

О книге «Алгебраические системы автоматов» [52]

С. В. Алешин (МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва)

Рассматриваются алгебраические системы, элементами которых являются отображения, реализуемые конечными автоматами. По богатству примеров и выразительности средств автоматы порой не уступают классическим алгебраическим системам. Полугруппы, группы, кольца, а также функциональные системы автоматов позволили решить ряд трудных математических проблем. Эти конструкции приводятся в книге наряду с примерами конкретных автоматов. Книга предназначена студентам, аспирантам, преподавателям и научным сотрудникам.

Ключевые слова: конечный автомат, алгебраическая система, группа, функциональная система.

Считается, что начало широкому потоку исследований конечных автоматов и их обобщений положили работы Э. Мура и С. Клини [1].

Автомат является ядром каждого алгоритма, например, управляющая головка машины Тьюринга — это конечный автомат с входом и выходом, так что изучение автоматов началось с момента появления работ по теории алгоритмов. Можно сказать, что реализация любого алгоритма связана с построением соответствующего конечного автомата.

Исследования по теории автоматов параллельно развивали направления, связанные, с одной стороны, с изучением языков, представимых в автоматах, регулярных (в смысле Клини) множеств, а с другой — с рассмотрением отображений множества слов во входном алфавите во множество слов в выходном алфавите, которые реализуются автоматами.

В данной книге в основном речь идет об автоматных отображениях. В первой главе рассматриваются одноместные автоматные функции. Если зафиксировать конечный алфавит A и рассмотреть множество инициальных автоматов, у которых A является входным и выходным алфавитом, то на этом множестве можно определить операцию «умножения» —

суперпозицию автоматных отображений. Операция последовательного соединения (суперпозиции), очевидно, ассоциативна, и с алфавитом A связана, таким образом, полугруппа AP_n (здесь n — мощность алфавита A) — полугруппа автоматных отображений. В состояниях автоматов из полугруппы AP_n реализуются подстановки из полугруппы P_n подстановок на алфавите A . Эта полугруппа содержит в себе группу автоматных подстановок AS_n . В состояниях автоматов из группы AS_n реализуются перестановки из симметрической группы S_n перестановок на алфавите A . Изучению многообразных и интересных свойств этих полугрупп и групп посвящена первая глава.

В кратком обзоре приведены первые теоремы о полугруппах и группах автоматов — результаты 50-х–60-х годов (Э. Мур, Дж. Рэни, Хореш, Б. Чакань, Ф. Гечег, В. П. Заровный). Начиная с §3, излагаются результаты автора, доказывается теорема об отсутствии базиса в полугруппе AP_n .

С каждым автоматом можно связать полугруппу отображений, порожденную его инициальными подавтоматами. Примеры таких групп разбираются в §4. Автоматы предоставляют большое разнообразие групп даже при малом числе состояний, например, если каждому автомату с тремя состояниями сопоставить группу, то получится 122 неизоморфных группы. Один из этих автоматов порождает свободную группу. В §5 рассмотрен еще один пример свободной группы, которая порождена двумя автоматами с тремя состояниями.

В следующем разделе рассказывается о решении проблемы Бернсайда для периодических групп средствами теории автоматов. Приведены два автомата с тремя и восьмью состояниями, соответственно, порождающие бесконечную периодическую группу. Этот пример стал впоследствии источником многих других примеров.

Одной из интересных и до сих пор нерешенных проблем в теории автоматов является проблема порядка элемента в группе автоматных подстановок. В §7 изложены некоторые продвижения в решении этой задачи, в частности, решение для абелевых групп. Первая глава завершается теоремой о структуре группы линейных автоматов.

Во второй главе рассматриваются автоматные функции многих переменных. Теперь автоматы могут иметь несколько входов, на которые подаются буквы входного алфавита. Определив операции суперпозиции и обратной связи, получаем функциональные системы, элементами которых являются многоместные автоматные отображения — ограниченно-детерминированные функции многих переменных. Вторая глава начина-

ется с напомнимания первых теорем о свойствах таких функций. В обзоре первых результатов по проблеме выразимости в системах автоматных функций многих переменных приведена работа В. Б. Кудрявцева, в которой он построил пример функциональной системы с бесконечным множеством предполных классов и алгоритмически разрешимой проблемой полноты конечных систем.

В §11 приведена теорема о s -полных системах функций, построенные в ней системы используются во многих конструкциях второй главы. Далее рассматривается класс функций $P(1)$ многих переменных, реализуемых автоматами, у которых в каждом состоянии выходная функция зависит от одной переменной. Доказывается существование алгоритма, который для конечной системы функций $S \in AP_2$ проверяет полноту системы $\{P(1) \cup S\}$. В то же время оказывается, что существует континуальное семейство предполных классов, каждый из которых содержит $P(1)$.

В §4 приводится доказательство теоремы Д. Н. Бабина о полноте относительно суперпозиции множество α -функций двух переменных. Задачи выразимости и декомпозиции тесно связаны, и декомпозиции автоматов посвящен §13. Здесь приводятся теоремы, которые позволяют расширить класс систем α -функций, применяемых для построения полных систем. В отличие от оператора композиции, когда имеются операции суперпозиции и обратной связи, оператор суперпозиции может порождать такие замкнутые классы, которые не содержатся ни в одном из максимальных классов. Пример такого класса был указан Д. Н. Бабиным.

Третья глава отражает связь теории автоматов с теорией чисел. Представления числовых колец автоматными функциями получаются, если рассмотреть p -адические автоматы, а в качестве операций в этих кольцах также использовать автоматы. Входные последовательности автоматов можно рассматривать как p -адические (целые) числа. Из автомата-сумматора p -адических чисел с помощью суперпозиции и обратной связи получается класс линейных p -адических автоматов, вычисляющих линейные функции. Структура внутренних полугрупп одноместных p -адических автоматов рассматривается в §15. Множество p -адических автоматов образует кольцо, изоморфное кольцу рациональных чисел, знаменатели которых не делятся на p .

Это дает возможность построить представление кольца матриц, элементы которых являются рациональными числами. При этом строится представление кольца целочисленных матриц и, в частности, свободной группы матриц. На этом пути возникает возможность с помощью ав-

томатных отображений изучить широкий круг алгебраических систем. Таким образом, в книге приводятся первые теоремы теории автоматов, относящиеся к данному направлению, а далее излагаются, в основном, результаты автора, полученные им начиная с 1965 года. В книгу также включен ряд результатов учеников автора.

На начальном этапе развития теории автоматных отображений главное внимание уделялось «внутренним» вопросам теории автоматов — в основном, задачам выразимости в функциональных системах. Алгебраическая тематика, задачи из теории групп и других алгебраических систем начали активно решаться после появления работы [13], посвященной проблеме Бернсайда о периодических группах. Со временем выяснилось, что по богатству примеров и выразительности средств автоматы порой не уступают классическим алгебраическим системам. Изучение алгебраических систем автоматов в последние десятилетия приобрело новую динамику, ряд результатов нами упомянут в Заключении.

Список литературы

- [1] Автоматы / Сборник статей под ред. К. Э. Шеннона, Дж. Маккарти. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1956.
- [2] Глушков В. М. Абстрактная теория автоматов // Успехи матем. наук. — 1961. — Т. 16, № 6 (101). — С. 3–62.
- [3] Кудрявцев В. Б. Теорема полноты для одного класса автоматов без обратных связей // Сб. «Проблемы кибернетики». — М.: Наука, 1962. — Вып. 8. — С. 91–115.
- [4] Кудрявцев В. Б. О мощностях множеств предполных множеств некоторых функциональных систем, связанных с автоматами // Сб. «Проблемы кибернетики». — М.: Наука, 1965. — Вып. 13. — С. 45–74.
- [5] Кудрявцев В. Б., Алёшин С. В., Подколзин А. С. Элементы теории автоматов. — М.: Изд-во МГУ, 1978.
- [6] Кудрявцев В. Б., Алёшин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. — М.: Наука, 1985.
- [7] Algebraic Theory of Machines // Languages and Semigroups. — NY: Academic Press, 1968. (русский перевод: Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп / Под ред. М. А. Арбиба. — М.: Статистика, 1975.)
- [8] Чакань Б., Гечег Ф. О группе автоматных подстановок // Кибернетика. — 1965. — № 5. — С. 14–17.

- [9] Заровный В. П. Автоматные подстановки и сплетения групп // ДАН СССР. — 1965. — Т. 160, № 3. — С. 128–144.
- [10] Бувевич В. А. Построение универсальной о.-д. функции от двух переменных // Сб. «Проблемы кибернетики». — М.: Наука, 1970. — Вып. 22.
- [11] Алёшин С. В. О суперпозициях автоматных отображений // Кибернетика. — 1975. — № 1. — С. 29–34.
- [12] Алёшин С. В. Об отсутствии базисов в некоторых классах инициальных автоматов // Сб. «Проблемы кибернетики». — М.: Наука, 1970. — Вып. 22. — С. 33–58.
- [13] Алёшин С. В. Конечные автоматы и проблема Бернсайда о периодических группах // Матем. заметки. — 1972. — Вып. 3. — С. 56–78.
- [14] Алёшин С. В. Об одном следствии теоремы Крона-Роудза // Дискрет. матем. — 1999. — Т. 11, Вып. 4. — С. 31–37.
- [15] Алёшин С. В. Автоматное представление свободной группы // Дискрет. матем. — 2011. — Т. 23, Вып. 3. — С. 32–56.
- [16] Алёшин С. В. Свободная группа конечных автоматов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1983. — Вып. 4. — С. 12–14.
- [17] Алёшин С. В. Автоматы в алгебре и алгебра в теории автоматов // Современные проблемы математики и информатики. — 2009. — Т. 1, № 1.
- [18] Алёшин С. В., Пантелеев П. А. Конечные автоматы и числа // Дискрет. матем. — 2015. — Т. 27, Вып. 4. — С. 3–20.
- [19] Мерзляков Ю. И. О бесконечных конечно-порожденных периодических группах // ДАН СССР. — 1983. — Т. 268, № 4. — С. 803–805.
- [20] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. — М.: Наука, 1982.
- [21] Суцанский В. И. Периодические p -группы подстановок и неограниченная проблема Бернсайда // ДАН СССР. — 1979. — Т. 247, № 3. — С. 557–561.
- [22] Григорчук Р. И. К проблеме Бернсайда о периодических группах // Функци. анализ и его прил. — 1980. — Т. 14, Вып. 1. — С. 53–54.
- [23] Gupta N., Sidki S. Some infinite p -groups // Алгебра и логика. — 1983. — Т. 22, № 5. — С. 584–589.
- [24] Рожков А. В. К теории групп алёшинского типа // Матем. заметки. — 1986. — Т. 40, № 5. — С. 122–131.

- [25] Рожков А. В. Условия конечности в группах автоморфизмов деревьев // Алгебра и логика. — 1998. — Т. 37, № 5. — С. 568–605.
- [26] Рожков А. В. О подгруппах бесконечных конечно порожденных r -групп // Матем. сб. — 1986. — Т. 129 (171), № 3. — С. 422–433.
- [27] Рожков А. В. Проблема сопряженности в одной группе автоморфизмов бесконечного дерева // Матем. заметки. — 1998. — Т. 64, Вып. 4. — С. 592–597.
- [28] Zuk A. Groupes engendrés par les automates // Séminaire Bourbaki, Astérisque. — 2008. — V. 317. — P. 141–174.
- [29] Бабин Д. Н. О полноте двухместных о.-д. функций относительно суперпозиции // Дискрет. матем. — 1989. — Т. 1, Вып. 4. — С. 86–91.
- [30] Бабин Д. Н. Простые автоматы в задаче полноты относительно суперпозиции // Интеллектуальные системы. — 2013. — Т. 17, вып. 1–4. — С. 147–148.
- [31] Бабин Д. Н. Классификация автоматных базисов Поста по разрешимости свойств полноты и A -полноты (часть вторая). — М.: Макс Пресс, 2011.
- [32] Летичевский А. А. Условия полноты для конечных автоматов // Вычисл. матем. и матем. физ. — 1961. — Т. 1, № 4. — С. 702–710.
- [33] Часовских А. А. Об алгоритмической разрешимости проблемы полноты для линейных автоматов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1985. — Вып. 2. — С. 47–61.
- [34] Малыгин В. И. О некоторых пространствах, связанных с композициями автоматов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1988. — Вып. 4. — С. 88–90.
- [35] Bondarenko I., Grigorchuk R., Kravchenko R., Muntyan Y., Nekrashevych V., Savchuk D., Šunic Z. On classification of groups generated by 3-state automata over a 2-letter alphabet // Algebra and Discrete Math. — 2008. — № 1. — P. 1–163.
- [36] Vorobets M., Vorobets Y. On a free group of transformation defined by an automaton // Geom. Dedicata. — 2007. — V. 124. — P. 237–249.
- [37] Макаров В. В. О группах автоматных подстановок // Фундамент. и прикл. матем. — 1996. — Т. 2, Вып. 1. — С. 171–186.
- [38] Родин А. А. О континуальности множества специальных предполных классов во множестве автоматных отображений // Интеллектуальные системы. — 2012. — Т. 16, вып. 1–4. — С. 329–334.

- [39] Летуновский А. А. О выразимости суперпозициями групповых автоматов Медведева // Интеллектуальные системы. — 2013. — Т. 17, вып. 1–4. — С. 179–181.
- [40] Виноградов И. В. К вопросу о порядках элементов группы автоматных подстановок // Интеллектуальные системы. — 2013. — Т. 17, вып. 1–4. — С. 154–162.
- [41] Бокк Н. Г. О порядке элемента в группе автоматных подстановок // Интеллектуальные системы. — 2012. — Т. 16, вып. 1–4. — С. 275–290.
- [42] Лунц А. Г. P -адический аппарат теории конечных автоматов // Сб. «Проблемы кибернетики». — М.: Наука, 1965. — Вып. 14.
- [43] Anashin V. The Non-Archimedean Theory of Discrete Systems // Mathematics in Computer Science. — 2012. — V. 6, № 4. — P. 395–393.
- [44] Lavrenyuk Y., Mazorchuk V., Oliynyk A., Sushansky V. On braid groups acting on rooted trees and related constructions // Uppsala University Report. — 2005. — V. 7.
- [45] Akhavi A., Klimann I., Lombardy S., Mairesse J., Picantin M. On the Finiteness Problem for Automaton (Semi)groups // International Journal of Algebra and Computation. — 2012. — V. 22, № 6.
- [46] Gillbert P. The finiteness problem for automaton semigroups is undecidable // arXiv: 1304.2295v2. — 2014.
- [47] Курош А. Г. Теория групп. — М.: Наука, 1967.
- [48] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. — М.: Мир, 1980.
- [49] Кон П. Универсальная алгебра. — М.: Мир, 1968.
- [50] Прахар К. П. Распределение простых чисел. — М.: Мир, 1967.
- [51] Марченков С. С. Об одном методе анализа суперпозиций непрерывных функций // Сб. «Проблемы кибернетики». — М.: Наука, 1980. — Вып. 37. — С. 5–17.
- [52] Алешин С. В. Алгебраические системы автоматов. — М.: МАКС Пресс, 2016.