

# О некоторых свойствах пересечений предполных классов многозначной логики

А. С. Нагорный (МГУ им. М. В. Ломоносова, МФТИ, Москва)

Пусть  $k > 2$ ,  $E_k = \{0, 1, \dots, k - 1\}$ . Обозначим через  $P_k$  множество всех конечноместных функций на  $E_k$ . Вследствие теоремы А. В. Кузнецова при любом  $k$  в  $P_k$  имеется конечное число предполных классов. Все они были описаны в 1965 г. И. Розенбергом в терминах сохранения некоторых предикатов. В данной работе доказан ряд утверждений о вложении некоторых пересечений предполных классов в некоторый (другой) предполный класс. Такие утверждения помогают построить для предполных классов так называемую решетку пересечений, являющуюся, в определенном смысле, «остовом» континуальной (при  $k > 2$ ) решетки замкнутых классов в  $P_k$ , в целях получения конечной классификации замкнутых классов. При  $k = 3$  решетка пересечений предполных в  $P_k$  классов построена автором ранее, тогда как при всех  $k > 3$  проблема пока остается открытой.

**Ключевые слова:** многозначная логика, предполные классы, замкнутые классы, решетка, решетка пересечений.

Пусть  $k \geq 3$ ,  $E_k = \{0, 1, \dots, k - 1\}$ . Обозначим через  $P_k$  множество всех конечноместных функций на  $E_k$ . Элементы множества  $P_k$  будем называть  $k$ -значными функциями или функциями  $k$ -значной логики. Определения операции суперпозиции, замкнутого класса, предполного (максимального) класса, предиката и других основных понятий можно найти, например, в [1].

Вследствие теоремы А. В. Кузнецова при любом  $k$  в  $P_k$  имеется конечное число предполных классов. Все они были описаны И. Розенбергом [2] в терминах сохранения некоторых предикатов.

Нас будут интересовать включения

$$\mathbf{K}_{i_1} \cap \mathbf{K}_{i_2} \cap \dots \cap \mathbf{K}_{i_s} \subseteq \mathbf{K}_j, \quad (*)$$

где все  $\mathbf{K}_{i_m}$  и  $\mathbf{K}_j$  суть предполные в  $P_k$  классы.

Вложение вида (\*) назовем *тупиковым*, если после удаления любого  $\mathbf{K}_{i_m}$  из левой части оно становится ложным. Аналогично можно определить тупиковые равенства пересечений предполных классов какому-то другому (не предполному!) замкнутому классу.

Предполный класс  $k$ -значных функций, сохраняющих одноместный центральный предикат с центром  $\Delta = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r\}$ , будем обозначать  $T_\Delta$  или  $T_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r}$ .

**Теорема 1.** *При всех  $\Delta$  и  $E$ , удовлетворяющих условиям  $\Delta, E \subset E_k$  и  $\Delta \cap E \neq \emptyset$ , справедливо вложение*

$$T_\Delta \cap T_E \subseteq T_{\Delta \cap E}.$$

Для целых  $s$  и  $t$  положим  $\overline{s, t} = \begin{cases} s, s+1, \dots, t, & \text{если } s \leq t; \\ s, s-1, \dots, t, & \text{иначе.} \end{cases}$

Обозначим через  $M_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}$  класс  $k$ -значных функций, монотонных относительно линейного порядка  $\alpha_1 \prec \alpha_2 \prec \dots \prec \alpha_k$ , а через  $U_{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_l}$  — класс  $k$ -значных функций, сохраняющих нетривиальное ( $1 < l < k$ ) разбиение  $E_k = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \dots \cup \Delta_l$ .

Предполный класс  $k$ -значных функций, сохраняющих минимальный (по числу наборов) двухместный центральный предикат с центром  $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r\} \subset E_k$ , будем обозначать  $C_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_r}$ .

**Теорема 2.** *Справедливо вложение*

$$M_{\overline{0, k-1}} \cap U_{\{0, \overline{1, k-1}\}} \cap C_0 \subseteq M_{\overline{1, k-1, 0}}.$$

**Замечание 1.** Легко проверить, что данное вложение является тупиковым.

Пусть  $\widetilde{s, t}$  есть произвольная перестановка элементов множества  $\overline{s, t}$ .

**Теорема 3.** *В  $P_k$  справедливы следующие вложения*

- 1)  $M_{\overline{0, k-1}} \cap M_{0, k-1, 1, \widetilde{k-2}} \subseteq U_{\{0, \overline{1, k-1}\}}, \quad k \geq 3;$
- 2)  $M_{\overline{0, k-1}} \cap M_{0, \overline{2, k-1}, 1} \subseteq U_{\{0, \overline{1, k-1}\}}, \quad k \geq 4;$
- 3)  $\bigcap_{\sigma=1}^{k-1} M_{0, \{E_k \setminus \{0, \sigma\}\} \sigma} \subseteq U_{\{0, \overline{1, k-1}\}}, \quad k \geq 4.$

Будем использовать характеристическую функцию числа  $a \in E_k$ :

$$j_a(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = a; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

**Замечание 2.** Вложение 3) является тупиковым. Чтобы убедиться в этом, для произвольного  $a \in E_k \setminus \{0\}$  определим функцию  $f_a(x) \in P_k^1$  следующим образом:

$$f_a(x) = x - aj_a(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = a; \\ x, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть  $\sigma \in \overline{\{1, k-1\}}$ . Нетрудно видеть, что функция  $f_a(x)$  принадлежит всем классам вида  $M_{0\{E_k \setminus \{0, \sigma\}\}\sigma}$ , кроме  $M_{0\{E_k \setminus \{0, a\}\}a}$ . В то же время, очевидно,  $f_a(x) \notin U_{\{0, \overline{\{1, k-1\}}\}}$ .

**Теорема 4.** При любом  $k \geq 3$  справедливо вложение

$$\bigcap_{\sigma=1}^{k-1} C_\sigma \subseteq U_{\{0, \overline{\{1, k-1\}}\}}.$$

**Замечание 3.** Легко видеть, что вложение, фигурирующее в формулировке Теоремы 4, является тупиковым. Для этого достаточно рассмотреть ту же функцию  $f_a(x)$  и убедиться, что  $f_a(x) \in C_\sigma$  при всех  $\sigma \in E_k \setminus \{0, a\}$ , тогда как  $f_a(x) \notin U_{\{0, \overline{\{1, k-1\}}\}}$ .

Пусть  $A^k = \{0, 1, \dots, k-1, x\}$  (с точностью до конгруэнтных функций).

**Теорема 5.**

$$\bigcap_{\sigma=0}^{k-1} U_{\{\sigma, E_k \setminus \{\sigma\}\}} = A^k.$$

**Замечание 4.** Очевидно,  $A^k$  вложено в любой предполный класс, содержащий все константы.

**Следствие 1.**

$$\bigcap_{\sigma=0}^{k-1} C_\sigma = A^k.$$

**Замечание 5.** Равенства, записанные в формулировках теоремы 5 и следствия из нее, являются тупиковыми. Для того чтобы в этом убедиться, при каждом  $a \in E_k$  рассмотрим функцию  $h_a(x) \in P_k^1$ , которую мы определим следующим образом:

$$h_a(x) = x + ja(x) = \begin{cases} a + 1, & \text{если } x = a; \\ x, & \text{иначе.} \end{cases}$$

С одной стороны,  $h_a(x) \in U_{\{\sigma+1, E_k \setminus \{\sigma+1\}\}} \cap C_\sigma$  при всех  $\sigma \in E_k \setminus \{a\}$ , с другой стороны  $h_a(x) \notin A^k$ .

**Теорема 6.** Для любых непустых множеств  $\Delta$  и  $E$ , удовлетворяющих условиям  $\Delta \cap E = \emptyset$  и  $\Delta \cup E \subset E_k$ , справедливо вложение

$$C_\Delta \cap T_E \subseteq T_{\Delta \cup E}.$$

**Теорема 7.** Пусть  $\emptyset \neq E \subset E_k$ . Тогда

$$M_{0,k-1} \cap T_E \subseteq T_{0,b} \cap T_{a,k-1} \cap T_{a,b}, \quad a = \min_{\sigma \in E} \{\sigma\}, \quad b = \max_{\sigma \in E} \{\sigma\}.$$

**Теорема 8.** Пусть  $k \geq 3$ . Для любого нетривиального разбиения  $D = \{\Gamma, \Delta, E\}$  множества  $E_k$  выполнено

$$M_{\Gamma, \Delta, E} \cap C_\Delta \cap T_{\Gamma \cup E} \subseteq U_{\Gamma, \Delta \cup E} \cap U_{\Gamma \cup \Delta, E}$$

(здесь  $M_{\Gamma, \Delta, E}$  обозначает произвольный класс функций, монотонных относительно любого линейного порядка на  $E_k$ , согласно которому  $\gamma \prec \delta \prec \varepsilon$  при всех  $\gamma \in \Gamma, \delta \in \Delta, \varepsilon \in E$ ).

**Теорема 9.** Пусть  $D = \{\Delta, E\}$  — нетривиальное разбиение множества  $E_k$ . Если  $\emptyset \neq E' \subseteq E$ , то

$$U_{\Delta, E} \cap T_{E'} \subseteq T_E.$$

В заключение отметим, что ранее автором были получены аналогичные результаты (то есть, свойства, имеющие вид вложений (\*)) для пересечений предполных классов монотонных (относительно ограниченных частичных порядков) функций [3], а также найдены пересечения предполных классов, вложенные в классы функций, сохраняющих некоторые двухместные центральные предикаты [4, 5].

Установление свойств пересечений предполных классов в виде вложений (\*) помогает, в частности, построить для предполных классов так называемую решетку пересечений, являющуюся, в определенном смысле, «остовом» континуальной (при  $k \geq 3$ ) решетки замкнутых классов в  $P_k$ , в целях получения конечной классификации замкнутых классов.

При  $k = 3$  решетка пересечений предполных в  $P_k$  классов построена автором в [6] (она содержит 1505 узлов, включая класс  $P_3$ ), тогда как при всех  $k > 3$  проблема пока остается открытой.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00593-а).

## Список литературы

- [1] Марченков С. С. Функциональные системы с операцией суперпозиции. — М.: Физматлит, 2004.
- [2] Rosenberg I. G. Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken // Rozprawy Československe Akad. Věd. — N. 80. — Praha: Řada Math. Přír. Věd., 1970. — P. 3–93.
- [3] Нагорный А. С. О пересечениях классов монотонных функций многозначной логики // XI международный семинар «Дискретная математика и ее приложения», (Москва, 18–23 июня 2012 г.) — М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ. — С. 207–209.
- [4] Нагорный А. С. О некоторых пересечениях предполных классов многозначной логики, вложенных в классы  $C_0$  и  $C_{0,1,\dots,k-3}$  // Материалы Международного научного семинара «Дискретная математика и ее применение в экономико-математическом моделировании и информационных технологиях» (Запорожье, 11–13 октября 2012 г.) — С. 51–52.
- [5] Нагорный А. С. О некоторых пересечениях предполных классов многозначной логики // Научная конференция «Тихоновские чтения», тезисы докладов (Москва, 29–31 октября 2012 г.) — М.: МАКС Пресс, 2012. — С. 46–47.
- [6] Нагорный А. С. О пересечениях и объединениях предполных классов многозначной логики. Дисс. на соиск. уч. ст. канд. физ.-мат. наук. М.: МАКС Пресс, 2013.