

# О быстродействии сетей из нейронов Мак-Каллока-Питтса

В. С. Половников, А. А. Часовских, Е. Ф. Павлов  
(МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва)

Известно, что нейронные схемы реализуют кусочно-постоянные функции. Для соответствия нейронным сетям модели Мак-Каллока-Питтса следует разрешить использование только «цельных нейронов». В этом случае выход нейронной схемы будет принимать значение из множества  $\{0, 1\}$ , а функция реализуемая схемой — индикаторной. В работе доказана представимость произвольной индикаторной функции нейронными сетями с не более чем тремя слоями. Сформулирован критерий представимости функций индикаторов двуслойными нейронными сетями.

**Ключевые слова:** нейронная сеть, нейронная схема, нелинейная глубина, модель Мак-Каллока-Питтса.

## 1. Введение

В работах [?, ?, ?, ?] было введено понятие нейронной схемы Мак-Каллока-Питтса как схемы из функциональных элементов [?, ?] следующих четырех типов:

- 1) Константа  $c$ ,  $c \in \mathbb{R}$  (рис. 1а)
- 2) Сумматор  $\Sigma_n$  с произвольным количеством входов  $n \in \{2, 3, \dots\}$ ,  $\Sigma_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Sigma_n(a_1, \dots, a_n) = a_1 + \dots + a_n$  (рис. 1б)
- 3) Усилитель  $f_\gamma$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$ ,  $f_\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_\gamma(a) = \gamma a$  (рис. 1в)
- 4) Функция Хевисайда  $\theta$ ,  $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\theta(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \geq 0 \\ 0, & \text{если } a < 0 \end{cases}$  (рис. 1г)

Из этих элементов можно составить нейрон модели Мак-Каллока-Питтса, пусть у него  $n$  входов с весами  $a_1, \dots, a_n$  и порог  $c$  (рис. 2).

Следовательно, произвольную нейронную сеть модели Мак-Каллока-Питтса [?] можно представить нейронной схемой. Однако обратное

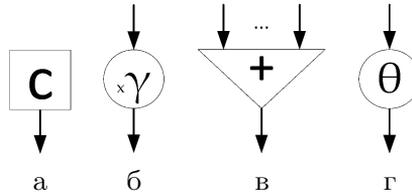


Рис. 1.

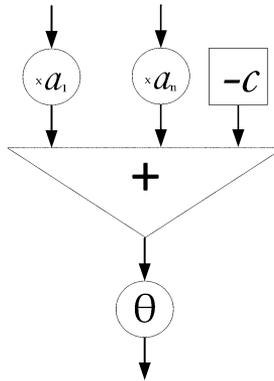


Рис. 2.

вообще говоря не верно, так как нейронная сеть модели Мак-Каллока-Питтса должна состоять из «цельных нейронов». Очевидно существуют нейронные схемы не соответствующие никакой нейронной сети хотя бы потому, что выход нейронной сети — выход какого-то нейрона. А так как в модели нейрона Мак-Каллока-Питтса функцией активации является  $\theta$ -функция Хевисайда, то функция, реализуемая нейронной сетью будет принимать значения из множества  $\{0, 1\}$ .

Напомним основные определения.

**Определение 1.** (Эквивалентность точек относительно набора гиперплоскостей) Пусть  $l_1, \dots, l_k$  — гиперплоскости, задаваемые уравнениями

$$l_i : \bar{x} \cdot \bar{a}_i = c_i, \bar{a}_i \in \mathbb{R}^n, c_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, k.$$

$\bar{x} \sim \bar{y}$  относительно  $l_1, \dots, l_k \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, k\} \operatorname{sgn}(\bar{x} \cdot \bar{a}_i - c_i) = \operatorname{sgn}(\bar{y} \cdot \bar{a}_i - c_i)$

$$\text{Где } \operatorname{sgn}(b) = \begin{cases} -1, & b < 0 \\ 0, & b = 0 \\ 1, & b > 0 \end{cases}$$

Пространство  $\mathbb{R}^n$  разбивается на классы эквивалентности  $R_1, \dots, R_s$ . Каждому классу  $R$  можно сопоставить вектор с компонентами из множества  $\{-1, 0, 1\}$ , называемый сигнатурой класса  $R$ :

$$\sigma(R) = (\sigma_i)_{i=1}^k, \text{ где } \sigma_i = \text{sgn}(\bar{x} \cdot \bar{a}_i - c_i) \text{ постоянное значение для } \bar{x} \in R.$$

**Определение 2.** (Кусочно-постоянная функция) Пусть  $R_1, \dots, R_s$  — все классы эквивалентности на которые гиперплоскости  $l_1, \dots, l_k$  разбивают  $\mathbb{R}^n$ .

Функция  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  называется кусочно-постоянной, если  $\forall j \in \{1, \dots, s\}$  найдется  $d_j \in \mathbb{R}$ , что  $\forall \bar{x} \in R_j$   $f(\bar{x}) = d_j$ .

**Определение 3.** (Индикаторная функция) Кусочно-постоянную функцию, принимающую значения из множества  $\{0, 1\}$ , назовем индикаторной.

**Определение 4.** (Эквивалентность нейронных сетей модели Мак-Каллока-Питтса) Две нейронные сети назовем эквивалентными, если они реализуют одну и ту же функцию.

Таким образом, согласно [?, ?], нейронная сеть модели Мак-Каллока-Питтса, являясь частным случаем нейронной схемы, будет реализовывать кусочно-постоянную функцию со значениями из множества  $\{0, 1\}$ , а значит некоторую индикаторную функцию.

Более того покажем, что любая индикаторная функция может быть реализована такой нейронной сетью.

## 2. О трехслойности нейронных сетей

**Теорема 1.** *Произвольная индикаторная функция может быть реализована нейронной сетью модели Мак-Каллока-Питтса с не более чем тремя слоями.*

**Доказательство.** Пусть дана индикаторная функция  $f(\bar{x})$ . По определению индикаторных функций (как частного случая кусочно-постоянных функций) для  $f(\bar{x})$  существуют гиперплоскости  $l_1, \dots, l_k$ ,  $l_i: l_i(\bar{x}) = \bar{a}_i \cdot \bar{x} - c_i$ ,  $\bar{a}_i \in \mathbb{R}^n$ . Эти гиперплоскости разбивают пространство  $\mathbb{R}^n$  на классы  $R_1, \dots, R_s$ , на которых  $f|_{R_j}(\bar{x}) = d_j \in \{0, 1\}$ ,  $j = 1, \dots, s$ .

Для каждой гиперплоскости  $l_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  на первом слое нейросети поместим 2 нейрона, реализующих функции  $\theta(l_i(\bar{x}))$  и  $\theta(-l_i(\bar{x}))$ . Таким образом на первом слое  $2k$  нейронов.

Пусть  $\{R_{j_1}, \dots, R_{j_{s'}}\} \subseteq \{R_1, \dots, R_s\}$  — подмножество классов, на котором функция  $f(\bar{x})$  принимает значение 1. Для каждого  $R_{j_m}$ ,  $m = 1, \dots, s'$  реализуем нейрон согласно сигнатуре класса  $\sigma(R_{j_m})$  по следующей схеме:

если  $i$ -я компонента вектора сигнатуры  $\sigma(R_{j_m})$  равна

- 1, то берется выход нейрона первого слоя  $\theta(-l_i(\bar{x}))$  с весом  $-1$ ;
- $-1$ , то берется выход нейрона первого слоя  $\theta(l_i(\bar{x}))$  с весом  $-1$ ;
- 0, то берется выходы нейронов первого слоя  $\theta(l_i(\bar{x}))$  и  $\theta(-l_i(\bar{x}))$  с весами  $\frac{1}{2}$ .

Порог нейронов второго слоя принимаем равным числу нулевых элементов в векторе сигнатуры. Таким образом на выходе  $m$ -го нейрона второго слоя будет сигнал 1 тогда и только тогда, когда  $\bar{x} \in R_{j_m}$ .

Выходной нейрон (третий слой) будет реализовывать дизъюнкцию выходов предыдущего слоя по формуле  $\theta(y_1 + \dots + y_{s'} - 1)$ , где  $y_1, \dots, y_{s'}$  — выходы нейронов второго слоя.

Полученная нейронная сеть имеет три слоя, и реализует кусочно-постоянную функцию, которая принимает значение 1 только на классах  $R_{j_1}, \dots, R_{j_{s'}}$ , в остальных случаях принимает значение 0. То есть реализует в точности данную индикаторную функцию  $f(\bar{x})$ .

Заметим, что сложность полученной сети (общее количество нейронов на всех слоях) равна  $2k + s' + 1$ . Теорема доказана.

**Следствие 1.** *Любая нейронная сеть модели Мак-Каллока-Питтса может быть перестроена в эквивалентную ей не более чем трехслойную сеть.*

Несложно заметить, что индикаторная функция представима однослойной нейронной сетью тогда и только тогда, когда она является пороговой, так как однослойная нейронная сеть суть один нейрон. Рассмотрим более подробно вопрос, когда индикаторную функцию можно представить двуслойной нейронной сетью.

### 3. Критерий двуслойности

**Теорема 2.** *Для представимости индикаторной функции  $f(\bar{x})$  не более чем двуслойной нейронной сетью Мак-Каллока-Питтса необходимо и достаточно, чтобы существовала кусочно-постоянная нейронной функция  $g(\bar{x})$ , задаваемая нейронной схемой нелинейной глубины 1 такая, что  $g(\bar{x}) \geq 0 \Leftrightarrow f(\bar{x}) = 1$ .*

**Доказательство. Необходимость.** Для однослойной нейронной сети утверждение очевидно, достаточно взять  $g(\bar{x}) = f(\bar{x}) - \frac{1}{2}$ .

Функцию, реализуемую двухслойной нейронной сетью, в общем виде можно задать следующей формулой:

$$f(\bar{x}) = \theta \left( \sum_{j=1}^k b_j \theta \left( \sum_{i=1}^n a_i^j x_i - c_j \right) - d \right). \quad (1)$$

Пусть на первом слое  $k$  нейронов (занумеруем индексом  $j$ ):  $j$ -й нейрон зависит от  $i$ -го входа с коэффициентом  $a_i^j$ . Если связь отсутствует, положим  $a_i^j = 0$ . Порог  $j$ -го нейрона равен  $c_j$ . На втором слое один (выходной) нейрон с порогом  $d$ , зависящий от  $j$ -го нейрона первого слоя с коэффициентом  $b_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ . В качестве  $g(\bar{x})$  возьмем функцию, подаваемую на вход самой внешней  $\theta$ -функции. То есть

$$g(\bar{x}) = \sum_{j=1}^k b_j \theta \left( \sum_{i=1}^n a_i^j x_i - c_j \right) - d, \quad f(\bar{x}) = \theta(g(\bar{x})). \quad (2)$$

Так как  $g(\bar{x})$  задается подсхемой нейронной схемы, то она является нейронной функцией и удовлетворяет условию теоремы.

**Достаточность.** Пусть кусочно-постоянная нейронная функция  $g(\bar{x})$  представима нейронной схемой нелинейной глубины 1. Тогда она может быть в общем виде записана формулой (??). А так как выполнено  $g(\bar{x}) \geq 0 \Leftrightarrow f(\bar{x}) = 1$ , то верно  $f(\bar{x}) = \theta(g(\bar{x}))$  и выполнено (??). Следовательно,  $f(\bar{x})$  задается нейронной сетью модели Мак-Каллока-Питтса нелинейной глубины 2. Теорема доказана.

Используя критерий однослойности нейронных схем, доказанный в [?] можно переформулировать теорему в следующем виде:

**Следствие 2.** Для представимости индикаторной функции  $f(\bar{x})$  не более чем двухслойной нейронной сетью Мак-Каллока-Питтса необходимо и достаточно, чтобы нашлась кусочно-постоянная нейронной функция  $g(\bar{x})$ , у которой существуют переходы через любую гиперплоскость и выполнено  $g(\bar{x}) \geq 0 \Leftrightarrow f(\bar{x}) = 1$ .

## Список литературы

- [1] Половников В. С. О некоторых характеристиках нейронных схем // Вестн. Моск. Ун-та. Сер.1, Математика. Механика. — М., 2004. — № 5. — С. 65–67.

- [2] Половников В. С. О некоторых характеристиках нейронных схем // Интеллектуальные системы. — М., 2004. — Т. 8, вып. 1–4. — С. 121–145.
- [3] Половников В. С. Критерий нелинейной однослойности нейронных схем // Вестн. Моск. Ун-та. Сер.1, Математика. Механика. — М., 2006. — № 6. — С. 3–5.
- [4] Половников В. С. О нелинейной сложности нейронных схем Мак-Каллока-Питтса // Интеллектуальные системы. — М., 2007. — Т. 11, вып. 1–4. — С. 261–275.
- [5] Кудрявцев В. Б. Функциональные системы. — М.: Изд-во МГУ, 1982.
- [6] Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: МГУ, 1984.
- [7] McCulloch W.S., Pitts W. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity // Bulletin of Mathematical Biophysics. — 1943. — Vol. 5. — P. 115–133.