

# Исследование алгоритма, задающего функцию выхода прогнозирующего автомата

И. К. Ведерников (МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва)

В данной работе показано, что оптимальная функция выхода может быть получена алгоритмом, который используется в доказательстве критерия прогнозируемости для общерегулярных сверхсобытий в многозначном алфавите, а также, что степень прогнозирования сверхсобытия автоматом, полученным путем использования этого алгоритма, может отличаться от оптимальной в любое количество раз.

**Ключевые слова:** прогнозирующий автомат, прогнозирование сверхсобытий, автоматный цикл.

В статье А. Г. Вереникина и Э. Э. Гасанова [1] были введены прогнозирующие автоматы — конечные автоматы, предсказывающие сверхслово или множество сверхслов. Автомат прогнозирует сверхслово, если через некоторое конечное время после начала подачи сверхслова, он начинает угадывать каждый следующий символ, то есть на выходе в момент времени  $t$  выдавать элемент входной последовательности под номером  $t + 1$ .

В работе [2] А. А. Мاستихиной было введено понятие частичного прогнозирования, которое имеет место в случае, когда автомат угадывает следующий символ не обязательно в каждый момент времени, но достаточно часто. А в работе [3] для общерегулярных сверхсобытий в двоичном алфавите получен критерий прогнозируемости.

Позднее был доказан аналогичный критерий для многозначных алфавитов. В доказательстве был сформулирован и обоснован один из алгоритмов, позволяющий представляющий автомат преобразовать в прогнозирующий.

В данной работе показано, что оптимальная функция выхода может быть получена этим алгоритмом, а также, что степень прогнозирования

сверхсобытия автоматом, полученным путем использования этого алгоритма, может отличаться от оптимальной в любое количество раз.

Введем основные определения.

Пусть  $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$  — конечный алфавит. Через  $E_k^*$  и  $E_k^\infty$  обозначим соответственно множество всех слов конечной длины и множество всех сверхслов в алфавите  $E_k$ . По определению будем считать, что пустое слово  $\Lambda$  принадлежит  $E_k^*$ . Подмножества  $E_k^*$  называются *событиями*, а подмножества  $E_k^\infty$  — *сверхсобытиями*.

Если  $\alpha$  — сверхслово в алфавите  $E_k$ ,  $n$  — натуральное число, то  $n$ -ую букву сверхслова  $\alpha$  будем обозначать  $\alpha(n)$ , а через  $\alpha ]$  обозначим префикс длины  $n$  сверхслова  $\alpha$ , то есть  $\alpha ] = \alpha(1)\alpha(2) \dots \alpha(n)$ .

В работе рассматриваются конечные инициальные автоматы в соответствии с нотацией из [4]:

$$V = (E_k, Q, E_k, \varphi, \psi, q_0),$$

где  $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$  — входной и выходной алфавит,  $Q$  — множество состояний, которое является конечным подмножеством некоторого фиксированного счетного множества,  $\varphi : Q \times E_k \rightarrow Q$  — функция переходов,  $\psi : Q \times E_k \rightarrow E_k$  — функция выходов,  $q_0$  — начальное состояние.

Если на вход инициальному автомату  $V$  подается слово или сверхслово  $x = x(1)x(2) \dots$ , на выходе получается слово или сверхслово  $y = y(1)y(2) \dots$ , и  $q(t)$  означает состояние автомата в момент времени  $t$ , то функционирование автомата задается системой уравнений

$$\begin{cases} q(1) = q_0, \\ q(t+1) = \varphi(q(t), x(t)), \\ y(t) = \psi(q(t), x(t)), \end{cases}$$

где  $t = 1, 2, \dots$

Функции  $\varphi$  и  $\psi$  естественно расширяются на  $Q \times E_k^*$ , а именно, если  $\alpha \in E_k^*$ ,  $a \in E_k$ , то индуктивно определим

$$\varphi(q, \alpha a) = \varphi(\varphi(q, \alpha), a),$$

$$\psi(q, \alpha a) = \psi(\varphi(q, \alpha), a).$$

Введем также обозначения

$$\bar{\varphi}(q, \alpha) = \varphi(q, \alpha]_1) \varphi(q, \alpha]_2) \dots \varphi(q, \alpha),$$

$$\bar{\psi}(q, \alpha) = \psi(q, \alpha]_1) \psi(q, \alpha]_2) \dots \psi(q, \alpha),$$

если  $\alpha$  — слово, если же  $\alpha$  — сверхслово, то

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(q, \alpha) &= \varphi(q, \alpha]_1)\varphi(q, \alpha]_2) \dots \varphi(q, \alpha]_n) \dots, \\ \bar{\psi}(q, \alpha) &= \psi(q, \alpha]_1)\psi(q, \alpha]_2) \dots \psi(q, \alpha]_n) \dots\end{aligned}$$

Если  $\alpha$  — сверхслово в алфавите  $A$ , то *пределом* сверхслова  $\alpha$  назовем такое множество  $A' \subseteq A$ , что в сверхслове  $\alpha$  бесконечное число раз встречаются символы из  $A'$  и только они. Этот факт будем обозначать  $A' = \lim \alpha$ .

Сверхсобытие  $R$  *представимо* автоматом  $V = (E_k, Q, E_k, \varphi, \psi, q_0)$  с помощью семейства  $F$ ,  $F \subseteq 2^Q$ , тогда и только тогда, когда для любого  $\alpha \in R$ , существует  $Q' \in F$ , такое, что  $\lim \bar{\varphi}(q_0, \alpha) = Q'$ .

Скажем, что символ  $\alpha(t+1)$  сверхслова  $\alpha = \alpha(1)\alpha(2) \dots \alpha(t+1) \dots$  *угадан* автоматом  $V = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$ , если  $\psi(q_0, \alpha]_t) = \alpha(t+1)$ ,  $t = 1, 2, \dots$

Пусть  $\alpha \in E_k^\infty$ , обозначим  $\sigma_\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} N/n$ , где  $N$  — количество угаданных автоматом  $V$  символов в сверхслове  $\alpha$ . Будем говорить, что  $\sigma_\alpha$  — *степень прогнозирования* сверхслова  $\alpha$  автоматом  $V$ .

Считаем, что множество слов *частично прогнозируемо*, если существует такой автомат, что степень прогнозирования для каждого сверхслова множества строго больше нуля.

Если для состояний  $q', q'' \in Q$  найдется такое слово  $\alpha$  из  $E_k^*$ , что  $\varphi(q', \alpha) = q''$ , то говорят, что состояние  $q''$  *достижимо* из состояния  $q'$ . Считается, что любое состояние достижимо из себя по крайней мере по пустому слову.

В дальнейшем будем считать, что для инициальных автоматов, все состояния автомата достижимы из начального состояния, поскольку если выбросить недостижимые состояния, то выходная функция автомата не изменится.

*Сильно связным множеством* назовем такое множество состояний  $C$ ,  $C \subseteq Q$ , автомата  $V = (E_k, Q, E_k, \varphi, \psi, q_0)$ , что для любых  $q', q'' \in C$  найдется такое слово  $\alpha$  из  $E_k^*$ , что  $\varphi(q', \alpha) = q''$  и  $\bar{\varphi}(q', \alpha) \in C^*$ , то есть по слову  $\alpha$  автомат переходит из состояний  $q'$  в состояние  $q''$ , проходя только состояния из  $C$ . Множество, состоящее из одного состояния, по определению считается сильно связным.

Любое сильно связное множество состояний  $C$  назовем *автоматным циклом*, если  $|C| > 1$ . Одноэлементное множество состояний  $C = \{q\}$  является *автоматным циклом* только если существует символ  $a$  из  $E_k$ ,

что  $\varphi(q, a) = q$ . *Длиной автоматного цикла* назовем число состояний в автоматном цикле.

Тем самым сильно связанное множество отличается от автоматного цикла только тем, что множество, состоящее из одного состояния, у которого нет перехода в себя по какому-либо символу (то есть нет петли), не является автоматным циклом.

Отметим, что если сверхсобытие  $R$  представимо автоматом  $V$  с помощью семейства  $F$ , то любое  $Q'$  из  $F$  — сильно связанное, более того автоматный цикл.

*Состоянием выхода* для автоматного цикла  $C$  назовем такое состояние  $q \in C$ , что существует единственное  $a$ ,  $a \in E_k$ , такое, что  $\varphi(q, a) \in C$ .

*Компонентами* автоматного цикла  $C$  относительно состояния выхода  $q$ , назовем максимальные по включению сильно связанные подмножества множества  $C \setminus \{q\}$ .

Будем говорить, что автоматный цикл  $C$  удовлетворяет *требованиям частичной прогнозируемости*, если у него и любого его подцикла существует хотя бы одно состояние выхода. Далее будем считать, что циклы удовлетворяют требованию частичной прогнозируемости.

Определим некоторый способ задания выходов, то есть способ описания выходной функции  $\psi : Q \times E_k \rightarrow E_k$ . Если посмотреть на диаграмму Мура автомата, то задать выходы значит: в каждом состоянии отметить одну выходящую стрелку. Отмечать стрелки будем следующим образом: если  $\psi(q, a) = b$ , то будем отмечать ребро с выходом  $b$ , выходящее из  $\varphi(q, a)$ . Можно считать наоборот: если у нас отмечено ребро с выходом  $b$ , исходящее из некоторого состояния  $q'$ , то для всех  $q$  и  $a$ , таких что  $\varphi(q, a) = q'$ , присваиваем значение выходной функции  $\psi(q, a) = b$ .

Заметим, что угадывание происходит, когда выход в предыдущий момент времени равен входу в данный момент времени. Поэтому если автомат проходит по отмеченной стрелке, то угадывание происходит.

Если  $q$  является состоянием выхода некоторого автоматного цикла  $C$ , то единственное ребро, исходящее из  $q$  и ведущее в состояние из  $C$ , назовем *ребром возврата*.

Пусть  $V = (E_k, Q, E_k, \varphi, \psi, q)$  — автомат, функция выхода  $\psi$  еще не задана. Пронумеруем состояния автомата. Пусть  $C$  — некоторый автоматный цикл автомата  $V$ , который удовлетворяет требованиям частичной прогнозируемости. Определим некоторый алгоритм разметки ребер, исходящих из состояний цикла  $C$ . Этот алгоритм для каждого состояния из  $C$  будет отмечать одно ребро, исходящее из этого состояния, и

тем самым частично определять выходную функцию  $\psi$ . Обозначим этот алгоритм разметки через  $\mathbb{A}$  и определим его следующим образом.

- 1) Возьмем  $q_0$  — состояние выхода цикла  $C$  с минимальным номером, и отметим ребро возврата, исходящее из  $q_0$ .
- 2) Оставшиеся состояния цикла  $C$  разобьем на компоненты  $K_1, \dots, K_m$  относительно  $q_0$ .
- 3) Для каждого  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , если  $K_i$  — автоматный цикл, то применим к нему рекурсивно алгоритм разметки  $\mathbb{A}$ , если же  $K_i$  состоит из одного состояния, в котором все стрелки ведут из него (то есть нет петли), то отметим ребро, исходящее из этого состояния и ведущее в состояние из  $C$  с минимальным номером.

Назовем разметку *оптимальной* для автоматного цикла  $C$ , если степень угадывания в данном цикле максимальна при данной разметке.

*Путем* в автоматном цикле назовем такое упорядоченное множество состояний  $\{q_0, q_1, \dots, q_n\}$ , что для любого  $i$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , существует  $a \in E_k$  такое, что  $\varphi(q_i, a) = q_{i+1}$ , а для  $i = n$  существует  $b \in E_k$  такое, что  $\varphi(q_n, b) = q_0$ . Обозначать путь будем  $(q_0, q_1, \dots, q_n)^\infty$ . Любому пути соответствует сверхслово, но не наоборот. Заметим, что какое-нибудь слово с наименьшей степенью угадывания для конкретного автоматного цикла всегда задается путем.

**Теорема 1.** *Если применить алгоритм  $\mathbb{A}$  к произвольному автоматному циклу  $C$ , который удовлетворяет требованиям частичной прогнозируемости, то, правильно задавая порядок состояний выхода на каждом шаге и порядок ребер в компонентах единичной длины, можно получить оптимальную разметку.*

**Доказательство.** Пусть автоматный цикл  $C$  удовлетворяет условиям частичной прогнозируемости. Пусть  $\mathcal{B}$  — оптимальная разметка цикла  $C$ . Построим разметку  $\mathcal{B}$  по алгоритму  $\mathbb{A}$ , делая правильный выбор на каждом шаге.

В автоматном цикле  $C$  в каждом автоматном подцикле есть хотя бы одно состояние выхода. Разметка  $\mathcal{B}$  — оптимальная, следовательно, в цикле  $C$  и в каждом подцикле цикла  $C$  отмечено ребро возврата хотя бы в каком-то состоянии выхода, иначе можно будет построить неугадываемое слово, и разметка не будет оптимальной. Пусть  $H$  — множество этих состояний выходов.

Теперь применим алгоритм  $\mathbb{A}$  к циклу  $C$ , за исходное состояние выхода примем состояние  $q$ , которое лежит в  $H$ . Далее, следуя алгоритму,

разобьем оставшиеся состояния цикла  $C$  на компоненты относительно  $q$ , получим ряд автоматных циклов, к которым нужно рекурсивно применить алгоритм  $\mathbb{A}$ . За исходные состояния выходов для этих циклов возьмем те, которые лежат в  $H$  и так далее. Если на каком то шаге появилась компонента с одним состоянием, скажем, что состоянием с минимальным номером будет то, которое было отмечено в оптимальной разметке, отметим его по алгоритму. Тем самым получим оптимальную разметку, используя алгоритм  $\mathbb{A}$ . Теорема доказана.

**Теорема 2.** *Для любого числа  $t$  существует автоматный цикл  $C$  такой, что степень угадывания для разметки цикла  $C$  по алгоритму  $\mathbb{A}$  отличается от оптимальной в  $k$  раз, где  $k > t$ .*

**Доказательство.** Будем строить такую последовательность автоматных циклов  $C_0, C_1, \dots, C_n, \dots$ , что отношение степеней угадывания, полученных при разметках по алгоритмам  $\mathbb{A}$  и  $\mathbb{B}$ , где алгоритм  $\mathbb{B}$  определим позднее, увеличивается.

Рассмотрим автоматный цикл  $C_0$  с начальным состоянием  $q_0$  (рис. 1) и зафиксируем порядок состояний  $\{q_0, q_1, q_2, b_0, b_1\}$ .

Отметим переходы в соответствии с алгоритмом  $\mathbb{A}$  (на рис. 1 пунктирные стрелки) и посчитаем степень частичного угадывания в худшем случае. Очевидно, худшим будет путь  $(q_0, b_0, b_1, q_2)^\infty$  и степень угадывания будет равна  $\frac{1}{4}$ . Обозначим  $z_0 = 4$ .

Теперь рассмотрим тот же цикл  $C_0$ , но изменим, отмеченную в состоянии  $q_0$ , стрелку с 2 на 0 (точечная стрелка на рис. 1). Посчитаем степень угадывания в худшем случае, получим путь  $(q_0, q_1, q_2)^\infty$  и степень равную  $\frac{1}{3}$ . Обозначим  $x_0 = 1, y_0 = 3$ .

Опишем алгоритм построения всех остальных  $C_i$ :

- 1) Возьмем автоматный цикл  $C_0$ , подставим вместо  $b_0$  и  $b_1$  автоматные циклы  $C_{i-1}$ , полученные множества состояний обозначим  $C_{i-1}^{b_0}$  и  $C_{i-1}^{b_1}$ , а их состояния обозначим также как и в  $C_{i-1}$ , только с верхними индексами  $b_0$  и  $b_1$ .
- 2) Стрелки, ведущие в  $b_0$  в цикле  $C_0$ , направим в состояние  $q_0^{b_0}$ . Стрелки, выходящие из  $C_{i-1}^{b_0}$ , направим в состояние  $q_0^{b_1}$ , а стрелки, выходящие из  $C_{i-1}^{b_1}$ , направим в состояние  $q_2$ .

У каждого  $C_i$  существует ровно одно состояние выхода —  $q_2$ , а подциклы  $C_{i-1}^{b_0}$  и  $C_{i-1}^{b_1}$  представляют собой компоненты  $C_i$  относительно состояния  $q_2$ . Отсюда следует, что разметка по алгоритму  $\mathbb{A}$  циклов  $C_{i-1}^{b_0}$ ,  $C_{i-1}^{b_1}$  и  $C_{i-1}$  совпадает.



шего пути по алгоритму  $\mathbb{B}$ ,  $x_1 = 2$  — число угадываний за один период худшего пути.

Заметим, что степень угадывания на  $i$ -ом шаге для худшего случая с разметкой по алгоритму  $\mathbb{A}$  получается по формуле  $\frac{1}{2z_{i-1}+2}$ . Так как в худшем случае будет ровно 1 угадывание в состоянии  $q_2$ , а всего мы пройдем один период худшего пути в  $C_{i-1}^{b_0}$ , один период худшего пути в  $C_{i-1}^{b_1}$ , шаг из  $C_{i-1}^{b_1}$  в  $q_2$  и шаг из  $q_0$  в  $C_{i-1}^{b_0}$ .

Соответственно, степень угадывания на  $i$ -ом шаге для худшего случая с разметкой по алгоритму  $\mathbb{B}$  получается по формуле  $\frac{2x_{i-1}}{2y_{i-1}+2}$ . Знаменатель такой, потому что всего мы пройдем один период худшего пути в  $C_{i-1}^{b_0}$ , один период худшего пути в  $C_{i-1}^{b_1}$ , шаг из  $q_0$  в  $C_{i-1}^{b_0}$  и шаг из  $C_{i-1}^{b_1}$  в  $q_2$ . Числитель же равен  $2x_{i-1}$ , потому что всего угадываний будет столько, сколько было в  $C_{i-1}^{b_0}$  и в  $C_{i-1}^{b_1}$  минус 2 угадывания в состояниях  $q_2^{b_0}$  и  $q_2^{b_1}$  и плюс два в состояниях  $q_0$  и  $q_2$ .

На каждом шаге  $i$  разница степеней угадывания по алгоритмам  $\mathbb{A}$  и  $\mathbb{B}$  задается отношением  $\frac{x_i z_i}{y_i}$ . Если мы докажем, что с каждым шагом эта разница возрастает, то теорема будет доказана.

$$\frac{x_i z_i}{y_i} \geq \frac{2x_i(2z_i + 2)}{2y_i + 2},$$

$$\frac{z_i}{y_i} < \frac{2(z_i + 1)}{(y_i + 1)}.$$

Таким образом отношение между степенями угадывания по алгоритмам  $\mathbb{A}$  и  $\mathbb{B}$  увеличивается с каждым шагом, а значит для любого числа  $m$ , найдется такой шаг  $j$ , что на автоматном цикле  $C_j$  степени угадывания для разметок по алгоритмам  $\mathbb{A}$  и  $\mathbb{B}$  будут отличаться в  $k > m$  раз. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность профессору Э. Э. Гасанову и доценту А. А. Мاستихиной за постановку задачи и помощь в работе.

## Список литературы

- [1] Вереникин А. Г., Гасанов Э. Э. Об автоматной детерминизации множеств сверхслов // Дискретная математика. — 2006. — Т. 18, вып. 2. — С. 84–97.
- [2] Мاستихина А. А. О частичном угадывании сверхслов // Интеллектуальные системы. — 2007. — Т. 11, вып. 1–4. — С. 561–572.

- [3] Мастихина А. А. Критерий частичного предвосхищения общерегулярных сверхсобытий // Дискретная математика. — 2011. — Т. 23, вып. 4 — С. 103–114.
- [4] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. — М.: Наука, 1985.
- [5] Гасанов Э. Э., Мастихина А. А. Прогнозирование общерегулярных сверхсобытий автоматами // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2015. — Т. 19, вып. 2. — С. 127–154.
- [6] Гасанов Э. Э. Прогнозирование периодических сверхсобытий автоматами // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2015. — Т. 19, вып. 1. — С. 23–34.