О проблеме стабилизации булевых сетей

Ю. С. Шуткин (МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва)

В данной работе рассматривается проблема стабилизации булевых сетей, а именно, вопрос наличия точечных аттракторов в асинхронной булевой сети. Найден критерий стабилизации в зависимости от выбора компонент булевой сети: граф, булевы функции, начальное состояние, порядок обновления.

Ключевые слова: булевы сети, стабилизация.

Введение

Исследование биологических сетей имеет важное место в биоинформатике, системной биологии и алгебраической биологии. Одной из многочисленных математических моделей биологических сетей являются булевы сети. Впервые булевы сети рассмотрены Стюартом Кауффманом в 1969 году [1], как случайная модель регулярной генной сети, которая в свою очередь является частным случаем клеточного автомата. В данной работе рассматривается проблема стабилизации булевых сетей, а именно, вопрос наличия точечных аттракторов в булевой сети.

Основные понятия

Булева сеть N — ориентированный псевдограф G, который определяется конечным набором вершин $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, множеством ребер E, начальным состоянием вершин $\mathbf{v}(0)$ и набором булевых функций $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, приписанных этим вершинам соответственно. При этом количество аргументов функции, приписанной каждой вершине, в точности равно количеству ребер, входящих в эту вершину, и установлено соответствие между входящими ребрами и аргументами функции путем нумерации входящих ребер от 1 до k, где k — степень входа вершины.

Обозначим через v_i^t *состояние*(значение) *вершины* v_i в момент времени t, которое может быть равно либо 0, либо 1.

Состоянием или *траекторий* T булевой сети в момент времени t будем называть вектор $\mathbf{v}(t) = (v_1^t, v_2^t, \ldots, v_n^t)$. Начальное состояние булевой сети N задается вектором $\mathbf{v}(0)$.

Дадим определение *асинхронной булевой сети.* В каждый момент времени, выбирается одна вершина, и она может быть обновлена, а все остальные не меняют свое значение. За промежуток времени равный n, каждая вершина должна обновиться ровно один раз. Состояние v_i в момент времени $t+1$ может быть найдено, как

$$v_i^{t+1} = \begin{cases} f_i(v_{i_1}^t, v_{i_2}^t, \ldots, v_{i_k}^t), & \text{если выбрана для обновления } v_i; \\ v_i^t, & \text{иначе;} \end{cases}$$

где $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$ — набор вершин, из которых ведут ориентированные ребра в v_i, записанных в той последовательности, в какой от них зависит функция f_i, а k — степень входа вершины v_i.

Булеву сеть V будем называть стабильной, если ее траектория $T(t)$ не зависит от времени $t \geqslant M_0$ при некотором M_0. Ориентированное *ребро* (v_i, v_j) булевой сети N называется *несущественным*, если f_j не зависит от значения вершины v_i.

Порядком D булевой сети V назовем последовательность, состоящую из n вершин, расставленных в ней в той очередности, в какой обновлялась булева сеть в первые n моментов времени.

Пусть $\omega \in \{0,1\}^n$ — состояние булевой сети и $R(\omega)$ — всевозможные состояния, которые могут быть достигнуты, начиная с ω. Тогда множество состояний S называется *аттрактором* булевой сети, если $R(\omega) = S$ для любого $\omega \in S$. S называется *точечным аттрактором*, если $|S| = 1$, и называется *циклическим аттрактором* в случае $|S| > 1$.

Основные результаты

Пусть имеется 4 степени свободы при построении булевой сети: булев псевдограф, булева функция, начальные значения, порядок. Тогда делая выбор в этой вышеуказанной четверке необходимо добиться, чтобы булева сеть была стабильной. Считаем, что если мы не выбираем какую-то из степеней свободы, она может быть фиксирована произвольным образом (в том числе и наихудшим образом). Назовем эти условия У1.

Теорема 1. *Пусть фиксирован класс булевых функций $M = P_2 \backslash \{0,1\}$. Тогда, если мы находимся в условиях У1, можно гарантировать, что сеть будет стабильной в том и только в том случае, если позволено* *выбирать булевы функции из M, а также одну из следующих степеней свободы булевой сети: булев граф, начальные значения или порядок.*

Теорема 2. *Пусть фиксирован класс булевых функций $M = P_2$. Тогда если мы находимся в условиях У1 можно гарантировать, что сеть будет стабильной в том и только в том случае, если позволено выбирать булевы функции из M или булев граф.*

Теперь модифицируем исходные условия следующим образом.

Пусть у нас имеется также 4 степени свободы: булев граф, булева функция, начальные значения, порядок. Тогда, делая выбор в этой вышеуказанной четверке, необходимо добиться, чтобы булева сеть была стабильной. Также будем считать, что на сей раз в отличие от предыдущей задачи, порядок и начальные значения могут генерироваться случайным образом. Положим также, что если мы не выбрали какую-то из степеней свободы, и она не выбрана случайным образом, она может быть фиксирована произвольным образом (в том числе наихудшим для нас образом). Назовем эти условия У2.

Теорема 3. *Пусть фиксирован класс булевых функций $M = P_2 \backslash \{0, 1\}$. Тогда если мы находимся в условиях У2, можно гарантировать, что сеть будет стабильной, если позволено выбирать булевы функции из M, а также одну из следующих степеней свободы булевой сети: булев граф, начальные значения и порядок, в остальных случаях нельзя гарантировать, что сеть будет стабильной с какой-либо вероятностью большей 0.*

Список литературы

[1] Kauffman S. A. Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets // Journal of Theoretical Biology. — 1969. — N. 22 — P. 437—467.