Обобщенные варианты «r-быстрой» сходимости В. Штрассена

М. У. Гафуров
(Филиал МГУ имени М. В. Ломоносова, Ташкент)

Предложены новые обобщенные варианты «r-быстрой» сходимости В. Штрассена для последовательности случайных величин. Установлены необходимые и достаточные условия «Ф-быстрой» сходимости последовательности сумм случайных величин с отброшенными экстремальными членами.

Ключевые слова: случайные величины, сходимость, случайное блуждание, хвостовые вероятности, закон больших чисел, «r-быстро», «Ф-быстро», порядковые статистики, скорость сходимости.

Пусть $\{\zeta_n\}$ — последовательность случайных величин (с.в.) $\forall\varepsilon > 0$ $\chi(\varepsilon) = \sup\{n \geqslant 1;\ |\zeta_n| > \varepsilon\}$.

Величина $\chi(\varepsilon)$ была введена В. Штрассеном [1] в связи с новым понятием «r-быстрой» (r-quickly) сходимости последовательности с.в. $\{\zeta_n\}$.

Определение 1 (Штрассен). Последовательность с.в. $\{\zeta_n\}$ при $n \to \infty$ «r-быстро» сходится к нулю ($\zeta_n \to 0$ «r-быстро»), если $E\chi^r(\varepsilon) < \infty$ $\forall\varepsilon > 0$ и $r > 0$.

В случае $\zeta_n = n^{-1}(\xi_1 + \ldots + \xi_n)$, где $\{\xi_n\}$ — независимы и одинаково распределены в [1] установлено необходимое и достаточное условие гарантирующее $E\chi^r(\varepsilon) < \infty$, $\forall\varepsilon > 0$, $r > 0$, исследована асимптотика хвостовых вероятностей $\chi(\varepsilon)$ при фиксированном $\varepsilon > 0$. Отметим, что величину $\chi(\varepsilon)$ можно интерпретировать как момент последнего выхода случайного блуждания за двустороннюю линейную границу $\pm n\,\varepsilon$. Исследования В. Штрассена продолжались в работах [2–9] и других в различных направлениях. Так, в [7] получен вариант «r-быстрой» сходимости в известной теореме Колмогорова — Марцинкевича об усиленном законе больших чисел, в [2], [8] рассматривалась приложения понятия «r-быстрой» сходимости к задачам математической статистики и т. д.

Наиболее общие результаты содержащие варианты «r-быстрой» сходимости усиленного закона больших чисел в форме теоремы Колмогорова — Марцинкевича и др. приведены в работе [5].

В настоящее время интересы специалистов вокруг приведенных результатов расширяются, особую активность в этом направлении проявляют китайские, шведские специалисты (см. напр. [9]).

Предлагаемая работа, результаты которой в идейном отношении близки к кругу описанных выше исследований, основываются нами предложенном в более общей форме определении «r-быстрой» сходимости В. Штрассена.

Пусть $\varphi(x)$ — некоторая неотрицательная функция, определенная на $[1,\infty)$,

$$\Phi(x) = \int_1^x \varphi(t)\,dt.$$

Определение 2. Последовательность с.в. $\{\zeta_n\}$ при $n \to \infty$ «Ф-быстро» сходится к нулю ($\zeta_n \to 0$ «Ф-быстро») если $E\Phi\left(\chi(\varepsilon)\right) < \infty, \quad \forall \varepsilon > 0$.

Сущность приведенного определения можно пояснить следующей леммой, которая доказывается непосредственно. Введем следующий класс функций

$$\mathcal{M} = \Big\{\varphi(x) : \varphi(x) \geqslant 0,\ x \in [1,\infty),\ -(1-\delta_1)\,\frac{\varphi(x)}{x} \leqslant \varphi'(x) \leqslant \delta_2\varphi(x)$$
$$\text{при } x \geqslant x_0 \geqslant 1 \text{ и некоторых } \ \delta_1, \delta_2 > 0\Big\}.$$

Лемма 1. *Пусть $y = \pm\varepsilon$ верхняя функция для последовательности с.в.$\{\zeta_n\}$ и $\varphi \in \mathcal{M}$. Тогда*

$$E\Phi\left(\chi(\varepsilon)\right) < \infty, \quad \forall \varepsilon > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow S(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) P\left(\sup_{k \geqslant n} |\zeta_k| > \varepsilon\right) < \infty,\ \forall \varepsilon > 0.$$

Отсюда, легко понять, что

$$\zeta_n \to 0 \text{ «Ф-быстро» } \Rightarrow \zeta_n \to 0 \text{ «}r\text{-быстро»}.$$

На основании леммы мы сможем сформулировать следующее эквивалентное определение «Ф-быстрой» сходимости.

Определение 3. Последовательность с.в. $\{\zeta_n\}$ при $n \to \infty$ «Ф-быстро» сходится к нулю, если $S(\varepsilon) < \infty,\ \ \forall \varepsilon > 0$.

Множества задач, основанные на определениях 2, 3 охватывают широкий круг проблем теории вероятностей и математической статистики, связанные в частности, суммированиям с.в., имеющие разные природы взаимосвязи.

В качестве подтверждения сказанного рассмотрим последовательность независимых, одинаково распределенных с.в. $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ и пусть $\xi_n^{(k)}$, $1 \leqslant k \leqslant n$ соответствующие порядковые статистики, расположенные в порядке убывания.

Положим $S(n,l) = \sum\limits_{k=l+1}^{n} \xi_n^{(k)},\ \zeta_n^{(l)} = \frac{S(n,l)}{H(n)},\ \ l \geqslant 0$, где $H(x)$ определенная на $[1,\infty)$ положительная, строго возрастающая функция, $\forall \varepsilon > 0$

$$\chi(\varepsilon, l) = \sup\left\{n > l;\ |S(n,l)| > \varepsilon H(n)\right\}.$$

Целью настоящей работы является описание класса функций распределения ξ_1 и классов функций $\varphi(x)$ и $H(x)$ в которых при $n \to \infty$ и фиксированном $l \geqslant 0$

$$\zeta_n(l) \to \ \text{«Ф-быстро».}$$

Поведение $S(n,l)$ изучалось по двум направлениям, которые в той или иной степени сложились в многочисленных работах, появившихся примерно за последние 50 лет. Первое направление относится к случаю, когда $l = l(n) \to \infty$ при $n \to \infty$. При различных предположениях на рост $l(n)$ доказаны различные предельные теоремы для $S(n,l)$, в частности доказана центральная предельная теорема с оценкой скорости сходимости [10–15] и др.

Во втором направлении при фиксированном $l \geqslant 0$ исследованы проблемы связанные с оценками скорости сходимости в законах больших чисел и в законе повторного логарифма для $S(n,l)$ с применениями в граничных задачах для случайных блужданий [16–18] и др.

Приводимые ниже результаты данной работы относятся второму направлению.

Положим $J_l(\varphi, H) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi(n) \cdot n^{l+1} P^{l+1}\left(|\xi_1| > H(n)\right)$.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* $\lim\limits_{x\to\infty} \sup \frac{H(c\,x)}{H(x)} < \infty,\ \ \forall c > 1$ *и* $\varphi \in M$. *Тогда*

$$\zeta_n(l) \to 0 \ \text{«Ф-}\textit{быстро}\text{»} \ \Rightarrow J_l(\varphi, H) < \infty.$$

Доказательство достаточности утверждения $J_l(\varphi, H) < \infty$ требует более детального рассмотрения различных соотношений между функциями φ и H. Функции φ и H, для которых это будет установлено удобно разбить на несколько классов в зависимости от убывания или возрастания отношений

$$\frac{H^{l+1}(x)}{x^{l+2}\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \frac{H^{2(l+1)}(x)}{x^{l+2}\varphi(x)}.$$

Приводимое ниже утверждение является типичным по части достаточности $J_l(\varphi, H) < \infty$.

Пусть

$$\mathcal{M}_l = \left\{\varphi : \varphi(x) \geqslant 0,\ x \in [1, \infty),\ \frac{x\varphi(x)}{\log^l x \cdot \log^{l+1}\log x} \uparrow \infty, \right.$$
$$\left. \varphi'(x) = O\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right) \ (x \to \infty)\right\}.$$

Теорема 2. *Пусть* $\varphi \in \mathcal{M}_l$, $\frac{H(x)}{x[x\varphi(x)]^{\frac{1}{l+1}}} \downarrow$, $\frac{H^2(x)}{x[x\varphi(x)]^{\frac{1}{l+1}}} \uparrow$ *и кроме того, выполнено одно из следующих условий:*

1) $x^{-1}H(x) \uparrow \infty$;

2) $H(x) = x,\ E\xi_1 = 0.$

Тогда

$$J_l(\varphi, H) < \infty \Rightarrow \zeta_n(l) \to 0 \text{ «Ф-}\textit{быстро}\text{».}$$

Список литературы

[1] Strassen V. Almost sure behavior of sums of independent random variables and martingales // Proc. 5th Berkeley Symp. Math. Stat. Prob. — 1967. — V. 2. N. 1. — P. 315–343.

[2] Lai T. L. On r-quick convergence and a conjecture of Strassen // Ann. Prob. — 1976. — 4. — P. 612–627.

[3] Lai T. L. Convergence rates and r-quick version of the strong law for stationary mixing sequences // Ann. Prob. — 1977. — 5. — P. 693–706.

[4] Meilijson I. The average of the values of a function of a random points // Israel J. Math. — 1973. — 15. — P. 193–203.

[5] Bingham N. H., Goldie Ch. M. Probabilistic and deterministic averages // Trans. Amer. Math. Soc. — 1982. — V. 269, N. 2. — P. 453–479.

[6] Гафуров М. У., Сластников А. Д. Некоторые задачи выхода случайного блуждания за криволинейную границу и большие уклонения // Теор. вер и примен. — 1987. — Т. 32, вып. 2. — С. 327–348.

[7] Chow Y. S., Lai T. L. Some one-sided theorems on the tail distribution of sample sums with applications to the last time and largest excess of boundary crossing // Trans. Amer. Math. Soc. — 1975. — 208. — P. 51–72.

[8] Lai T. L. On confidence sequences // Ann. Stat. — 1976. — 4, 2. — P. 265–280.

[9] Lui W. D. Lin Z. Y. Some LIL type results on the partial sums and trimmed sums with multidimensional indexes // Elect. Comm. in Probab. — 2007. — 12. — P. 221–233.

[10] Аров Д. З., Бобров А. А. О крайних членах вариационного ряда и их роли в сумме независимых величин // Теор. вер. прим. — 1960. — Т. 5, N. 4. — С. 415–435.

[11] Егоров В. А., Невзоров В. Б. Суммирование членов вариационного ряда и нормальный закон // Вестник ЛГУ. — 1971. — 1. — С. 5–11.

[12] Maller R. A. Asymptotic normality of lightly trimmed means-a convergence // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1982. — V. 92. — P. 535–545.

[13] Csörgő S., Horvath L., Mason D. M. What portion of the Sample Makes a partial sum asymptotically stable or normal? // Prob. Theory. Rel. Fields. — 1986. — V. 72. — P. 1–16.

[14] Griffin P. S., Qazi F. S. Limit laws of modulus trimmed sums // Ann. Prob. — 2002. — 30. N. 3. — P. 1466–1485.

[15] Csörgő S., Haeusler E., Mason D. M. The asymptotic distribution of trimmed sums // Ann. Prob. — 1988. — 16. — P. 672–699.

[16] Hatori H., Maejima M., Mori T. Convergence rates in the LLN when extreme terms are excluded // Z. Wahr. Geb. — 1979. — V. 52. — P. 1–12.

[17] Feller W. An extention of the law of the iterated logarithm to variables without variance // J. Math. Mech. — 1968. — 18, 4. — P. 343–355.

[18] Gafurov M. U., Hamdamov I. The influence of extremes summands on the law of iterated logarithm // New trends in prob. and statistics. — Utrecht, the Netherlands: VSP, 1991 — P. 11–29.