

Об аналитическом представлении числа булевских решений линейного уравнения многих переменных с целыми коэффициентами

М. В. Носов (МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва)

В статье представлены исследования задачи представления числа булевских решений линейного уравнения многих переменных с целыми коэффициентами, как функции от двоичного разложения этих коэффициентов.

Ключевые слова: уравнение в целых числах, двоичное разложение.

Линейное уравнение с булевыми переменными заменой части переменных, с отрицательными коэффициентами на противоположные, сводится к линейному уравнению с положительными коэффициентами. Поэтому изначально полагается, что уравнение имеет вид

$$\begin{aligned}a_1x_1 + \dots + a_mx_m &= a_0, \\ a_1 \dots a_m, a_0 &\in Z, \\ a_j &\geq 0, j = 0, 1, \dots, m, \\ x_j &\in \{0, 1\}, j = 1, \dots, m.\end{aligned}$$

Имеет место двоичное разложение каждого коэффициента

$$\begin{aligned}a_j &= q_{j1}2^{n-1} + \dots + q_{jn-1}2 + q_{jn}, \\ q_{jk} &\in \{0, 1\}, j = 0, 1, \dots, m, k = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Задача состоит в представлении числа решений уравнения $K(a_1, \dots, a_m, a_0)$, как функции от переменных q_{jk} , $j = 0, 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$. Представим число решений формулой и произведем ее преобразование

$$\begin{aligned}
K(a_1, \dots, a_m, a_0) &= \int_0^1 \left(\sum_{\beta, \beta \subseteq \{1, \dots, m\}} \exp \left(2\pi \left(\sum_{j, j \in \beta} a_j - a_0 \right) it \right) \right) dt = \\
&= \int_0^1 \sum_{\substack{\beta, \\ (\beta \subseteq \{1, \dots, m\})}} \exp \left(2\pi \left(\sum_{j, j \in \beta} \left(\sum_{l=1}^n q_{jl} 2^{n-l} \right) - \sum_{l=1}^n q_{0l} 2^{n-l} \right) it \right) dt = \\
&= \int_0^1 \sum_{\substack{\beta, \\ (\beta \subseteq \{1, \dots, m\})}} \prod_{j, j \in \beta} \left(\prod_{l=1}^n e^{2\pi q_{jl} 2^{n-l} it} \right) \left(\prod_{l=1}^n e^{-2\pi q_{0l} 2^{n-l} it} \right) dt = \\
&= \int_0^1 \sum_{\substack{\beta, \\ (\beta \subseteq \{1, \dots, m\})}} \prod_{j, j \in \beta} \left(\prod_{l=1}^n \left(1 + q_{jl} \left(e^{2\pi 2^{n-l} it} - 1 \right) \right) \right) \times \\
&\quad \times \prod_{l=1}^n \left(1 + q_{0l} \left(e^{-2\pi 2^{n-l} it} - 1 \right) \right) dt = \\
&= \int_0^1 \sum_{\substack{\beta, \\ (\beta \subseteq \{1, \dots, m\})}} \sum_{\substack{\varepsilon, \\ (\varepsilon \subseteq \{1, \dots, n\})}} \sum_{\delta \subset \beta \times \{1, \dots, n\}} \prod_{(j, l) \in \delta} \left(e^{2\pi 2^{n-l} it} - 1 \right) \times \\
&\quad \times \prod_{l \in \varepsilon} \left(e^{-2\pi 2^{n-l} it} - 1 \right) \cdot \left(\prod_{(j, l) \in \delta} q_{jl} \cdot \prod_{l \in \varepsilon} q_{0l} \right) dt = \\
&= \int_0^1 \sum_{\substack{\alpha, \alpha \subseteq \{1, \dots, n\} \\ (\gamma, \gamma \subset \{1, \dots, m\}) \times \{1, \dots, n\}}} 2^{m-|\gamma|} \left(\prod_{(j, l) \in \gamma} \left(e^{2\pi 2^{n-l} it} - 1 \right) \cdot \prod_{l \in \alpha} \left(e^{-2\pi 2^{n-l} it} - 1 \right) \right) \times \\
&\quad \times \left(\prod_{(j, l) \in \gamma} q_{jl} \cdot \prod_{l \in \alpha} q_{0l} \right) dt = \\
&= \int_0^1 \sum_{\substack{\alpha, \alpha \subseteq \{1, \dots, n\} \\ (\gamma, \gamma \subset \{1, \dots, m\}) \times \{1, \dots, n\}}} 2^{m-|\gamma|} \sum_{\substack{(\delta, \delta \subseteq \gamma \\ \varepsilon, \varepsilon \subseteq \alpha}} \exp \left(2\pi \left(\sum_{(j, l) \in \delta} 2^{n-l} - \sum_{l \in \varepsilon} 2^{n-l} \right) it \right) \times \\
&\quad \times (-1)^{|\gamma|+|\delta|+|\alpha|+|\varepsilon|} \left(\prod_{(j, l) \in \gamma} q_{jl} \cdot \prod_{l \in \alpha} q_{0l} \right) dt
\end{aligned}$$

Введем функцию

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 0, \\ 0, & \text{если } x \neq 0. \end{cases}$$

Тогда

$$K(a_1, \dots, a_m, a_0) = \sum_{\substack{\alpha, \alpha \subseteq \{1, \dots, n\} \\ (\gamma, \gamma \subset \{1, \dots, m\}) \times \{1, \dots, n\}}} 2^{m-|\gamma|} \cdot (-1)^{|\gamma|+|\alpha|} \times \\ \times \sum_{\substack{(\delta, \delta \subseteq \gamma \\ (\varepsilon, \varepsilon \subseteq \alpha)}} (-1)^{|\delta|+|\varepsilon|} \chi \left(\sum_{(j,l) \in \delta} 2^{n-l} - \sum_{l \in \varepsilon} 2^{n-l} \right) \left(\prod_{(j,l) \in \gamma} q_{jl} \cdot \prod_{l \in \alpha} q_{0l} \right)$$

Пусть

$$b_{\gamma\alpha} = 2^{m-|\gamma|} \cdot (-1)^{|\gamma|+|\alpha|} \sum_{\substack{(\delta, \delta \subseteq \gamma \\ (\varepsilon, \varepsilon \subseteq \alpha)}} (-1)^{|\delta|+|\varepsilon|} \chi \left(\sum_{(j,l) \in \delta} 2^{n-l} - \sum_{l \in \varepsilon} 2^{n-l} \right),$$

тогда

$$d_{\gamma\alpha} = (-1)^{|\gamma|+|\alpha|} \frac{b_{\gamma\alpha}}{2^{m-|\gamma|}} = \sum_{\substack{(\delta, \delta \subseteq \gamma \\ (\varepsilon, \varepsilon \subseteq \alpha)}} (-1)^{|\delta|+|\varepsilon|} \chi \left(\sum_{(j,l) \in \delta} 2^{n-l} - \sum_{l \in \varepsilon} 2^{n-l} \right)$$

Если $|\gamma \cup \alpha| = h$, то получаем рекуррентное соотношение

$$d_{\gamma\alpha} = (-1)^{|\gamma|+|\alpha|} \chi \left(\sum_{(j,l) \in \gamma} 2^{n-l} - \sum_{l \in \alpha} 2^{n-l} \right) + \\ + \sum_{\substack{(\gamma_1 \subseteq \gamma, \alpha_1 \subseteq \alpha \\ |\gamma_1 \cup \alpha_1| = h-1}} d_{\gamma_1\alpha_1} - \sum_{\substack{(\gamma_2 \subseteq \gamma, \alpha_2 \subseteq \alpha \\ |\gamma_2 \cup \alpha_2| = h-2}} d_{\gamma_2\alpha_2} + \dots$$

Замечание. Пусть $L(a_1, \dots, a_m, a_0)$ — характеристическая функция решения уравнения, то есть равна 1, если решение есть и 0, в противном случае. Тогда

$$L(a_1, \dots, a_m, a_0) = 1 - \int_0^1 e^{2\pi K(a_1, \dots, a_m, a_0)it} dt. \quad (1)$$

Пусть, несколько видоизменяя обозначения,

$$K(a_1, \dots, a_m, a_0) = \sum_{\beta, \beta \subseteq E} b_\beta \prod_{j, j \in \beta} q_j, \quad (2)$$

где E — множество значений индексов переменных, $P(E)$ — множество подмножеств E . Тогда

$$\begin{aligned} L(a_1, \dots, a_m, a_0) &= 1 - \int_0^1 \prod_{\beta, \beta \subseteq E} \left(1 + \left(e^{2\pi b_\beta i t} - 1 \right) \left(\prod_{j, j \in \beta} q_j \right) \right) dt = \\ &= \sum_{\gamma, \gamma \subseteq E} \left(\sum_{\substack{\delta, \delta \in P(E) \\ \cup_{i, i \in \delta} \beta_i = \gamma}} \sum_{\alpha, \alpha \subseteq \delta} (-1)^{|\delta| + |\alpha| + 1} \chi \left(\sum_{p, p \in \alpha} b_p \right) \right) \prod_{j, j \in \gamma} q_j. \quad (3) \end{aligned}$$

В общем случае, $L(\cdot)$ — характеристическая функция существования некоторого объекта, зависящего от булевских переменных, а $K(\cdot)$ — функция равная 0, если объекта не существует, и равная ненулевому целому, если существует. Если функция $K(\cdot)$ может быть представлена формулой (2), то функция $L(\cdot)$ представляется формулой (1) и, следовательно, формулой (3).