Об одном подходе к математическому представлению шахматной позиции

А. Е. Афанасьева, С. А. Афонин
(МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва)

В данной работе предлагается формализация идей М. М. Ботвинника, которые отражают особенности логического мышления человека. В основе подхода лежит понятие цепочки, как последовательности действий, направленных на достижение цели. Существование логических связей между цепочками приводит к представлению шахматной позиции в виде набора цепочек. Предлагается формальная модель описания позиции и алгоритм эвристического нахождения оптимального представления.

Ключевые слова: шахматная позиция, цепочка, оптимизация, математическое моделирование, когнитивные процессы.

В настоящее время основным подходом к моделированию игр с полной информацией является перебор с отсечением, основанным либо на эвристической функции оценки позиции, либо на использовании многослойных нейронных сетей и соответствующих методов машинного обучения [1]. При выборе хода современные шахматные программы просматривают миллионы позиций. Согласно результатам психологических исследований [2, 3], профессиональный шахматист анализирует только несколько десятков позиций и при выборе очередного хода использует аналогию с другими позициями — решает задачу распознавания образов. В данной работе предлагается формализация идей М.М. Ботвинника [4], которые отражают особенности логического мышления человека.

В основе подхода Ботвинника лежит понятие *цепочки* как последовательности действий, направленных на достижение *неточной* цели, то есть, дающих позиционное или материальное преимущество, а не приводящих непосредственно к мату. В простейшем случае целью является достижение некоторого поля на доске, например, занятого фигурой противника.

Построение цепочки схематично представляется следующим образом. На пустой доске намечаются все возможные траектории движения фигур на целевое поле. Такие траектории называются *подцепочками*-0. При движении фигуры вдоль траектории в реальной позиции, некоторые поля могут оказаться занятыми или быть под контролем фигур противника. Чтобы сделать ход в подцепочке-0 возможным, могут потребоваться предварительные ходы другими фигурами. Траектории движения этих вспомогательных фигур называются *подцепочками*-1. Аналогично, для реализации подцепочек-1 могут потребоваться подцепочки-2, и так далее. Действия соперника, например, препятствующие продвижению фигуры по подцепочке-0, описываются аналогично. Длина подцепочки-0 ограничена некоторой заранее заданной величиной — *горизонтом* видимости мишени. При построении подцепочек-(k+1) необходимо учитывать ограничение на *время успевания* фигуры из подцепочки-k. Совокупность из подцепочки-0 и всех связанных с ней подцепочек большего порядка называлась Ботвинником цепочкой.

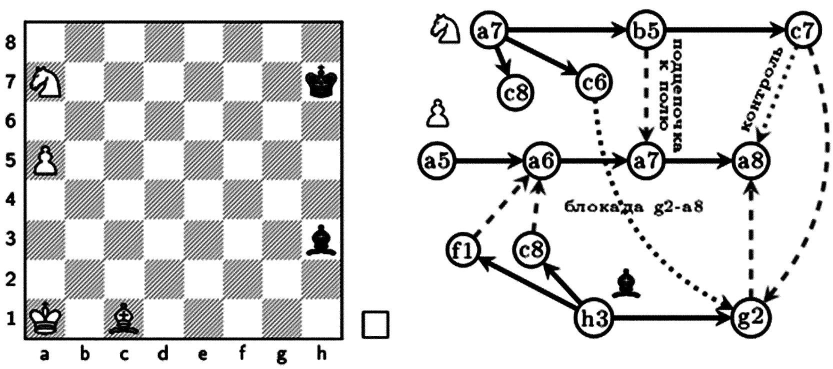

Рис. 1. Фрагмент цепочки для траектории a5–a6–a7–a8Ф.

Представление позиции суть набор цепочек. Основной проблемой составления набора, адекватно описывающего текущее положение фигур на доске — *оптимального представления*, — является наличие многочисленных связей между различными цепочками. Эти связи в частности соответствуют таким тактическим приемам как завлечение, двойной удар, отвлечение.

В оставшейся части статьи вводятся формальные определения изложенных выше понятий и формулируются оптимизационные задачи связанные с построением представления позиции.

Траекторией фигуры назовем упорядоченный набор полей $T \in (S \times ST)^{+}$, где $S = \{a1, b1, \ldots, h8\}$ множество *полей* доски, а $ST = \{stop, internal\}$ — тип поля.

Цепочкой $ch \in \texttt{Chains}$ назовем набор $\langle color, traj, sch \rangle$, где $color \in C = \{black, white\}$ — цвет цепочки, $traj \in T$ — траектория подцепочки-0, $sch \colon \mathbb{N}_0 \to 2^{\texttt{Chains}}$ — множество вспомогательных действий (подцепочек), связанных с полями траектории. Цепочка называется *полной*, если она содержит все возможные подцепочки (до заданного горизонта и глубины подцепочек), и *корректной*, если траектории каждой её фигуры попарно согласованы.

Представление позиции есть множество корректных цепочек.

Основные оценочные функции:

- *стоимость фигуры* (в представлении позиции p) $\nu_p : S \to \mathbb{R}$;
- *стоимость цепочки* $\varphi \colon \texttt{Chains} \to \mathbb{R}$, например,

$$\varphi\left(ch\right) = \sum_{k=0}^{|traj(ch)|} \left(\sum_{p \in ep(k)} \nu\left(p\right) + \sum_{c \in sch(k)} \varphi\left(c\right) \right),$$

  где $ep\left(k\right)$ — набор фигур, участвующих в размене на поле k;
- *время успевания* цепочки ch до k-ого поля основной траектории $\tau \colon \texttt{Chains} \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$;
- оценка *локальной реализуемости* цепочки $\rho \colon \texttt{Chains} \to [0, 1]$. Цепочки с большим числом вариантов защиты, отступлений или временем реализации менее «опасны»;
- оценка *позиции* $\Phi \colon \texttt{Positions} \to \mathbb{R}$ зависит от числа цепочек, максимального значения оценочной функции φ по цепочкам позиции и суммы значений этой функции.

Заметим, что предложенные оценки функционально зависимы. Например, функция оценки цепочки $\varphi\left(ch\right)$ зависит в том числе от стоимости фигур, которые меняют своё положение или удаляются с доски при реализации цепочки. В то же время стоимость фигуры зависит от оценки цепочек, в которых она участвует. Изменение стоимости фигуры влечет за собой изменение структуры цепочек или даже их исчезновение. Это определяет сложность задачи нахождения представления позиции, изменение которого невыгодно ни одной из сторон. Для определения оптимального представления позиции введем следующие понятия.

Графом представлений назовем ориентированный раскрашенный граф, узлами которого являются представления позиции. Если две вершины Γ_1 и Γ_2, совпадающие по множеству белых цепочек таковы, что $\Phi(\Gamma_1) > \Phi(\Gamma_2)$, то проводится ориентированная дуга из Γ_1 в Γ_2, а концевая вершина окрашивается в белый цвет. Это означает, что черные могут улучшить оценку позиции Γ_1 в свою пользу, изменив некоторые свои действия, но решение о сохранении полученного результата принимают белые. Аналогично, если цепочки совпадают по структуре черного цвета и $\Phi(\Gamma_1) < \Phi(\Gamma_2)$, то проводится дуга, концевая вершина окрашивается в черный цвет. Будем использовать символ $\prec_c$ для обозначения сравнения, учитывающего цвет.

Утверждение 1. *Если длина траекторий подцепочек-0 ограничена сверху, то граф представлений конечен.*

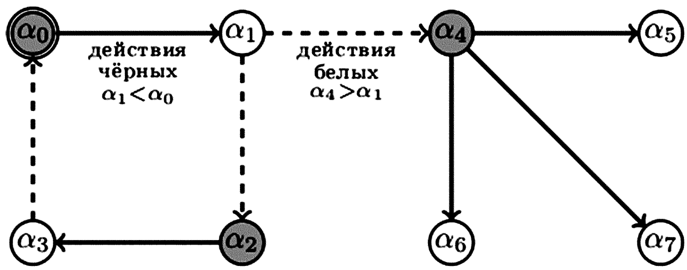

Рис. 2. Схема графа представлений.

Далее вводится понятие минимакс-оптимальной вершины, которое соответствует алгоритму минимакс. Основное отличие состоит в том, что классический алгоритм минимакса определяет числовую оценку вершины в дереве ходов, а в случае графа, в котором могут быть циклы, требуется найти вершину, имеющую искомую оптимальную оценку.

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Вершину Γ' назовем *α-достижимой из вершины* Γ цвета c, если:

- $\Phi(\Gamma') \succcurlyeq_c \Phi(\Gamma)$;
- найдется путь $\pi = \Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ $(k \geqslant 0)$ такой, что $\Gamma_0 = \Gamma$ и $\Gamma_k = \Gamma'$;
- для любой лежащей на пути π вершины Γ_i цвета c_i $(i \geqslant 0)$ выполняется условие $\Phi(\Gamma_i) \preccurlyeq_{c_i} \alpha$.

Вершину Γ' назовем *минимакс-достижимой из* Γ, если она $\Phi(\Gamma')$-достижима из Γ.

Назовем вершину $\widehat{\Gamma}$ *минимакс-оптимальной для вершины* Γ, если она минимакс-достижима из Γ и любая другая минимакс-достижимая из Γ вершина Γ' цвета c', для которой $\Phi(\Gamma') \succ_{c'} \Phi(\widehat{\Gamma})$, либо не является $\Phi(\widehat{\Gamma})$-достижимой из Γ, либо имеет минимакс-достижимую вершину Γ'', для которой $\Phi(\Gamma'') \prec_{c'} \Phi(\widehat{\Gamma})$.

Утверждение 2. *Для любой вершины любого конечного графа представлений существует минимакс-оптимальная вершина.*

Оптимальным представлением позиции назовем такую вершину Γ^* графа представлений, что $\widehat{\Gamma^*} = \Gamma^*$ и для любой вершины Γ выполнено $\Phi(\widehat{\Gamma}) \preccurlyeq_c \Phi(\Gamma^*)$, где c — цвет $\widehat{\Gamma}$.

Теорема 1. *Существует алгоритм нахождения оптимального представления позиции.*

Найти оптимальное представление позиции методом перебора всех вариантов представлений практически невозможно, поэтому предлагается использовать итерационный алгоритм поиска приближения Γ^*.

1) Построим все полные цепочки.
2) Составляем *деревья фигур*, содержащие все их траектории и ссылки на цепочки. Дерево фигуры позволяет выявить траектории движения фигуры, общие для нескольких цепочек.
3) Оцениваем каждую вершину дерева фигуры: изменение позиции фигуры может сделать возможным или невозможным ее участие в цепочке.
4) Упорядочиваем цепочки по степени «угрозы» $\varphi(ch) \cdot \rho(ch)$ и доопределяем наиболее опасные, выбирая «оптимальные» для дерева фигур подцепочки.
5) Переоцениваем фигуры и ищем приближение Γ^* как *неподвижную точку* в оценке цепочка-фигура.

Представление позиции строится при статичном положении фигур, поэтому далее необходимо выбрать по Γ^* ходы-кандидаты и проверить их перебором на виртуальной доске.

Список литературы

[1] Silver D. et al. Mastering the game of Go with deep neural networks and tree search // Nature. — 2016. — Т. 529. № 7587. — С. 484–489.

[2] Chase W. G., Simon H. A. Perception in chess // Cognitive Psychology. — 1973. — Т. 4. №. 1. — С. 55–81.

[3] de Groot A. D. Thought and Choice in Chess. — Amsterdam University Press, 2008.

[4] Ботвинник М. М. Шахматный метод решения переборных задач. — М.: Советский спорт, 1989.