P_2(n)|$.*

Теорема 2. *При $n \geqslant 2$ автомат V_{q_1} из множества $\mathfrak{V}_2(n)$ является квазиуниверсальным тогда и только тогда, когда $|M| = 2$, $|N| = 1$ и $M \cap N = \varnothing$.*

Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — булева функция, D — некоторое подмножество множества $\{0,1\}^n$. Обозначим через D_f^0 подмножество множества D, состоящее из всех таких наборов $\widetilde{\alpha}$, для которых выполнено равенство $f(\widetilde{\alpha}) = 0$, а через D_f^1 — подмножество множества D, состоящее из всех таких наборов $\widetilde{\alpha}$, для которых выполнено равенство $f(\widetilde{\alpha}) = 1$.

Опишем множество функций, которые не может реализовать квазиуниверсальный автомат из $\mathfrak{V}_2(n)$. Пусть $n \geqslant 2$ и V_{q_1} — автомат из $\mathfrak{V}_2(n)$, определяемый множествами M и N, такими, что $|M| = 2$, $|N| = 1$ и $M \cap N = \varnothing$. Обозначим через $\mathfrak{A}_1(V_{q_1})$ множество всех функций из $P_2(n)$, принимающих значение 0 на всех трех наборах множества $M \cup N$, через $\mathfrak{A}_2(V_{q_1})$ — множество всех функций из $P_2(n)$, принимающих значение 1 на обоих наборах множества M, а через $\mathfrak{A}(V_{q_1})$ множество $\mathfrak{A}_1(V_{q_1}) \cup \mathfrak{A}_2(V_{q_1})$. Заметим, что $|\mathfrak{A}(V_{q_1})| = \frac{3}{8} \cdot 2^{2^n}$. Верна следующая теорема.

Теорема 3. *Если $n \geqslant 2$ и автомат V_{q_1} из $\mathfrak{V}_2(n)$ является квазиуниверсальным, то $\overline{P(V_{q_1})} = \mathfrak{A}(V_{q_1})$.*

Рассмотрим автоматы из $\mathfrak{V}_3(n)$. Автоматы из $\mathfrak{V}_3(n)$ очевидным образом разбиваются на два подмножества: множество всех инициальных булевых автоматов из $\mathfrak{V}_3(n)$, содержащих ровно одно 1-состояние (будем обозначать это множество через $\mathfrak{V}_3^0(n)$), и множество всех инициальных булевых автоматов из $\mathfrak{V}_3(n)$, содержащих ровно одно 0-состояние, являющееся начальным (будем обозначать это множество через $\mathfrak{V}_3^1(n)$). Автоматы из множеств $\mathfrak{V}_3^0(n)$ и $\mathfrak{V}_3^1(n)$ можно схематично изобразить с помощью диаграмм, представленных на рис. 1 и рис. 2 соответственно, где $A, B, K, M, T, E \subseteq \{0,1\}^n$. В кружочках, обозначающих состояния, написаны символы, соответствующие функции выхода в этом состоянии, а на стрелках — множества всех наборов, при подаче которых на вход автомата последний из состояния, из которого идет стрелка, переходит в состояние, на которое указывает стрелка. Звездочкой помечено начальное состояние автомата.

Теорема 4. *Для любого $n \geqslant 6$ максимальная мощность множества $P(V_{q_1})$ для автомата V_{q_1} из $\mathfrak{V}_3(n)$ равна $2^{2^n} - 2^n$.*

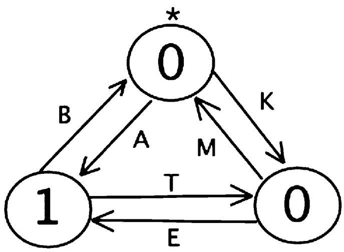

Рис. 1.

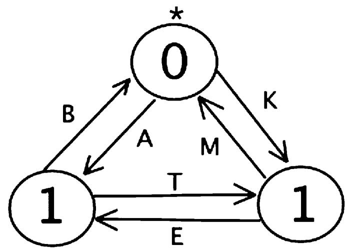

Рис. 2.

Теорема 5. *При $n \geqslant 9$ автомат V_{q_1} из множества $\mathfrak{V}_3(n)$ является квазиуниверсальным тогда и только тогда, когда он принадлежит $\mathfrak{V}_3^0(n)$ и задается одним из следующих наборов условий:*

1) $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\beta}\}$, $M \subseteq \{\widetilde{\mu}, \widetilde{\alpha}\}$;
2) $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}$, $M \subseteq \{\widetilde{\mu}\}$;
3) $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{x}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\beta}, \widetilde{x}\}$, $M \subseteq \{\widetilde{\mu}, \widetilde{\alpha}\}$;
4) $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{x}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{x}\}$, $M \subseteq \{\widetilde{\mu}\}$;
5) $A = \{0,1\}^n \backslash \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\varkappa}\}$, $K = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\varkappa}\}$, $B = \{\widetilde{\beta}\}$, $T = \{\widetilde{\alpha}\}$, $E = \{\widetilde{\beta}, \widetilde{\varkappa}\}$, $M \subseteq \{\widetilde{\mu}, \widetilde{\alpha}\}$,

где $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{x}, \widetilde{\mu}$ — различные наборы из $\{0,1\}^n$.

Из теорем 1, 2, 4, 5 следует, что в отличие от случая инициальных автоматов с двумя состояниями среди инициальных булевых автоматов с тремя константными состояниями существуют автоматы с n входами, такие, что доля реализуемых ими функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, стремится к 1 с ростом n и в отличие от случая инициального булева автомата с двумя константными состояниями, для автомата с тремя состояниями максимальная мощность множества реализуемых автоматом функций не может достигаться для любого n на автомате с фиксированной мощностью множеств A, B, K, M, T, E.

Опишем множество функций, которые не может реализовать квазиуниверсальный автомат из $\mathfrak{V}_3(n)$. Из теоремы 5 следует, что для любого квазиуниверсального автомата V_{q_1} из $\mathfrak{V}_3(n)$ выполнено $|K \cap T| = 1$ и $|(B \cup T) \backslash K| = 1$. Обозначим через $\widetilde{\alpha}(V_{q_1})$ единственный набор множества $K \cap T$, а через $\widetilde{\beta}(V_{q_1})$ единственный набор множества $(B \cup T) \backslash K$. Отметим, что $B \cup T = \{\widetilde{\alpha}(V_{q_1}), \widetilde{\beta}(V_{q_1})\}$. Опишем все функции, которые не может реализовать квазиуниверсальный автомат из $\mathfrak{V}_3(n)$. Обозначим через $\mathfrak{A}^q(V_{q_1})$ множество всех функций из $P_2(n)$, принимающих значение 0 на не более, чем одном наборе, кроме функции, принимающей значение 0 на наборе $\widetilde{\beta}(V_{q_1})$. Заметим, что $|\mathfrak{A}^q(V_{q_1})| = 2^n$. Верна следующая теорема.

Теорема 6. *Если $n \geqslant 6$ и автомат V_{q_1} из $\mathfrak{V}_3(n)$ является квазиуниверсальным, то $\overline{P(V_{q_1})} = \mathfrak{A}^q(V_{q_1})$.*

Автор выражает искреннюю признательность Р. М. Колпакову за постановку задачи и обсуждение результатов работы и О. С. Дудаковой за ценные советы и замечания.

Список литературы

[1] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Высшая школа, 2006.

[2] Конспект лекций О. Б. Лупанова по курсу «Введение в математическую логику» / Отв. ред. А. Б. Угольников. — М.: Изд-во ЦПИ при мех.-мат. ф-те МГУ, 2007.

[3] Сысоева Л. Н. Максимальное число булевых функций, реализуемых инициальным булевым автоматом с двумя константными состояниями // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. — 2016. — № 4. — С. 12–17.

[4] Сысоева Л. Н. Квазиуниверсальные инициальные булевы автоматы с константными состояниями // Материалы XII Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения», имени академика О. Б. Лупанова (Москва, МГУ, 20–25 июня 2016 г.) / Под ред. О. М. Касим-Заде. — М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2016. — С. 229–232.

[5] Сысоева Л. Н. О некоторых свойствах обобщенных α-формул // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. — 2013. — № 4. — С. 51–55.

[6] Сысоева Л. Н. О реализации булевых функций обобщенными α-формулами // Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2014. — **156**, № 3. — С. 116–122.