Операторы параметрического и позитивного замыкания на множестве гиперфункций ранга 2

Л. В. Рябец (Иркутский государственный университет)

Одним из направлений исследования дискретных функций является исследование функциональных систем: множеств функций и множеств операторов, заданных над этими функциями. В частности, активно изучаются функциональные системы, в которых в отличие от классических над множеством k-значных функций, рассматриваются обобщения функций k-значной логики: частичные функции, мультифункции и гиперфункции. Гиперфункции представляют собой функции, заданные на конечном множестве A и принимающие в качестве своих значений все непустые подмножества множества A относительно оператора суперпозиции. Кроме оператора суперпозиции интерес представляют более сильные операторы замыкания, дающие нетривиальную классификацию функций. Например, для гиперфункций ранее получен критерий полноты для оператора разветвления по предикату равенства. Также известными сильными операторами являются оператор параметрического и позитивного замыкания. Для них известны все замкнутые классы на множестве булевых функций.

Ключевые слова: замыкание, параметрическое замыкание, гиперфункция, критерий полноты, суперпозиция.

Наряду с классическими функциональными системами, в которых множеством P является множество функций k-значной логики, достаточно давно изучаются и функциональные системы, где рассматриваются обобщения функций k-значной логики: частичные функции, мультифункции и гиперфункции — функции, заданные на конечном множестве A и принимающие в качестве своих значений все непустые подмножества множества A относительно оператора суперпозиции (см, например, [3, 7]).

Кроме оператора суперпозиции используются операторы замыкания, которые существенно сильнее. В работе [6] исследовалось действие оператора замыкания с разветвлением по предикату равенства для множества гиперфункций на двухэлементном множестве.

В работах [1, 2] было дано понятие параметрической выразимости и определение оператора параметрического замыкания. Оператор позитивного замыкания рассматривался в работе [5]. Подробное описание параметрически и позитивно замкнутых классов булевых функций представлено в работе [4].

В данной работе исследуется действие операторов параметрического и позитивного замыкания на множестве гиперфункций ранга 2. В терминах параметрически замкнутых классов устанавливается критерий полноты в классе P_2^-. Найдены все 13 параметрически замкнутых классов, из них предполными являются два класса. Для оператора позитивного замыкания найден предполный замкнутый класс.

Пусть A — конечное множество, тогда 2^A — множество всех подмножеств множества A и $|A|$ — его мощность. Определим P_2^- — множество всех гиперфункций ранга 2 следующим образом:

$$P_{2,n}^- = \left\{ f \mid f : E_2^n \to 2^{E_2} \setminus \{\varnothing\} \right\},\ P_2^- = \bigcup_n P_{2,n}^-.$$

Не будем различать множество из одного элемента и элемент этого множества. Для множества E_2 будем использовать обозначение «$-$» (прочерк). Иногда под прочерком будем понимать гиперфункцию, которая на любом своем наборе принимает значение прочерк.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m)$ — гиперфункции. Суперпозиция $f(f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m))$ определяет гиперфункцию $g(x_1, \ldots, x_m)$ следующим образом: если набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in E_2^m$, то по определению

$$g(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \bigcup_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)} f(\beta_1, \ldots, \beta_n).$$

Пусть $Q \subseteq P_2^-$. Замыканием $[Q]$ множества Q называется множество всех гиперфункций из P_2^-, которые можно получить из Q с помощью операций введения фиктивных переменных, отождествления переменных и суперпозиции.

Символами языка Par являются переменные $x_1, x_2, \ldots, x_i$, символы f_i для обозначения гиперфункций, символ включения $\subseteq$, логическая связка конъюнкция &, квантор существования $\exists$, левая и правая скобки, запятая.

Понятие терма вводится следующим образом:

- любая переменная есть терм;
- если $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ — переменные (не обязательно различные), а f_j — символ n-местной гиперфункции, то $f_j(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ есть терм;
- если $t_1, \ldots, t_m$ — термы, f_i — символ m-местной гиперфункции, то $f_i(t_1, \ldots, t_m)$ есть терм.

Всякий терм t языка Par определяет некоторую гиперфункцию h. Если $f_1, \ldots, f_m$ — символы функций, входящие в терм t, то будем говорить, что терм t выражает функцию h через функции $f_1, \ldots, f_m$.

Если t_1, t_2 — термы языка Par, то выражение $(t_1 \subseteq t_2)$ называется элементарной формулой. Остальные формулы определяем следующим образом: если Φ_1, Φ_2 — формулы, а x_i — переменная, то $(\Phi_1 \& \Phi_2)$, $(\exists x_i)\Phi_1$ — формулы языка Par (параметрические формулы).

Пусть $Q \subseteq P_2^-$, $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2^-$, $\Phi(x_1, \ldots x_n, y)$ — формула языка Par со свободными переменными $x_1, \ldots x_n, y$, все функциональные символы которой являются обозначениями функций из $[Q]$. Будем говорить, что формула Φ параметрически выражает функцию f через функции множества Q, если множества истинности формулы Φ и отношения $y \subseteq f(x_1, \ldots, x_n)$ совпадают. Множество всех функций, параметрически выразимых через функции множества Q, назовем параметрическим замыканием множества Q и обозначим $\mathrm{Par}[Q]$. Множество Q, которое совпадает со своим параметрическим замыканием, называется параметрически замкнутым классом.

В [4] показано, что система булевых функций $\{0, 1, \vee, \&\}$ параметрически полна в классе P_2. Для множества гиперфункций ранга 2 справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. *Система гиперфункций* $\{0, 1, \vee, \&\}$ *параметрически полна в классе* P_2^-.

В силу того, что любая тождественно истинная параметрическая формула, например $x \subseteq x \ \& \ y \subseteq y$, определяет отношение $y \subseteq (--)$, каждый параметрически замкнутый класс гиперфункций содержит гиперфункцию $(--)$.

Определим класс S^- — множество гиперфункций, которые на любой паре противоположных наборов могут принимать либо противоположные значения $(0, 1)$ и $(1, 0)$, либо прочерки $(-, -)$. Для него справедлива лемма.

Лемма 1. *Класс* S^- *является параметрически замкнутым.*

Пусть L^- — множество всех линейных булевых функций в объединении с функцией прочерк. Аналогичным образом в соответствии с обозначениями классов булевых функций из [4] определим множества

$$L_0^-,\ L_1^-,\ SL^-,\ L_{01}^-,\ U^-,\ SU^-,\ MU^-,\ U_0^-,\ U_1^-,\ U_{01}^-.$$

Лемма 2. *Пусть $Q \subseteq L^-$ — замкнутый относительно операции суперпозиции класс гиперфункций и $(-) \in Q$. Тогда Q — параметрически замкнутый класс.*

Для оператора параметрического замыкания на множестве гиперфункций ранга 2 справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Система гиперфункций из P_2^- параметрически полна в классе P_2^- тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из классов S^-, L^-.*

Теорема 2. *Существует ровно 13 параметрически замкнутых классов гиперфункций:*

$$P_2^-,\ S^-,\ L^-,\ L_0^-,\ L_1^-,\ SL^-,\ L_{01}^-,\ U^-,\ SU^-,\ MU^-,\ U_0^-,\ U_1^-,\ U_{01}^-.$$

Определим гиперфункцию $d_3(x_1, x_2, x_3) = (00010111)$. Для нее справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. *Любую гиперфункцию из класса S^- можно параметрически выразить с помощью функции d_3, то есть $\mathrm{Par}[d_3] = S^-$.*

Введем понятие оператора позитивного замыкания. Язык Pos позитивного замыкания получается из языка параметрического замыкания добавлением логической связки $\vee$. Понятие терма в языке Pos совпадает с понятием терма в языке Par. Понятие формулы в языке Pos расширяется новым соотношением: если Φ_1, Φ_2 — формулы языка Pos, то $\Phi_1 \vee \Phi_2$ также формула языка Pos.

В силу определения всякий позитивно замкнутый класс является параметрически замкнутым классом.

Рассмотрим следующую последовательность позитивных формул.

Формулы

$$\Phi_1(x_1, x_2, y) = x_1 \subseteq y \vee x_2 \subseteq y$$
$$\Phi_2(x_1, x_2, y) = x_1 \subseteq x_2 \vee x_1 \subseteq y$$

определяют отношения $y \subseteq (0 - -1)$ и $y \subseteq (-01-)$ соответственно.

Формула

$$\Phi_3(x_1, x_2, y) = (-01-)(x_1, x_2) \subseteq (0--1)(x_2, y)$$

определяет отношение $y \subseteq (1010)$.

Таким образом, получили функцию $\overline{x}$. Построим на ее основе позитивную формулу

$$\Phi_4(x_1, x_2, x_3, y) = x_1 \subseteq y \vee x_2 \subseteq \overline{x}_3,$$

определяющую отношение $y \subseteq (0--01--1)$. Пусть $g(x_1, x_2, x_3) = (0--01--1)$. Тогда

$$\Phi_5(x_1, x_2, x_3, y) = g(x_1, x_1, x_2) \subseteq y \vee g(x_1, x_3, y) \subseteq \overline{x}_2$$

определяет отношение $y \subseteq d_3(x_1, x_2.x_3)$.

Теорема 3. *Система гиперфункций из P_2^- позитивно полна в классе P_2^- тогда и только тогда, когда она целиком не содержится в классе S^-.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 16–31–00209 мол_а.

Список литературы

[1] Данильченко А. Ф. О параметрической выразимости функций трехзначной логики // Алгебра и логика. — 1977. — Т. 16, вып. 4. — С. 397–416.

[2] Кузнецов А. В. О средствах для обнаружения невыводимости и невыразимости // Логический вывод. — М.: Наука, 1979. — С. 5–33.

[3] Ло Джукай. Максимальные замкнутые классы в множестве частичных функций многозначной логики // Кибернетический сборник. Новая серия. — М.: Мир, 1988. — Вып. 25. — С. 131–141.

[4] Марченков С. С. Замкнутые классы булевых функций. — М.: Физматлит, 2000.

[5] Марченков С. С. О выразимости функций многозначной логики в некоторых логико-функциональных языках // Дискрет. математика. — 1999. — Т. 11, вып. 4. — С. 110–126.

[6] Пантелеев В. И., Рябец Л. В. Оператор замыкания с разветвлением по предикату равенства на множестве гиперфункций ранга 2 // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. — 2014. — Т. 10. — С. 93–105.

[7] Тарасов В. В. Критерий полноты для не всюду определенных функций алгебры логики // Проблемы кибернетики. — М.: Наука, 1975. — Вып. 30. — С. 319–325.