О проблеме проверки однозначности алфавитного декодирования в классе регулярных языков с полиномиальной функцией роста

П. С. Дергач

Статья состоит из двух частей. В первой части рассматривается проблема проверки однозначности алфавитного декодирования в классе регулярных языков. Приводится ряд из нескольких ограничений на эти языки, выполнение которых позволяет построить новый решающий алгоритм и значительно улучшить его сложность в сравнении со сложностью аналогичного алгоритма из [4]. Вторая часть статьи посвящена проблеме проверки однозначности алфавитного декодирования для класса регулярных языков с полиномиальной функцией роста. Полученные в первой части статьи результаты ложатся в основу алгоритма, решающего рассматриваемую проблему. Разработана техника, позволяющая реализовать для языков с полиномиальной функцией роста те допущения, которые приведены в первой части статьи.

Ключевые слова: регулярные языки, функция полиномиального роста, алфавитное декодирование.

Введение

Познакомиться с понятием регулярных языков можно в [1]. Понятие алфавитного кодирования, в свою очередь, есть в [2]. Александр Александрович Марков в своей работе [3] показал, что эта проблема (а точнее, проблема в классе регулярных языков) алгоритмически разрешима. Другое доказательство этого факта с явными оценками на сложность предложенного алгоритма было получено автором этой статьи в работе [4]. Целью этой статьи является описание нового алгоритма, решающего за полиномиальное время проблему проверки однозначности алфавитного декодирования в классе регулярных языков с полиномиальной функцией роста. Суть этого алгоритма состоит в переборе слов регулярного языка, длина которых не превосходит некоторого полинома. Переменными полинома здесь являются сложность функции кодирования и сложность регулярного выражения, которым задан регулярный язык с полиномиальной функцией роста. Точные определения этих терминов приводятся ниже. Так как у языков с полиномиальной функцией роста количество слов с полиномиальной оценкой на длину тоже ограничено сверху полиномом, то предложенный алгоритм имеет полиномиальную сложность.

Автор благодарит своего научного руководителя Кудрявцева Валерия Борисовича и коллектив кафедры МаТИС при механико-математическом факультете МГУ за оказанное внимание к изложенным в статье результатам.

Также автор рекомендует читателям, интересующимся теорией регулярных языков и конечных автоматов, познакомиться с новейшими результатами в этом направлении, изложенными в [5] - [31].

Часть I

Основные понятия и результаты

Понятия регулярного языка, регулярного выражения и конечных абстрактных детерминированных и недетерминированных автоматов считаем общеизвестными и здесь не приводим. Их можно найти, например, в [1].

Через $\mathbb{N}_0$ обозначаем множество $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Множество $\{0, 1\}$ обозначаем для краткости через E_2.

Пусть A, B - конечные непустые множества и $n \in \mathbb{N}$. Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ через $K(A, B, n)$ обозначаем множество всех инициальных абстрактных конечных автоматов с входным алфавитом A, выходным алфавитом B и алфавитом состояний мощности n. Через $K_{\leq}(A, B, n)$ обозначаем множество всех инициальных абстрактных конечных автоматов с входным алфавитом A, выходным алфавитом B и алфавитом состояний мощности не выше n. Класс инициальных недетерминированных конечных автоматов (A, Q, B, γ, Q'), в которых $|Q| = n$, обозначаем для краткости через $\widetilde{K}(A, B, n)$.

Для произвольного $V_q = (A, Q, B, \varphi, \psi, q)$ через $[V_q]$ обозначаем множество

$$\{V_q{}' = (A, Q, B, \varphi, \psi, q') \mid q' \in Q\}$$

инициальных абстрактных конечных автоматов, полученных из V_q изменением начального состояния. Сам автомат V_q тоже входит в $[V_q]$.

Пусть $V_q = (A, Q, B, \varphi, \psi, q)$ - инициальный абстрактный конечный автомат и $B' \subseteq B$. Множество $\{\alpha \mid \alpha \in A^*,\ \psi(q, \alpha) \in B'\}$ называем *распознаваемым в конечном автомате* V_q *с помощью подмножества* B' выходных символов и обозначаем его через $B'(V_q)$.

Пусть A, B - конечные непустые множества. В дальнейшем будем называть A *входным алфавитом*, а B - *выходным алфавитом*. Множество слов (включая пустое) входного алфавита обозначаем через A^*, а множество слов (включая пустое) выходного алфавита - через B^*. Пустое слово обозначаем через λ. Пусть $\alpha = a(1) \ldots a(k)$. Говорим, что k - *длина* слова α и обозначаем ее через $l(\alpha)$. Префикс слова α, имеющий длину l, обозначаем $[_l(\alpha)$. Постфикс слова α, имеющий длину l, обозначаем через $]_l(\gamma)$.

Через $R(A)$ обозначаем множество всех не содержащих пустое слово регулярных языков в алфавите A:

$$R(A) := \{P \subseteq A^* \setminus \{\lambda\} \mid P - \text{регулярно}\}.$$

Для произвольных $n \in \mathbb{N}$ и $P \subseteq A^*$ обозначаем через $P_{\leq}(n)$ множество

$$P_{\leq}(n) := \{\alpha \in P \mid l(\alpha) \leq n\}.$$

Через $F(A, B)$ обозначаем множество всех отображений из алфавита A в $B^* \setminus \{\lambda\}$:

$$F(A, B) := \{f \mid f : A \to B^* \setminus \{\lambda\}\}.$$

Элементы из $F(A, B)$ называем *схемами кодирования.* Для произвольной схемы кодирования f и произвольного $a_i \in A$ слова $f(a_i)$ называем *элементарными кодами.* Обозначаем через l_f максимальную длину элементарных кодов схемы f и называем эту величину *сложностью схемы f. Длиной схемы кодирования* называем сумму длин ее элементарных кодов и обозначаем ее через L_f. Для произвольной схемы $f \in F(A, B)$ доопределяем ее до функции $\tilde{f} : A^* \setminus \{\lambda\} \to B^*$ следующим образом:

$$\forall \alpha = a(1) \ldots a(k) \in A^* \setminus \{\lambda\} \qquad \tilde{f}(\alpha) := f(a(1)) \ldots f(a(k)).$$

Называем $\tilde{f}$ *функцией алфавитного кодирования по схеме f.*

Для произвольного $P \subseteq A^*$ обозначаем через $(\tilde{f})_P$ функцию $(\tilde{f})_P : P \to B^*$, полученную из $\tilde{f}$ сужением на P. Пусть f - схема кодирования. Обозначаем через $I(f)$ множество

$$I(f) := \{P \subseteq A^* \setminus \{\lambda\} \mid (\tilde{f})_P - \text{инъекция}\},$$

называемое *классом допустимых регулярных языков для схемы f.*

Проблемой проверки однозначности алфавитного декодирования в классе регулярных языков (или сокращенно - проблемой 1) называем проверку свойства

$$P \in I(f)$$

для произвольных $f \in F(A, B)$ и $P \in R(A)$.

Теорема 1. *Пусть A, B - конечные непустые алфавиты. Существует алгоритм, который по произвольной паре $(\tilde{f}, P) \in F(A, B) \times R(A)$ определяет, однозначно ли декодирование на P по $\tilde{f}$. Пусть, кроме того, известно, что для некоторых фиксированных $m, n \in \mathbb{N}$ имеем:*

1) существует $V \in K_{\leq}(A, E_2, n)$, для которого $1(V) = P$;
2) для каждого $V_1 \in [V]$ существует автомат $W_1 \in K_{\leq}(B, E_2, m)$ такой, что $1(W_1) = \tilde{f}(1(V_1))$.
Тогда алгоритм сводит эту проблему к проверке однозначности декодирования на множестве $P_{\leq}(n + m^2 + l_f)$ по $\tilde{f}$.

Доказательство вспомогательных утверждений

Лемма 1. *Пусть $V_{Q'} \in \tilde{K}(A, E_2, n)$, где A - конечный непустой алфавит и $n \in \mathbb{N}$. Тогда существуют $m \in \mathbb{N}$, $m \leq 2^n$ и $V_q \in K(A, E_2, m)$ такие, что*

$$1(V_{Q'}) = 1(V_q).$$

Доказательство леммы приведено в [1].

Лемма 2(О склейке). *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, A - конечный алфавит и δ_1, δ_2, ξ_1, ξ_2, β - слова (возможно, пустые) в алфавите A. Пусть*

$$V_1 \in K(A, E_2, m), V_2 \in K(A, E_2, n);$$

$$1(V_1) = P_1, 1(V_2) = P_2;$$

$$\delta_1 \beta \delta_2 \in P_1,\ \ \xi_1 \beta \xi_2 \in P_2.$$

Тогда существует слово β' в алфавите A такое, что

$$\delta_1 \beta' \delta_2 \in P_1,\ \ \xi_1 \beta' \xi_2 \in P_2,\ \ |\beta'| \leq mn.$$

Доказательство. Пусть

$$V_1 = (A, Q_1, B, \varphi_1, \psi_1, q_1), V_2 = (A, Q_2, B, \varphi_2, \psi_2, q_2).$$

Здесь $|Q_1| = m$, $|Q_2| = n$. Допустим, что $|\beta| \geq |Q_1||Q_2| = mn$. Рассмотрим множество T пар состояний автоматов V_1, V_2 такое, что

$$T = \{(\varphi_1(q_1, \delta_1[_l(\beta)), \varphi_2(q_2, \xi_1[_l(\beta))) \mid 0 \leq l < |\beta|\}.$$

Так как $T \subseteq Q_1 \times Q_2$, то

$$|T| \leq |Q_1||Q_2|.$$

Из принципа Дирихле заключаем, что существуют

$$0 \le l_1 < l_2 \le |Q_1||Q_2|,\ \ l_1, l_2 \in \mathbb{N}_0,$$

для которых верно

$$\varphi_1(q_1, \delta_1[_{l_1}(\beta)) = \varphi_1(q_1, \delta_1[_{l_2}(\beta)),$$

$$\varphi_2(q_2, \xi_1[_{l_1}(\beta)) = \varphi_2(q_2, \xi_1[_{l_2}(\beta)).$$

Пусть β_1 и β_2 удовлетворяют соотношениям

$$\beta_1 = [_{l_1}(\beta),\ \ \beta = [_{l_2}(\beta)\beta_2.$$

Здесь $|\beta_2| > 0$, так как

$$l_2 \le |Q_1||Q_2|,\ \ |\beta| > |Q_1||Q_2|.$$

Тогда

$$\psi_1(q_1, \delta_1\beta_1\beta_2\delta_2) = \psi_1(\varphi_1(q_1, \delta_1\beta_1), \beta_2\delta_2) =$$

$$= \psi_1(\varphi_1(q_1, \delta_1[_{l_1}(\beta)), \beta_2\delta_2) = \psi_1(\varphi_1(q_1, \delta_1[_{l_2}(\beta)), \beta_2\delta_2) =$$

$$= \psi_1(\varphi_1(q_1, \delta_1), [_{l_2}(\beta)\beta_2\delta_2) = \psi_1(\varphi_1(q_1, \delta_1), \beta\delta_2) = \psi_1(q_1, \delta_1\beta\delta_2) = 1.$$

Аналогично выводим, что

$$\psi_2(q_2, \xi_1\beta_1\beta_2\xi_2) = \psi_2(\varphi_2(q_2, \xi_1\beta_1), \beta_2\xi_2) =$$

$$= \psi_2(\varphi_2(q_2, \xi_1[_{l_1}(\beta)), \beta_2\xi_2) = \psi_2(\varphi_2(q_2, \xi_1[_{l_2}(\beta)), \beta_2\xi_2) =$$

$$= \psi_2(\varphi_2(q_2, \xi_1), [_{l_2}(\beta)\beta_2\xi_2) = \psi_2(\varphi_2(q_2, \xi_1), \beta\xi_2) = \psi_2(q_2, \xi_1\beta\xi_2) = 1.$$

Отсюда, по опредению, немедленно следует, что

$$\delta_1\beta_1\beta_2\delta_2 \in B_1,\ \ \xi_1\beta_1\beta_2\xi_2 \in B_2.$$

При этом, $|\beta_1\beta_2| < |\beta|$. Проводя необходимое количество раз изложенную выше процедуру сокращения $\beta \to \beta_1\beta_2$, окончательно получаем слово β' длины не большей $|Q_1||Q_2| = mn$, для которого

$$\delta_1\beta'\delta_2 \in B_1,\ \ \xi_1\beta'\xi_2 \in B_2.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3(О разрезе). *Пусть* $n \in \mathbb{N}$; A *- конечный непустой алфавит; есть автомат* $V \in K(A, E_2, n)$ *такой, что* $1(V) = P$; $\alpha \in A^*$ *и* $s \in \mathbb{N}$, *причем* $s < |\alpha|$. *Тогда существуют* $V_1, V_2 \in K(A, E_2, n)$, *для которых*

$$1(V_1) \cdot 1(V_2) \subseteq P,\ [_s(\alpha) \in 1(V_1),\ ]_{|\alpha|-s}(\alpha) \in 1(V_2), V_2 \in [V].$$

Доказательство. Пусть

$$V = (A, Q, E_2, \varphi, \psi, q_0).$$

Определяем искомую пару инициальных абстрактных конечных автоматов

$$V_1 = (A, Q, E_2, \varphi_1, \psi_1, q_0), V_2 = (A, Q, E_2, \varphi_2, \psi_2, q_1)$$

следующим образом:

$$q_1 = \varphi(q_0, [_s(\alpha));$$

$$\psi_1(q, a) = \begin{cases} 1, & \text{при } \varphi(q, a) = q_1, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$\psi_2(q, a) = \psi(q, a);$$

$$\varphi_1(q, a) = \varphi_2(q, a) = \varphi(q, a).$$

Покажем, что все условия леммы выполнены. Очевидно, что $V_1, V_2 \in K(A, E_2, n)$ и $V_2 \in [V]$. Обозначаем через P_1 и P_2 множества, распознаваемые посредством $\{1\}$ автоматами V_1 и V_2 соответственно. Замечаем, что

$$\psi_1(q_0, [_s(\alpha)) = 1,\ \text{ведь}\ \varphi(q_0, [_s(\alpha)) = q_1.$$

Значит $[_s(\alpha) \in P_1$. Далее, так как $\alpha \in P$, то

$$1 = \psi(q_0, \alpha) = \psi\big(\varphi(q_0, [_s(\alpha)),]_{|\alpha|-s}(\alpha)\big) = \psi(q_1,]_{|\alpha|-s}(\alpha)).$$

Поэтому $]_{|\alpha|-s}(\alpha) \in P_2$. Значит $\alpha = [_s(\alpha) \cdot]_{|\alpha|-s}(\alpha) \in P_1 \cdot P_2$.

Докажем теперь, что $P_1 \cdot P_2 \subseteq P$. Пусть $\alpha_1 \in P_1, \alpha_2 \in P_2$. Тогда

$$\varphi(q_0, \alpha_1) = q_1, \quad \psi(q_1, \alpha_2) = 1.$$

Значит

$$\psi(q_0, \alpha_1\alpha_2) = \psi(\varphi(q_0, \alpha_1), \alpha_2) = \psi(q_1, \alpha_2) = 1,$$

то есть $\alpha_1\alpha_2 \in P$. Поэтому $P_1 \cdot P_2 \subseteq P$. Все условия леммы выполнены. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. (Об образе) *Пусть A, B - непустые конечные алфавиты, $\tilde{f} \in F(A, B)$, $V_{q_0} \in K(A, E_2, n)$, $1(V_{q_0}) = P$. Тогда существуют $m \in \mathbb{N}$, $V_{q'_0} \in K(B, E_2, m)$ такие, что*

$$m \leq 2^{|Q|(L_f - |A| + 1)},\ 1(V_{q'_0}) = \tilde{f}(P).$$

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_r\}$. Заменим в автомате V_{q_0} входной алфавит A на алфавит $\tilde{f}(A)$ и поправим функции перехода и выхода, заменив в них все a_i на $\tilde{f}(a_i)$:

$$\varphi'(q, \tilde{f}(a_i)) = \varphi(q, a_i),\ \psi'(q, \tilde{f}(a_i)) = \psi(q, a_i).$$

Получаем некоторый инициальный абстрактный конечный автомат

$$W_{q_0} \in K(\tilde{f}(A), E_2, m).$$

Далее, рассматриваем все такие наборы $(q_l, q_m, *, \tilde{f}(a_i))$, где q_l, q_m - состояния автомата W_{q_0}, $* \in E_2$ и $\tilde{f}(a_i) = b^i_1 \ldots b^i_{s(i)}$, для которых

$$\varphi'(q_l, \tilde{f}(a_i)) = q_m,\ \psi'(q_l, \tilde{f}(a_i)) = *.$$

Для каждого такого набора поменяем в функциях φ' и ψ' соответствующий переход на последовательность состояний с побуквенными переходами $b^i_1, \ldots, b^i_{s(i)}$ так, как это изображено на рисунке 1:

Таким образом, мы получили инициальный недетерминированный конечный автомат $\tilde{V}_{q_0} \in K(B, E_2, m)$, представляющий по $\{1\}$ множество $\tilde{f}(A)$. Найдем мощность m множества состояний автомата $\tilde{V}_{q_0}$. Q состояний остается от автомата W_{q_0}. Для каждого перехода

$$\varphi'(q_l, \tilde{f}(a_i)) = q_m,\ \psi'(q_l, \tilde{f}(a_i)) = *$$

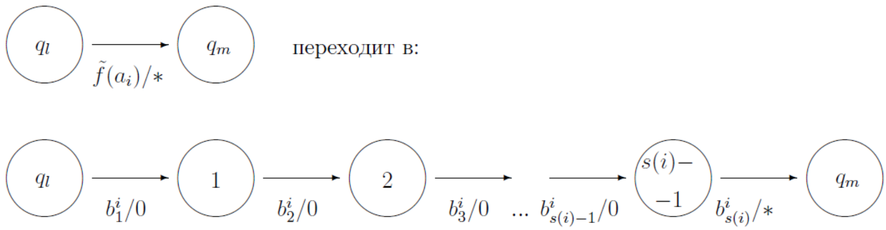

Рис. 1.

добавляется $s(i)-1$ состояний. Если зафиксировать q_l, то всего таких переходов будет $r = |A|$ штук - по одному для каждого $\tilde{f}(a_i)$. В итоге, для каждого q_l получаем дополнительные

$$(s(1)-1)+(s(2)-1)+\ldots+(s(r)-1) = L_f - r$$

состояний. Поэтому

$$m = |Q| + |Q|(L_f - r) = |Q|(L_f - |A| + 1).$$

Доказательство леммы завершает применение леммы 1. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. (О минимизации) *Пусть выполнены следующие условия:*
1) A и B - непустые конечные алфавиты;
2) m, n - фиксированные натуральные числа;
3) $\tilde{f} \in F(A,B)$, $V_q \in K(A, E_2, n)$, $1(V_q) = P$;
4) для каждого $V_{q'} \in [V_q]$ существует автомат $W_{q'} \in K_{\leq}(B, E_2, m)$ такой, что $1(W_{q'}) = \tilde{f}(1(V_{q'}))$;
5) $\alpha_1, \alpha_2 \in P$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $\tilde{f}(\alpha_1) = \tilde{f}(\alpha_2)$.
Тогда существуют $\alpha_1', \alpha_2' \in P$, для которых

$$\alpha_1' \neq \alpha_2', \;\; \tilde{f}(\alpha_1') = \tilde{f}(\alpha_2'),$$

$$|\alpha_1'|, |\alpha_2'| \leq n + m^2 + l_f.$$

Доказательство. Пусть γ - наибольший по длине общий префикс слов α_1 и α_2. Слово γ, вообще говоря, может быть пустым. Так как $\alpha_1 \neq \alpha_2$, то эти слова можно представить в виде

$$\alpha_1 = \gamma a_1 \beta_1,\ \alpha_2 = \gamma a_2 \beta_2,$$

где a_1, a_2 - буквы алфавита A и $a_1 \neq a_2$. Если $\gamma \neq \Lambda$, то по лемме 3 о разрезе слова α_1, сделанного по автомату V_q и числу $s = |\gamma|$, существуют $V_1, \tilde{V}_1 \in K(A, E_2, n)$, для которых

$$1(V_1) \cdot 1(\tilde{V}_1) \subseteq P,\ \gamma \in 1(V_1),\ a_1\beta_1 \in 1(\tilde{V}_1), \tilde{V}_1 \in [V_q].$$

Случай, когда $\gamma = \Lambda$, разберем позже. Теперь применяем лемму 3 к слову $a_1\beta_1$ по автомату $\tilde{V}_1$ и числу $s = 1$. По ней найдутся $V_2, V_3 \in K(A, E_2, n)$, для которых

$$1(V_2) \cdot 1(V_3) \subseteq 1(\tilde{V}_1),\ a_1 \in 1(V_2),\ \beta_1 \in 1(V_3), V_3 \in [\tilde{V}_1].$$

Окончательно получаем, что найдутся $V_1, V_2, V_3 \in K(A, E_2, n)$, для которых

$$1(V_1) \cdot 1(V_2) \cdot 1(V_3) \subseteq P,\ \gamma \in 1(V_1),\ a_1 \in 1(V_2),\ \beta_1 \in 1(V_3), V_3 \in [V_q].$$

Пусть $\tilde{m} = 2^{n(L_f - |A| + 1)}$. Из леммы 4 следует, что найдутся автоматы

$$V_1', V_2' \in K_{\leq}(B, E_2, \tilde{m}),$$

для которых

$$1(V_1') = \tilde{f}(1(V_1)),\ 1(V_2') = \tilde{f}(1(V_2)).$$

Кроме того, $V_3 \in [V_q]$, а это значит, что существует $V_3' \in K_{\leq}(B, E_2, m)$, для которого $1(V_3') = \tilde{f}(1(V_3))$.

Далее, применяя аналогичное рассуждение для слова α_2, получаем, что найдутся $W_1, W_2, W_3 \in K(A, E_2, n)$, для которых

$$1(W_1) \cdot 1(W_2) \cdot 1(W_3) \subseteq P,\ \gamma \in 1(W_1),\ a_1 \in 1(W_2),$$

$$\beta_1 \in 1(W_3), W_3 \in [V_q].$$

И найдутся автоматы $W_1', W_2' \in K(B, E_2, \tilde{m})$, $W_3' \in K_{\leq}(B, E_2, m)$, для которых

$$1(W_1') = \tilde{f}(1(W_1)),\ 1(W_2') = \tilde{f}(1(W_2)),\ 1(W_3') = \tilde{f}(1(W_3)).$$

Отметим, что автоматы V_1 и W_1 совпадают, так как получены из автомата V_q применением леммы 3 о разрезе по одинаковому слову γ. И q - начальное состояние у V_1.

Пусть $|\gamma| > n$ и φ_1, ψ_1 - функция переходов и функция выходов автомата V_1 соответственно. Рассмотрим множество

$$\{\varphi_1(q, [_l(\gamma)) \mid 0 \leq l \leq n\}.$$

Его мощность не превосходит мощности множества всех состояний автомата V_1, которая равна n. Поэтому из принципа Дирихле заключаем, что найдутся

$$0 \leq l_1 < l_2 \leq n,\ \ l_1, l_2 \in \mathbb{N}_0,$$

для которых

$$\varphi(q, [_{l_1}(\gamma)) = \varphi(q, [_{l_2}(\gamma)).$$

Рассмотрим слово $\gamma' = [_{l_1}(\gamma) \cdot]_{|\gamma| - l_2}(\gamma)$. Тогда

$$\psi_1(q, \gamma') = \psi_1(\varphi_1(q, [_{l_1}(\gamma)),]_{|\gamma|-l_2}(\gamma)) =$$

$$= \psi_1(\varphi_1(q, [_{l_2}(\gamma)),]_{|\gamma|-l_2}(\gamma)) = \psi_1(q, [_{l_2}(\gamma) \cdot]_{|\gamma|-l_2}(\gamma)) = \psi_1(q, \gamma) = 1.$$

Последнее равенство верно, так как $\gamma \in 1(V_1)$. Значит и $\gamma' \in 1(V_1)$. Поэтому

$$\gamma' a_1 \beta_1 \in 1(V_1) \cdot 1(V_2) \cdot 1(V_3) \subseteq P,$$

$$\gamma' a_2 \beta_2 \in 1(W_1) \cdot 1(W_2) \cdot 1(W_3) \subseteq P.$$

При этом

$$\gamma' a_1 \beta_1 \neq \gamma' a_2 \beta_2,$$

так как $a_1 \neq a_2$. Кроме того,

$$\tilde{f}(\gamma' a_1 \beta_1) = \tilde{f}(\gamma' a_2 \beta_2),$$

ведь $\tilde{f}(\gamma a_1 \beta_1) = \tilde{f}(\gamma a_2 \beta_2)$. Наконец,

$$|\gamma'| = l_1 + |\gamma| - l_2 < |\gamma|.$$

Исходя из всего вышеизложенного изначально можем теперь считать, что $|\gamma| \leq n$. Пусть

$$\tilde{f}(\beta_1) = \nu_1,\ \ \tilde{f}(\beta_2) = \nu_2 \nu_1.$$

Так как

$$\tilde{f}(\gamma)\tilde{f}(a_1)\nu_1 = \tilde{f}(\gamma)\tilde{f}(a_1)\tilde{f}(\beta_1) = \tilde{f}(\gamma a_1 \beta_1) =$$

$$= \tilde{f}(\gamma a_2 \beta_2) = \tilde{f}(\gamma)\tilde{f}(a_2)\tilde{f}(\beta_2) = \tilde{f}(\gamma)\tilde{f}(a_2)\nu_2\nu_1,$$

то

$$\tilde{f}(a_1) = \tilde{f}(a_2)\nu_2.$$

Применяя лемму 2 о склейке для автоматов $V_3', W_3' \in K_{\leq}(B, E_2, m)$ и слов $\tilde{f}(\beta_1), \tilde{f}(\beta_2)$ по их общей части ν_1, получаем, что найдется слово ν_1' в алфавите B, для которого

$$\nu_1' \in 1(V_3'),\ \nu_2\nu_1' \in 1(W_3'),\ |\nu_1'| \leq m^2.$$

Так как

$$1(V_3') = \tilde{f}(1(V_3)),\ 1(W_3') = \tilde{f}(1(W_3)),$$

то существуют $\beta_1' \in 1(V_3)$, $\beta_2' \in 1(W_3)$, для которых

$$\tilde{f}(\beta_1') = \nu_1',\ \tilde{f}(\beta_2') = \nu_2\nu_1'.$$

При этом

$$\gamma a_1 \beta_1' \in 1(V_1) \cdot 1(V_2) \cdot 1(V_3) \subseteq P,$$

$$\gamma a_2 \beta_2' \in 1(W_1) \cdot 1(W_2) \cdot 1(W_3) \subseteq P.$$

Кроме того,

$$\tilde{f}(\gamma a_1 \beta_1') = \tilde{f}(\gamma)\tilde{f}(a_1)\nu_1' = \tilde{f}(\gamma)\tilde{f}(a_2)\nu_2\nu_1' =$$

$$= \tilde{f}(\gamma)\tilde{f}(a_2)\tilde{f}(\beta_2') = \tilde{f}(\gamma a_2 \beta_2').$$

Наконец, $\gamma a_1 \beta_1' \neq \gamma a_2 \beta_2'$, так как $a_1 \neq a_2$.
Исходя из всего вышеизложенного изначально можем теперь считать, что $|\nu_1| \leq m^2$.

Далее, так как $\tilde{f}(a_1) = \tilde{f}(a_2)\nu_2$, то

$$|\nu_2| = |\tilde{f}(a_1)| - |\tilde{f}(a_2)| \leq l_f - 1.$$

Значит

$$|\gamma a_1 \beta_1| = |\gamma| + |a_1| + |\beta_1| \leq n+1+|\tilde{f}(\beta_1)| = n+1+|\nu_1| \leq n+1+m^2,$$

$$|\gamma a_2\beta_2| = |\gamma| + |a_2| + |\beta_2| \le n+1+|\tilde{f}(\beta_2)| = n+1+|\nu_2\nu_1| \le n+1+$$
$$+m^2 + l_f - 1 = n + m^2 + l_f.$$

Получили требуемую оценку. Для случая, когда $\gamma = \Lambda$ рассуждения аналогичны с той лишь разницей, что исчезнут автоматы V_1, W_1, V_1', W_1'. И итоговая оценка станет равна $m^2 + l_f$. Утверждение леммы доказано. Лемма 5 доказана.

Доказательство основных утверждений

Теорема 1. *Пусть A, B - конечные непустые алфавиты. Существует алгоритм, который по произвольной паре $(\tilde{f}, P) \in F(A,B) \times R(A)$ определяет, однозначно ли декодирование на P по $\tilde{f}$. Пусть, кроме того, известно, что для некоторых фиксированных $m, n \in \mathbb{N}$ имеем:*
1) существует $V \in K_{\le}(A, E_2, n)$, для которого $1(V) = P$;
2) для каждого $V_1 \in [V]$ существует автомат $W_1 \in K_{\le}(B, E_2, m)$ такой, что $1(W_1) = \tilde{f}(1(V_1))$.
Тогда алгоритм сводит эту проблему к проверке однозначности декодирования на множестве $P_{\le}(n + m^2 + l_f)$ по $\tilde{f}$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что утверждение теоремы 1 непосредственно вытекает из леммы 5. Нужно лишь заметить, что существование n из формулировки теоремы очевидно, а из леммы 4 следует, что в качестве числа m из формулировки теоремы всегда можно взять число $2^{n(L_f - |A|+1)}$. Теорема доказана.

Часть II

Основные понятия и результаты

Здесь приводятся лишь те определения, которых не было в первой части статьи. При необходимости, остальные определения можно найти там.

Пусть A - входной алфавит, B - выходной алфавит. Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ обозначаем через $F_n(A, B)$ множество всех схем кодирования из $F(A, B)$, сложность которых не превосходит n.

Пусть $P \subseteq A^*$. Через $T_n(P)$ обозначаем мощность множества $P_{\leq}(n)$:

$$T_n(P) := |P_{\leq}(n)|.$$

Через T_P обозначаем функцию

$$T_P : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\},$$

где $T(n) = T_n(P)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Называем T_P *функцией роста* для P. Говорим, что P *имеет полиномиальную функцию роста* и пишем $T_P \in Pol$, если T_P ограничена сверху полиномом.

Через $RP(A)$ обозначаем множество всех не содержащих пустое слово регулярных языков в алфавите A, функция роста которых полиномиальна:

$$RP(A) := \{P \subseteq A^* \setminus \{\lambda\} \mid T_P \in Pol\}.$$

Говорим, что регулярное выражение $\mathfrak{P}$ в алфавите A имеет *линейный вид,* если

$$\mathfrak{P} = \alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_s \cdot (\beta_s)^* \cdot \alpha_{s+1}$$

для некоторых $s \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s+1} \in A^*$, $\beta_1, \ldots, \beta_s \in A^* \setminus \{\lambda\}$.

Говорим, что регулярное выражение $\mathfrak{P}$ в алфавите A имеет *правильный линейный вид,* если

$$\mathfrak{P} = \alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_s \cdot (\beta_s)^* \cdot \alpha_{s+1}$$

для некоторых $s \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_1, \alpha_{s+1} \in A^*$, $\alpha_2, \ldots, \alpha_s \in A^* \setminus \{\lambda\}$, $\beta_1, \ldots, \beta_s \in A^* \setminus \{\lambda\}$ и при этом первые буквы (если они есть) слов β_i, α_{i+1} различны при всех $1 \leq i \leq s$. Через $L(\mathfrak{P})$ обозначаем общее количество букв алфавита A (с учетом повторений) в $\mathfrak{P}$ и называем эту величину *сложностью* $\mathfrak{P}$.

Если выражение $\mathfrak{P}$ является конечной дизъюнкцией выражений линейного вида, то его *сложностью* называем максимальную из сложностей этих выражений.

Для произвольного регулярного выражения $\mathfrak{P}$ в алфавите A через $|\mathfrak{P}|$ обозначаем соответствующее ему регулярное множество в алфавите A. Говорим, что множество $|\mathfrak{P}|$ *задано с помощью* регулярного выражения $\mathfrak{P}$.

Говорим, что множество $P \subseteq A^*$ *линейного вида,* если оно может быть задано регулярным выражением линейного вида. Говорим, что множество $P \subseteq A^*$ *правильного линейного вида,* если оно может быть задано регулярным выражением правильного линейного вида. Множество всех множеств линейного вида в алфавите A обозначаем через $RP^1(A)$. Множество всех множеств правильного линейного вида в алфавите A обозначаем через $WRP^1(A)$. Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ обозначаем через $RP^1_n(A)$ множество всех $P \in RP^1(A)$, которые можно представить регулярным выражением линейного вида сложности не выше n. Через $RP_n(A)$ обозначаем множество всех $P \in RP(A)$, которые могут быть получены конечным объединением множеств из $RP^1_n(A)$. Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ обозначаем через $WRP^1_n(A)$ множество всех $P \in WRP^1(A)$, которые можно представить регулярным выражением правильного линейного вида сложности не выше n. Через $WRP_n(A)$ обозначаем множество всех $P \in RP(A)$, которые могут быть получены конечным объединением множеств из $WRP^1_n(A)$.

Проблемой проверки однозначности алфавитного декодирования в классе регулярных языков с полиномиальной функцией роста (или сокращенно - проблемой 2) называем проверку свойства

$$P \in I(f)$$

для произвольных $f \in F(A, B)$ и $P \in RP(A)$.

Называем подмножество натурального ряда $T \subseteq \mathbb{N}$ *периодическим,* если существуют $n_0, d \in \mathbb{N}$ такие, что для любого натурального $t \geq n_0$ из $t \in T$ следует $t + d \in T$. Число d называется *длиной периода для* T. Множество $\{t \in T \mid t < n_0\}$ называется *предпериодом для* T. Множество $\{t \in T \mid n_0 \leq t < n_0 + d\}$ называется *периодом для* T.

Пусть α, β - непустые слова в алфавите A. Говорим, что β является *измельчением* α, если существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $\alpha = \beta^k$. Если $k > 1$, то говорим, что измельчение *собственное*. Говорим, что измельчение β слова α *минимально*, если у α нет измельчения меньшей длины, чем длина измельчения β. Очевидно, что у любого непустого слова в алфавите A существует единственное минимальное измельчение.

Пусть α, β - непустые слова в алфавите A. Говорим, что α, β *соизмеримы,* если их минимальные измельчения совпадают.

Пусть $P \subseteq A^*$. Говорим, что P *измеримо,* если любые два непустых слова из этого множества соизмеримы.

Теорема 2. *Пусть A - конечный алфавит. Любое множество $P \in RP(A)$ может быть представлено в виде конечного объединения множеств правильного линейного вида.*

Теорема 3. *Пусть A, B - конечные непустые алфавиты и $m, n \in \mathbb{N}$. Проверка однозначности алфавитного декодирования f на P для произвольных $f \in F_m(A, B)$ и $P \in WRP_n(A)$ может быть сведена к проверке однозначности алфавитного декодирования f на $P_{\leq}(3(nm + 1)^4)$.*

Теорема 4. *Пусть A, B - конечные непустые алфавиты и $m, n \in \mathbb{N}$. Проверка однозначности алфавитного декодирования f на P для произвольных $f \in F_m(A, B)$ и $P \in RP_n(A)$ может быть сведена к проверке однозначности алфавитного декодирования f на $P_{\leq}(3(n^2m + 1)^4)$.*

Доказательство вспомогательных утверждений.

Лемма 6. *Пусть P - регулярное множество в алфавите A. Тогда оно представимо регулярным выражением вида*

$$\bigvee_{i=1}^{k} \alpha_{i,1} \cdot (\mathfrak{P}_{i,1})^* \cdot \alpha_{i,2} \cdot \ldots \cdot \alpha_{i,s(i)-1} \cdot (\mathfrak{P}_{i,s(i)-1})^* \cdot \alpha_{i,s(i)},$$

где $k, s(1), \ldots, s(k)$ - произвольные натуральные числа, $\alpha_{1,1}, \ldots, \alpha_{k,s(k)}$ - произвольные слова (возможно пустые) в алфавите A, $\mathfrak{P}_{1,1}, \ldots, \mathfrak{P}_{k,s(k)-1}$ - произвольные регулярные выражения в алфавите A.

Доказательство. Доказательство леммы приведено в [5].

Лемма 7. *Пусть $\alpha, \beta \in A^* \setminus \{\lambda\}$ и $\alpha^k = \beta^m$ для некоторых $k, m \in \mathbb{N}$. Тогда существует $\nu \in A^* \setminus \{\lambda\}$ такое, что $l(\nu) = (l(\alpha), l(\beta))$, $\alpha = \nu^{\frac{l(\alpha)}{l(\nu)}}$, $\beta = \nu^{\frac{l(\beta)}{l(\nu)}}$.*

Доказательство. Доказательство леммы приведено в [5].

Лемма 8. *Множество $P \subseteq A^* \setminus \{\lambda\}$ будет регулярным измеримым множеством в том и только в том случае, когда найдутся $\alpha \in A^*$ и периодическое $T \subseteq \mathbb{N}$, для которых выполнено $P = \{\alpha^t \mid t \in T\}$.*

Доказательство. Доказательство леммы приведено в [6].

Лемма 9. *Пусть $P \subseteq A^*$ - не измеримое множество. Тогда $T_{P^*} \notin Pol$.*

Доказательство. Так как P не измеримо, то существуют $\alpha, \beta \in P$, которые не соизмеримы. Обозначим через γ_1 слово $\alpha^{l(\beta)}$ и через γ_2 - слово $\beta^{l(\alpha)}$. Ясно, что $l(\gamma_1) = l(\gamma_2)$. Обозначим эту величину через l. Из леммы 7 следует, что $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и

$$\hat{c} := c(1) \ldots c(n)$$

- произвольная последовательность из 1 и 2. Всего таких последовательностей 2^n. Обозначаем через $\gamma(\hat{c})$ слово $\gamma_{c(1)} \ldots \gamma_{c(n)}$. Длина всех $\gamma(\hat{c})$ равна $l \cdot n$. Ясно, что если $\hat{c}_1 \neq \hat{c}_2$, то $\gamma(\hat{c}_1) \neq \gamma(\hat{c}_2)$. Кроме того, для всех $\hat{c}$ имеем $\gamma(\hat{c}) \in P^*$. Поэтому

$$T_{P^*}(l \cdot n) \geq 2^n.$$

Значит T_{P^*} не полиномиальна.

Утверждение леммы 9 доказано.

Лемма 10. *Пусть слова $\alpha, \beta \in A^*$ соизмеримы. Тогда множество $\alpha^* \cdot \beta^*$ представимо в виде конечного объединения множеств вида $\gamma \cdot \delta^*$.*

Доказательство. Так как α и β соизмеримы, то для некоторых $\nu \in A^*$, $a, b \in \mathbb{N}$ имеем $\alpha = \nu^a$, $\beta = \nu^b$. Тогда

$$\alpha^* \cdot \beta^* = (\nu^a)^* \cdot (\nu^b)^* = \{\nu^{a \cdot x + b \cdot y} \mid x, y \in \mathbb{N}_0\}.$$

Известно, что элементы множества $\{a \cdot x + b \cdot y \mid x, y \in \mathbb{N}_0\}$ начиная с некоторого момента образуют арифметическую прогрессию с шагом НОД(a, b). Осталось разложить множество $\{\nu^{a \cdot x + b \cdot y} \mid x, y \in \mathbb{N}_0\}$ в объединение конечного множества и множества, соответствующего этой прогрессии. Но каждый элемент конечного множества тоже представим в виде $\gamma \cdot \delta^*$ для $\delta = \lambda$.

Утверждение леммы 10 доказано.

Лемма 11. *Пусть слова $\alpha, \beta \in A^*$ не соизмеримы. Тогда существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $n \leq l(\alpha)$ и β^n не является префиксом сверхслова α^∞.*

Доказательство. Положим $n := l(\alpha)$. Заметим, что $l(\beta^n) = l(\beta) \cdot l(\alpha) = l(\alpha^{l(be)})$. Если бы слово β^n было префиксом сверхслова α^∞, то оно было бы равно $\alpha^{l(\beta)}$. Но из леммы 7 тогда бы следовало, что слова α и β соизмеримы.

Полученное противоречие завершает доказательство леммы 11.

Лемма 12. *Пусть A - конечный алфавит, $P \in RP^1(A)$ - множество линейного вида в алфавите A. Тогда оно представимо в виде конечного объединения множеств $P_i \in WRP^1(A)$ правильного линейного вида в алфавите A.*

Доказательство. По определению, множество P представимо регулярным выражением линейного вида

$$\mathfrak{P} = \alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_s \cdot (\beta_s)^* \cdot \alpha_{s+1}$$

для некоторых $s \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s+1} \in A^*$, $\beta_1, \ldots, \beta_s \in A^* \setminus \{\lambda\}$. Можно сразу считать, что первые буквы (если они есть) слов

β_i, α_{i+1} различны при всех $1 \leq i \leq s$. В самом деле, если это не так, то где-нибудь в выражении можно применить следующее преобразование (называем его неформально "перекидыванием"буквы через итерацию):

$$(a\alpha)^* \cdot (a\beta) = a \cdot (\alpha a)^* \cdot \beta.$$

Ясно, во-первых, что такое преобразование можно применить к выражению последовательно лишь конечное количество раз, так как через итерации можно "перекидывать"только буквы из слов α_i и делается это всегда справа налево. Во-вторых, что более интересно, окончательный результат таких преобразований не зависит от того, в каком порядке через итерации "перекидываются"буквы.

Допустим, что где-нибудь в полученном выражении рядом находятся две итерации, то есть, например, $\alpha_2 = \lambda$. Тогда в выражении рядом находятся две итерации - β_1^* и β_2^*.

Рассмотрим следующую процедуру (называем ее процедурой "расщепления"пары соседних итераций) преобразования исходного выражения. Возможны два случая.

1)β_1 и β_2 соизмеримы. Тогда применяем лемму 10 и представляем множество P в виде конечной дизъюнкции выражений линейного вида, каждое из которых содержит уже не более чем $s-1$ итерацию.

2) β_1 и β_2 не соизмеримы. Тогда из леммы 11 следует, что существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $n \leq l(\beta_1)$ и β_2^n не является префиксом сверхслова β_1^∞. Применяем к исходному выражению следующее преобразование:

$$\beta_1^* \cdot \beta_2^* = \beta_1^* \cdot (\lambda \vee \beta_2 \vee \beta_2^2 \vee \ldots \vee \beta_2^{n-1} \vee \beta_2^n \cdot \beta_2^*) = \beta_1^* \vee \beta_1^* \cdot \beta_2 \vee$$

$$\vee \beta_1^* \cdot \beta_2^2 \vee \ldots \vee \beta_1^* \cdot \beta_2^{n-1} \vee \beta_1^* \cdot \beta_2^n \cdot \beta_2^*.$$

Тогда выражение распадется в конечную дизъюнкцию выражений, каждое из которых содержит или на одну итерацию меньше, или же содержит между соседними итерациями β_1^* и β_2^* слово β_2^n. В последнем случае будем применять, пока это возможно, к новому выражению операцию "перекидывания"буквы через итерацию. Так как β_2^n не является префиксом сверхслова

β_1^∞, то после "перекидывания"между первыми двумя итерациями останется непустое слово.

Таким образом, в зависимости от того, какой из двух случаев имеет место, мы или уменьшаем количество итераций в выражении линейного вида, или создаем между двумя соседними итерациями слово, которое никогда не превратится в пустое при операциях "перекидывания"букв через итерации справа налево.

Теперь мы готовы к тому, чтобы описать алгоритм преобразования исходного выражения. Всегда, когда можем, применяем операцию "перекидывания". Если она не применима, то для какой-нибудь пары(неважно какой) соседних итераций применяем процедуру "расщепления". Ясно, что рано или поздно процесс закончится и исходное выражение распадется в конечную дизъюнкцию выражений, в которых нет соседних итераций и к которым неприменима операция "перекидывания". Поэтому эти выражения имеют правильный линейный вид.

Утверждение леммы 12 доказано.

Лемма 13. *Пусть A - конечный алфавит, $P \in RP_k(A)$. Тогда $P \in WRP_{k^2}(A)$.*

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать утверждение для $P \in RP_k^1(A)$. Пусть P представимо регулярным выражением линейного вида

$$\mathfrak{P} = \alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_s \cdot (\beta_s)^* \cdot \alpha_{s+1}$$

для некоторых $s \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s+1} \in A^*$, $\beta_1, \ldots, \beta_s \in A^* \setminus \{\lambda\}$. Рассмотрим более подробно процедуру преобразования этого выражения в конечную дизъюнкцию выражений правильного линейного вида, которая описана в лемме 12. При выполнении операции "перекидывания"сложность рассматриваемых линейных выражений остается неизменной. Операций "расщепления"всего будет проведено не более $s-1$ - по числу соседних пар итераций. При этом, в случае, когда под итерациями соизмеримые слова, количество итераций в выражении уменьшается хотя бы на один. Без ограничения общности, рассмотрим случай, когда это β_1^* и β_2^*. Для некоторых $\nu \in A^*$, $a, b \in \mathbb{N}$ имеем

$\beta_1 = \nu^a$, $\beta_2 = \nu^b$. Получаем выражение

$$(\nu^a)^* \cdot (\nu^b)^*.$$

Оно заменяется на выражение

$$(\bigvee_{x_i \in T_0} (\nu^{x_i})) \vee \nu^{t_0} \left(\nu^{\text{НОД(a,b)}}\right)^*.$$

Здесь T_0 - предпериод множества $\{ax + by \mid x, y \in \mathbb{N}_0\}$, а t_0 - первый элемент периода:

$$\{ax + by \mid x, y \in \mathbb{N}_0\} = T_0 \cup \{t_0 + \text{НОД(a,b)} \cdot x \mid x \in \mathbb{N}_0\}.$$

Ясно, что $t_0 \leq a \cdot b$. (Этот факт легко доказать, рассмотрев остатки по модулю b среди чисел $0, a, 2a, \ldots, (b-1)a$.)

Посчитаем, насколько при такой замене могла увеличиться по сравнению с исходной сложностью сложность новых линейных выражений. Эта разница не больше чем

$$l(\nu^{t_0}) + l\left(\nu^{\text{НОД(a,b)}}\right) - l(\nu^a) - l(\nu^b) = l(\nu)(t_0 + \text{НОД(a,b)} - a - b) \leq$$

$$\leq l(\nu) \cdot a \cdot b \leq (l(\nu) \cdot a) \cdot (l(\nu) \cdot b) = l(\beta_1) \cdot l(\beta_2).$$

Теперь рассмотрим случай, когда производится преобразование для пары соседних итераций, под которыми не соизмеримые слова. Опять, без ограничения общности, считаем, что это β_1^* и β_2^*. Применяется следующее преобразование:

$$\beta_1^* \cdot \beta_2^* = \beta_1^* \cdot (\lambda \vee \beta_2 \vee \beta_2^2 \vee \ldots \vee \beta_2^{n-1} \vee \beta_2^n \cdot \beta_2^*) = \beta_1^* \vee \beta_1^* \cdot \beta_2 \vee$$

$$\vee \beta_1^* \cdot \beta_2^2 \vee \ldots \vee \beta_1^* \cdot \beta_2^{n-1} \vee \beta_1^* \cdot \beta_2^n \cdot \beta_2^*.$$

Из леммы 11 следует, что за n можно взять число $l(\beta_1)$. Посчитаем, насколько при такой замене могла увеличиться по сравнению с исходной сложностью сложность новых линейных выражений. Эта разница не больше чем

$$(l(\beta_1) + l(\beta_2^n) + l(\beta_2)) - (l(\beta_1) + l(\beta_2)) = l(\beta_2^n) = n \cdot l(\beta_2) = l(\beta_1) \cdot l(\beta_2).$$

Таким образом, в каждом из обоих случаев сложность новых линейных выражений увеличивается не более чем на $l(\beta_1) \cdot l(\beta_2)$.

Осталось заметить, что в новых выражениях длина слов под итерациями может только уменьшиться: в первом случае происходит замена $\beta_1 = \nu^a$ и $\beta_2 = \nu^b$ на $\nu^{\text{НОД(a,b)}}$ или λ, во втором - замена β_2 на β_2 или λ. Таким образом, после всех операций "расщепления"сложность новых линейных выражений увеличивается не более чем на

$$l(\beta_1) \cdot l(\beta_2) + l(\beta_2) \cdot l(\beta_3) + \ldots + l(\beta_{s-1}) \cdot l(\beta_s).$$

Сложность исходного линейного выражения равна $l(\alpha_1) + \ldots + l(\alpha_{s+1}) + l(\beta_1) + \ldots + l(\beta_s)$ и, по условию леммы, не превосходит k. Отсюда получаем следующую оценку сверху на сложность окончательных выражений правильного линейного вида:

$$(l(\alpha_1) + \ldots + l(\alpha_{s+1}) + l(\beta_1) + \ldots + l(\beta_s)) + l(\beta_1) \cdot l(\beta_2) +$$

$$+ l(\beta_2) \cdot l(\beta_3) + \ldots + l(\beta_{s-1}) \cdot l(\beta_s) \leq l^2(\alpha_1) + \ldots + l^2(\alpha_{s+1}) +$$

$$+ l^2(\beta_1) + \ldots + l^2(\beta_s) + 2l(\beta_1)l(\beta_2) + 2l(\beta_2)l(\beta_3) + \ldots + 2l(\beta_{s-1})l(\beta_s) \leq$$

$$\leq (l(\alpha_1) + \ldots + l(\alpha_{s+1}) + l(\beta_1) + \ldots + l(\beta_s))^2 = k^2.$$

Утверждение леммы 13 доказано.

Лемма 14. *Пусть A, B - конечные непустые алфавиты, $m, n \in \mathbb{N}$, $f \in F_m(A, B)$ и $P \in WRP_n(A)$. Тогда P представимо в виде конечного объединения множеств P_i таких, что $P_i \in WRP^1_{n+2n^2m}(A)$ и $\tilde{f}(P_i) \in WRP^1_{nm+n^2m^2}(B)$.*

Доказательство. Здесь будет построен алгоритм, похожий на алгоритм из леммы 12. Однако, теперь следует учитывать ограничение не только на правильный линейный вид множеств P_i, но еще и ограничение на правильный линейный вид множеств $\tilde{f}(P_i)$. Прежде всего, замечаем, что утверждение леммы достаточно доказать лишь для случая $P \in WRP^1_n(A)$. Для лучшего понимания алгоритма опишем его сначала для случая, когда P представимо выражением правильного линейного вида с тремя итерациями:

$$P = \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4\right|.$$

Вводим для удобства новые обозначения:

$$\tilde{f}(\alpha_1) := \gamma_1,\ \tilde{f}(\alpha_2) := \gamma_2,\ \tilde{f}(\alpha_3) := \gamma_3,\ \tilde{f}(\alpha_4) := \gamma_4,$$

$$\tilde{f}(\beta_1) := \delta_1,\ \tilde{f}(\beta_2) := \delta_2,\ \tilde{f}(\beta_3) := \delta_3.$$

Тогда

$$\tilde{f}(P) = \left|\gamma_1 \cdot (\delta_1)^* \cdot \gamma_2 \cdot (\delta_2)^* \cdot \gamma_3 \cdot (\delta_3)^* \cdot \gamma_4\right|.$$

Применяем к выражению $\gamma_1 \cdot (\delta_1)^* \cdot \gamma_2 \cdot (\delta_2)^* \cdot \gamma_3 \cdot (\delta_3)^* \cdot \gamma_4$ операцию "перекидывания"из леммы 12 и получаем выражение

$$\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4.$$

Это выражение имеет правильный линейный вид. Далее следует разбор случаев. В виду большого объема при желании его можно пропустить, но делать этого не рекомендуется.
Случай 1.1. $\hat{\gamma}_2 \neq \lambda$, $\hat{\gamma}_3 \neq \lambda$. Тогда $\tilde{f}(P)$ - множество правильного линейного вида. Здесь и далее через n_1 и n_2 обозначаем оценки на максимальную по i сложность построенных выражений, представляющих P_i и $\tilde{f}(P_i)$ из формулировки леммы соответственно. Имеем:

$$n_1 = L(\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4) \leq n,$$

$$n_2 = L(\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4) =$$
$$= L(\gamma_1 \cdot (\delta_1)^* \cdot \gamma_2 \cdot (\delta_2)^* \cdot \gamma_3 \cdot (\delta_3)^* \cdot \gamma_4) \leq$$
$$\leq m \cdot L(\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4) \leq nm.$$

Здесь мы воспользовались тем фактом, что $f \in F_m(A, B)$, то есть длина любого элементарного кода в схеме f не превосходит m.
Случай 1.2. $\hat{\gamma}_2 \neq \lambda$, $\hat{\gamma}_3 = \lambda$, $\hat{\delta}_2$ и $\hat{\delta}_3$ соизмеримы. Тогда для некоторых $\nu \in B^*$, $x, y \in \mathbb{N}$ имеем:

$$\hat{\delta}_2 = \nu^x,\ \hat{\delta}_3 = \nu^y.$$

Оценим сверху x и y :

$$\max(x, y) \leq \max(l(\hat{\delta}_2), l(\hat{\delta}_3)) \leq$$

$$\leq L(\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4) =$$
$$= L(\gamma_1 \cdot (\delta_1)^* \cdot \gamma_2 \cdot (\delta_2)^* \cdot \gamma_3 \cdot (\delta_3)^* \cdot \gamma_4) \leq nm.$$

Разделим теперь P на P_i исходя из следующего равенства:

$$P = |\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4| =$$
$$= \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot (\lambda \vee \beta_3 \vee \ldots \vee \beta_3^{x-1}) \cdot (\beta_3^x)^* \cdot \alpha_4\right| =$$
$$= |\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3^x)^* \cdot \alpha_4| \cup$$
$$\cup |\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3 \cdot (\beta_3^x)^* \cdot \alpha_4| \cup$$
$$\cup \ldots \cup \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^{x-1} \cdot (\beta_3^x)^* \cdot \alpha_4\right|.$$

Называем это преобразование операцией "расслоения"по паре β_2, β_3. Не следует путать ее с операцией "расщепления"из леммы 12. При всех $i \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq i \leq x-1$ берем:

$$P_i := \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^i \cdot (\beta_3^x)^* \cdot \alpha_4\right|.$$

Замечаем, что при всех i выражение

$$\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^i \cdot (\beta_3^x)^* \cdot \alpha_4$$

имеет правильный линейный вид, так как исходное выражение

$$\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4$$

имеет правильный линейный вид. Далее имеем:

$$\tilde{f}(P_i) = \tilde{f}(\left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^i \cdot (\beta_3^x)^* \cdot \alpha_4\right|) =$$
$$= \left|\gamma_1 \cdot (\delta_1)^* \cdot \gamma_2 \cdot (\delta_2)^* \cdot \gamma_3 \cdot \delta_3^i \cdot (\delta_3^x)^* \cdot \gamma_4\right| =$$
$$= \left|\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot \hat{\delta}_3^i \cdot (\hat{\delta}_3^x)^* \cdot \hat{\gamma}_4\right|.$$

Здесь мы воспользовались тем фактом, что операция "перекидывания"для выражений

$$\gamma_1 \cdot (\delta_1)^* \cdot \gamma_2 \cdot (\delta_2)^* \cdot \gamma_3 \cdot (\delta_3)^* \cdot \gamma_4,$$
$$\gamma_1 \cdot (\delta_1)^* \cdot \gamma_2 \cdot (\delta_2)^* \cdot \gamma_3 \cdot \delta_3^i \cdot (\delta_3^x)^* \cdot \gamma_4$$

работает одинаково с той лишь разницей, что во втором выражении "перекидывание"нужно делать сразу через весь блок $\delta_3^i \cdot (\delta_3^x)^*$. Буквы при этом перекидываются одни и те же. Продолжаем цепочку равенств:

$$\left|\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot \hat{\delta}_3^i \cdot (\hat{\delta}_3^x)^* \cdot \hat{\gamma}_4\right| =$$

$$= \left|\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot \hat{\delta}_3^i \cdot (\hat{\delta}_3^x)^* \cdot \hat{\gamma}_4\right| =$$

$$= \left|\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot (\nu^x)^* \cdot \nu^{y \cdot i} \cdot (\nu^{x \cdot y})^* \cdot \hat{\gamma}_4\right| =$$

$$= \left|\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot (\nu^x)^* \cdot \nu^{y \cdot i} \cdot \hat{\gamma}_4\right| =$$

$$= \left|\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot \hat{\delta}_3^i \cdot \hat{\gamma}_4\right|.$$

Так как выражение

$$\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4$$

имеет правильный линейный вид, то и выражение

$$\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot \hat{\delta}_3^i \cdot \hat{\gamma}_4$$

имеет правильный линейный вид. При $i > 0$ это очевидно. При $i = 0$ это следует из того, что первые буквы слов $\hat{\delta}_2$ и $\hat{\delta}_3$ совпадают и отличаются от первой буквы слова $\hat{\gamma}_4$. Осталось оценить сложности полученных выражений:

$$n_1 \le L(\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^{x-1} \cdot (\beta_3^x)^* \cdot \alpha_4) \le$$

$$\le L(\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4) + 2l(\beta_3^x) \le n + 2x \cdot l(\beta_3) \le$$

$$\le n + 2nm \cdot n = n + 2n^2 m,$$

$$n_2 \le L(\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot \hat{\delta}_3^{x-1} \cdot \hat{\gamma}_4) \le$$

$$\le L(\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4) + x \cdot l(\hat{\delta}_3) \le nm + nm \cdot nm = nm + n^2 m^2.$$

Случай 1.3. $\hat{\gamma}_2 \ne \lambda$, $\hat{\gamma}_3 = \lambda$, $\hat{\delta}_2$ и $\hat{\delta}_3$ не соизмеримы. Делим P на P_i исходя из следующей цепочки преобразований:

$$P = |\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4| =$$

$$= \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot (\lambda \vee \beta_3 \vee \ldots \vee \beta_3^{x-1} \vee \beta_3^x \cdot (\beta_3)^*) \cdot \alpha_4\right| =$$

$$= |\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4| \cup |\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3 \cdot \alpha_4| \cup$$

$$\cup \ldots \cup |\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^x \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4| .$$

Здесь по определению $x := l(\hat{\delta}_2)$. При $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq x$ положим:

$$P_i := \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^{i-1} \cdot \alpha_4\right| .$$

И еще

$$P_{x+1} := |\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^x \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4| .$$

При всех $1 \leq i \leq x$ выражение

$$\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^{i-1} \cdot \alpha_4$$

имеет правильный линейный вид, так как исходное выражение

$$\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4$$

имеет правильный линейный вид. По тем же причинам и выражение

$$\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^x \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4$$

имеет правильный линейный вид. При всех $1 \leq i \leq x$ имеем:

$$\tilde{f}(P_i) = \tilde{f}(\left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^{i-1} \cdot \alpha_4\right|) =$$

$$= \left|\gamma_1 \cdot (\delta_1)^* \cdot \gamma_2 \cdot (\delta_2)^* \cdot \gamma_3 \cdot \delta_3^{i-1} \cdot \gamma_4\right| =$$

$$= \left|\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot \hat{\delta}_3^{i-1} \cdot \hat{\gamma}_4\right| .$$

Последнее равенство выполнено по тем же причинам, что и в случае 1.2. Здесь и далее аналогичные комментарии будем опускать. Продолжаем цепочку равенств:

$$\left|\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot \hat{\delta}_3^{i-1} \cdot \hat{\gamma}_4\right| = \left|\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot \hat{\delta}_3^{i-1} \cdot \hat{\gamma}_4\right| .$$

Возможно, первые буквы слов $\hat{\delta}_2$ и $\hat{\delta}_3^{i-1} \cdot \hat{\gamma}_4$ совпадают и выражение

$$\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot \hat{\delta}_3^{i-1} \cdot \hat{\gamma}_4$$

еще не правильного линейного вида. Тогда к нему нужно применить операцию "перекидывания". Полученное выражение будет иметь ту же сложность и уже будет правильного линейного вида. Теперь разберемся с P_{x+1} :

$$\tilde{f}(P_{x+1}) = \tilde{f}(|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^x \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4|) =$$

$$= |\gamma_1 \cdot (\delta_1)^* \cdot \gamma_2 \cdot (\delta_2)^* \cdot \gamma_3 \cdot \delta_3^x \cdot (\delta_3)^* \cdot \gamma_4| =$$

$$= \left|\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot \hat{\delta}_3^x \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4\right| =$$

$$= \left|\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot \hat{\delta}_3^x \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4\right|.$$

Из леммы 11 мы знаем, что слово $\hat{\delta}_3^x$ не является префиксом сверхслова $(\hat{\delta}_2)^\infty$. Обозначим через h_1 их наибольший общий префикс. И пусть h_2 - результат удаления из начала слова $\hat{\delta}_3^x$ этого префикса, то есть $\hat{\delta}_3^x = h_1 h_2$. Тогда после применения операции "перекидывания"к $(\hat{\delta}_2)^* \cdot h_1 h_2$ получаем для некоторого $\tilde{\delta}_2$:

$$(\hat{\delta}_2)^* \cdot h_1 h_2 = h_1 \cdot (\tilde{\delta}_2)^* \cdot h_2.$$

При этом, $l(\tilde{\delta}_2) = l(\hat{\delta}_2)$ и первые буквы слов $\tilde{\delta}_2$ и h_2 различны. Продолжаем цепочку равенств:

$$\left|\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot \hat{\delta}_3^x \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4\right| =$$

$$= \left|\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot h_1 \cdot (\tilde{\delta}_2)^* \cdot h_2 \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4\right|.$$

Выражение $\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot h_1 \cdot (\tilde{\delta}_2)^* \cdot h_2 \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4$ имеет правильный линейный вид. Осталось оценить сложности полученных выражений:

$$n_1 \leq \max(L(\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^{x-1} \cdot \alpha_4),$$

$$L(\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^x \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4) \leq$$

$$\leq L(\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^x \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4) \leq$$

$$\leq L(\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4) + l(\beta_3^x) \leq$$

$$\le n + x \cdot l(\beta_3) = n + l(\hat{\delta}_2) \cdot l(\beta_3) \le n + nm \cdot n = n + n^2 m,$$

$$n_2 \le \max(L(\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot \hat{\delta}_3^{x-1} \cdot \hat{\gamma}_4),$$

$$L(\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot h_1 \cdot (\tilde{\delta}_2)^* \cdot h_2 \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4)) \le$$

$$\le \max(L(\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4) +$$

$$+ x \cdot l(\hat{\delta}_3), L(\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot \hat{\delta}_3^x \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4)) \le$$

$$\le \max(nm + nm \cdot nm, L(\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4) +$$

$$+ x \cdot l(\hat{\delta}_3)) \le \max(nm + nm \cdot nm, nm + nm \cdot nm) = nm + n^2 m^2.$$

Случай 2.1. $\hat{\gamma}_2 = \lambda$, $\hat{\delta}_1$ и $\hat{\delta}_2$ соизмеримы, $\hat{\gamma}_3 \ne \lambda$. Тогда для некоторых $\nu \in B^*$, $x, y \in \mathbb{N}$ имеем:

$$\hat{\delta}_1 = \nu^x, \ \hat{\delta}_2 = \nu^y.$$

Помним, что $\max(x, y) \le nm$. Делим P на P_i :

$$P = |\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4| =$$

$$= \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\lambda \vee \beta_2 \vee \ldots \vee \beta_2^{x-1}) \cdot (\beta_2^x)^* \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4\right| =$$

$$= |\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2^x)^* \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4| \cup$$

$$\cup |\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2 \cdot (\beta_2^x)^* \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4| \cup$$

$$\cup \ldots \cup \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^{x-1} \cdot (\beta_2^x)^* \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4\right|.$$

При $0 \le i \le x - 1$ берем:

$$P_i := \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^i \cdot (\beta_2^x)^* \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4\right|.$$

При всех i выражение

$$\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^i \cdot (\beta_2^x)^* \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4$$

имеет правильный линейный вид. Разберемся теперь с $\tilde{f}(P_i)$:

$$\tilde{f}(P_i) = \tilde{f}(\left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^i \cdot (\beta_2^x)^* \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4\right|) =$$

$$= \left|\gamma_1 \cdot (\delta_1)^* \cdot \gamma_2 \cdot \delta_2^i \cdot (\delta_2^x)^* \cdot \gamma_3 \cdot (\delta_3)^* \cdot \gamma_4\right| =$$

$$= \left|\gamma_1 \cdot (\delta_1)^* \cdot \gamma_2 \cdot (\delta_2^x)^* \cdot \delta_2^i \cdot \gamma_3 \cdot (\delta_3)^* \cdot \gamma_4\right| =$$

$$= \left|\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot (\hat{\delta}_2^x)^* \cdot \hat{\delta}_2^i \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4\right| =$$

$$= \left|\hat{\gamma}_1 \cdot (\nu^x)^* \cdot (\nu^{xy})^* \cdot \hat{\nu}^{yi} \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4\right| =$$

$$= \left|\hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\nu}^{yi} \cdot (\nu^x)^* \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4\right| =$$

$$= \left|\hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\delta}_2^i \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4\right|.$$

Выражение

$$\hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\delta}_2^i \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot \hat{\delta}_3^* \cdot \hat{\gamma}_4$$

имеет правильный линейный вид, так как первая буква слова $\hat{\delta}_1$ равна первой букве слова $\hat{\delta}_2$ и, значит, отличается от первой буквы слова $\hat{\gamma}_3$. Отсюда получаем:

$$n_1 \le L(\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^{x-1} \cdot (\beta_2^x)^* \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4) \le$$

$$\le L(\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4) + 2l(\beta_2^x) \le$$

$$\le n + 2l(\beta_2) \cdot x \le n + 2n \cdot nm = n + 2n^2m,$$

$$n_2 \le L(\hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\delta}_2^{x-1} \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4) \le$$

$$\le L(\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4) + x \cdot l(\hat{\delta}_2) \le$$

$$\le nm + nm \cdot nm = nm + n^2m^2.$$

Случай 2.2. $\hat{\gamma}_2 = \hat{\gamma}_3 = \lambda$, $\hat{\delta}_1$ и $\hat{\delta}_2$ соизмеримы, $\hat{\delta}_1$ и $\hat{\delta}_3$ соизмеримы. Тогда для некоторых $\nu_1, \nu_2 \in B^*$, $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{N}$ имеем:

$$\hat{\delta}_1 = \nu_1^{x_1},\ \hat{\delta}_2 = \nu_1^{y_1},\ \hat{\delta}_1 = \nu_2^{x_2},\ \hat{\delta}_3 = \nu_2^{y_2}.$$

Помним, что $\max(x_1, x_2, y_1, y_2) \le nm$. Делим P :

$$P = |\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4| =$$

$$= |\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\lambda \vee \beta_2 \vee \ldots \vee \beta_2^{x_1-1}) \cdot (\beta_2^{x_1})^* \cdot \alpha_3 \cdot$$

$$\cdot (\lambda \vee \beta_3 \vee \ldots \vee \beta_3^{x_2-1}) \cdot (\beta_3^{x_2})^* \cdot \alpha_4| = |\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2^{x_1})^* \cdot \alpha_3 \cdot$$

$$\cdot (\beta_3^{x_2})^* \cdot \alpha_4| \cup$$

$$\cup \ldots \cup \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^{x_1-1} \cdot (\beta_2^{x_1})^* \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^{x_2-1} \cdot (\beta_3^{x_2})^* \cdot \alpha_4\right|.$$

При $0 \le i \le x_1 - 1$, $0 \le j \le x_2 - 1$ берем:

$$P_{i,j} := \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^i \cdot (\beta_2^{x_1})^* \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^j \cdot (\beta_3^{x_2})^* \cdot \alpha_4\right|.$$

При всех i, j выражение

$$\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^i \cdot (\beta_2^{x_1})^* \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^j \cdot (\beta_3^{x_2})^* \cdot \alpha_4$$

имеет правильный линейный вид. Разберемся теперь с $\tilde{f}(P_{i,j})$:

$$\tilde{f}(P_{i,j}) = \tilde{f}(\left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^i \cdot (\beta_2^{x_1})^* \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^j \cdot (\beta_3^{x_2})^* \cdot \alpha_4\right|) =$$

$$= \left|\gamma_1 \cdot (\delta_1)^* \cdot \gamma_2 \cdot \delta_2^i \cdot (\delta_2^{x_1})^* \cdot \gamma_3 \cdot \delta_3^j \cdot (\delta_3^{x_2})^* \cdot \gamma_4\right| =$$

$$= \left|\gamma_1 \cdot (\delta_1)^* \cdot \gamma_2 \cdot (\delta_2^{x_1})^* \cdot \delta_2^i \cdot \gamma_3 \cdot (\delta_3^{x_2})^* \cdot \delta_3^j \cdot \gamma_4\right| =$$

$$= \left|\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot (\hat{\delta}_2^{x_1})^* \cdot \hat{\delta}_2^i \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot (\hat{\delta}_3^{x_2})^* \cdot \hat{\delta}_3^j \cdot \hat{\gamma}_4\right| =$$

$$= \left|\hat{\gamma}_1 \cdot (\nu_1^{x_1})^* \cdot (\nu_1^{x_1 y_1})^* \cdot \hat{\nu}_1^{y_1 i} \cdot (\hat{\delta}_3^{x_2})^* \cdot \hat{\delta}_3^j \cdot \hat{\gamma}_4\right| =$$

$$= \left|\hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\nu}_1^{y_1 i} \cdot (\nu_1^{x_1})^* \cdot (\hat{\delta}_3^{x_2})^* \cdot \hat{\delta}_3^j \cdot \hat{\gamma}_4\right| =$$

$$= \left|\hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\delta}_2^i \cdot (\nu_2^{x_2})^* \cdot (\hat{\nu}_2^{x_2 y_2})^* \cdot \hat{\nu}_2^{y_2 j} \cdot \hat{\gamma}_4\right| =$$

$$= \left|\hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\delta}_2^i \cdot \hat{\nu}_2^{y_2 j} \cdot (\nu_2^{x_2})^* \cdot \hat{\gamma}_4\right| =$$

$$= \left|\hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\delta}_2^i \cdot \hat{\delta}_3^j \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_4\right|.$$

Выражение

$$\gamma_1 \cdot \hat{\delta}_2^i \cdot \hat{\delta}_3^j \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_4$$

имеет правильный линейный вид, так как первая буква слова $\hat{\delta}_1$ равна первой букве слова $\hat{\delta}_3$ и, значит, отличается от первой буквы слова $\hat{\gamma}_4$. Отсюда получаем:

$$n_1 \le L(\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^{x_1 - 1} \cdot (\beta_2^{x_1})^* \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^{x_2 - 1} \cdot (\beta_3^{x_2})^* \cdot \alpha_4) \le$$

$$\le L(\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4) + 2l(\beta_2^{x_1}) + 2l(\beta_3^{x_2}) \le$$

$$\le n + 2l(\beta_2) \cdot x_1 + 2l(\beta_3) \cdot x_2 \le n + 2(l(\beta_2) + l(\beta_3)) \cdot nm \le n + 2n \cdot nm =$$

$$= n + 2n^2 m,$$

$$n_2 \leq L(\gamma_1 \cdot \hat{\delta}_2^{x_1-1} \cdot \hat{\delta}_3^{x_2-1} \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_4) \leq$$
$$\leq L(\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4) + x_1 \cdot l(\hat{\delta}_2) + x_2 \cdot l(\hat{\delta}_3) \leq$$
$$\leq nm + nm \cdot nm = nm + n^2m^2.$$

Случай 2.3. $\hat{\gamma}_2 = \hat{\gamma}_3 = \lambda$, $\hat{\delta}_1$ и $\hat{\delta}_2$ соизмеримы, $\hat{\delta}_1$ и $\hat{\delta}_3$ не соизмеримы. Тогда для некоторых $\nu \in B^*$, $x, y \in \mathbb{N}$ имеем:

$$\hat{\delta}_1 = \nu^x, \ \hat{\delta}_2 = \nu^y.$$

Помним, что $\max(x, y) \leq nm$. Пусть $z := l(\hat{\delta}_1)$. Из леммы 11 мы знаем, что слово $\hat{\delta}_3^z$ не является префиксом сверхслова $(\hat{\delta}_1)^\infty$. Обозначим через h_1 их наибольший общий префикс. И пусть h_2 - результат удаления из начала слова $\hat{\delta}_3^z$ этого префикса, то есть $\hat{\delta}_3^z = h_1 h_2$. Тогда после применения операции "перекидывания"к $(\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_3^z$ получаем для некоторого $\tilde{\delta}_1$:

$$(\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_3^z = (\hat{\delta}_1)^* \cdot h_1 h_2 = h_1 \cdot (\tilde{\delta}_1)^* \cdot h_2.$$

Теперь мы можем разделить P :

$$P = |\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4| =$$
$$= |\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\lambda \vee \beta_2 \vee \ldots \vee \beta_2^{x-1}) \cdot (\beta_2^x)^* \cdot \alpha_3 \cdot$$
$$\cdot (\lambda \vee \beta_3 \vee \ldots \vee \beta_3^{z-1} \vee \beta_3^z \cdot (\beta_3)^*) \alpha_4| =$$
$$= |\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2^x)^* \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4| \cup \ldots \cup |\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot$$
$$\cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^{x-1} \cdot (\beta_2^x)^* \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^z \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4|.$$

При $0 \leq i \leq x-1$, $0 \leq j \leq z-1$ берем:

$$P_{i,j} := \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^i \cdot (\beta_2^x)^* \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^j \cdot \alpha_4\right|,$$

$$P_i := \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^i \cdot (\beta_2^x)^* \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^z \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4\right|.$$

При всех i, j выражение

$$\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^i \cdot (\beta_2^x)^* \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^j \cdot \alpha_4$$

имеет правильный линейный вид. В свою очередь, при всех i выражение

$$\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^i \cdot (\beta_2^x)^* \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^z \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4$$

тоже имеет правильный линейный вид. Разберемся теперь с $\tilde{f}(P_{i,j})$ и $\tilde{f}(P_i)$:

$$\tilde{f}(P_{i,j}) = \tilde{f}(\left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^i \cdot (\beta_2^x)^* \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^j \cdot \alpha_4\right|) =$$

$$= \left|\gamma_1 \cdot (\delta_1)^* \cdot \gamma_2 \cdot \delta_2^i \cdot (\delta_2^x)^* \cdot \gamma_3 \cdot \delta_3^j \cdot \gamma_4\right| =$$

$$= \left|\gamma_1 \cdot (\delta_1)^* \cdot \gamma_2 \cdot (\delta_2^x)^* \cdot \delta_2^i \cdot \gamma_3 \cdot \delta_3^j \cdot \gamma_4\right| =$$

$$= \left|\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot (\hat{\delta}_2^x)^* \cdot \hat{\delta}_2^i \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot \hat{\delta}_3^j \cdot \hat{\gamma}_4\right| =$$

$$= \left|\hat{\gamma}_1 \cdot (\nu^x)^* \cdot (\nu^{xy})^* \cdot \hat{\nu}^{yi} \cdot \hat{\delta}_3^j \cdot \hat{\gamma}_4\right| = \left|\hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\nu}^{yi} \cdot (\nu^x)^* \cdot \hat{\delta}_3^j \cdot \hat{\gamma}_4\right| =$$

$$= \left|\hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\delta}_2^i \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_3^j \cdot \hat{\gamma}_4\right|,$$

$$\tilde{f}(P_i) = \tilde{f}(\left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^i \cdot (\beta_2^x)^* \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^z \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4\right|) =$$

$$= \left|\gamma_1 \cdot (\delta_1)^* \cdot \gamma_2 \cdot \delta_2^i \cdot (\delta_2^x)^* \cdot \gamma_3 \cdot \delta_3^z \cdot (\delta_3)^* \cdot \gamma_4\right| =$$

$$= \left|\gamma_1 \cdot (\delta_1)^* \cdot \gamma_2 \cdot (\delta_2^x)^* \cdot \delta_2^i \cdot \gamma_3 \cdot (\delta_3)^* \cdot \delta_3^z \cdot \gamma_4\right| =$$

$$= \left|\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot (\hat{\delta}_2^x)^* \cdot \hat{\delta}_2^i \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\delta}_3^z \cdot \hat{\gamma}_4\right| =$$

$$= \left|\hat{\gamma}_1 \cdot (\nu^x)^* \cdot (\nu^{xy})^* \cdot \hat{\nu}^{yi} \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\delta}_3^z \cdot \hat{\gamma}_4\right| =$$

$$= \left|\hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\nu}^{yi} \cdot (\nu^x)^* \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\delta}_3^z \cdot \hat{\gamma}_4\right| = \left|\hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\delta}_2^i \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_3^z \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4\right| =$$

$$= \left|\hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\delta}_2^i \cdot h_1 \cdot (\tilde{\delta}_1)^* \cdot h_2 \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4\right|.$$

Возможно, первые буквы слов $\hat{\delta}_1$ и $\hat{\delta}_3^j \cdot \hat{\gamma}_4$ совпадают и выражение

$$\hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\delta}_2^i \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_3^j \cdot \hat{\gamma}_4$$

еще не правильного линейного вида. Тогда к нему нужно применить операцию "перекидывания". Полученное выражение будет иметь ту же сложность и уже будет правильного линейного вида. Выражение

$$\hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\delta}_2^i \cdot h_1 \cdot (\tilde{\delta}_1)^* \cdot h_2 \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4$$

имеет правильный линейный вид. Осталось оценить сложность полученных выражений:

$$n_1 \leq \max(L(\alpha_1(\beta_1)^*\alpha_2\beta_2^{x-1}(\beta_2^x)^*\alpha_3\beta_3^{z-1}\alpha_4),$$

$$L(\alpha_1(\beta_1)^*\alpha_2\beta_2^{x-1}(\beta_2^x)^*\alpha_3\beta_3^z(\beta_3)^*\alpha_4)) \leq$$

$$\leq L(\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4) + 2l(\beta_2^x) + l(\beta_3^z) \leq$$

$$\leq n + 2l(\beta_2) \cdot x + l(\beta_3) \cdot z \leq n + (2l(\beta_2) + l(\beta_3)) \cdot nm = n + 2n \cdot nm =$$

$$= n + 2n^2 m;$$

$$n_2 \leq \max(L(\hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\delta}_2^{x-1} \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_3^{z-1} \cdot \hat{\gamma}_4), L(\hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\delta}_2^{x-1} \cdot h_1 \cdot (\tilde{\delta}_1)^* \cdot h_2 \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4)) =$$

$$= \max(L(\hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\delta}_2^{x-1} \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_3^{z-1} \cdot \hat{\gamma}_4), L(\hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\delta}_2^{x-1} \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_3^{z} \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4)) \leq$$

$$\leq L(\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4) + x \cdot l(\hat{\delta}_2) + z \cdot l(\hat{\delta}_3) \leq$$

$$\leq nm + nm(l(\hat{\delta}_2) + l(\hat{\delta}_3)) \leq nm + nm \cdot nm = nm + n^2 m^2.$$

Случай 3.1. $\hat{\gamma}_2 = \lambda$, $\hat{\delta}_1$ и $\hat{\delta}_2$ не соизмеримы, $\hat{\gamma}_3 \neq \lambda$. Пусть $x := l(\hat{\delta}_1)$. Из леммы 11 мы знаем, что слово $\hat{\delta}_2^x$ не является префиксом сверхслова $(\hat{\delta}_1)^\infty$. Обозначим через h_1 их наибольший общий префикс. И пусть h_2 - результат удаления из начала слова $\hat{\delta}_2^x$ этого префикса, то есть $\hat{\delta}_2^x = h_1 h_2$. Тогда после применения операции "перекидывания"к $(\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_2^x$ получаем для некоторого $\tilde{\delta}_1$:

$$(\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_2^x = (\hat{\delta}_1)^* \cdot h_1 h_2 = h_1 \cdot (\tilde{\delta}_1)^* \cdot h_2.$$

Теперь мы можем разделить P :

$$P = |\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4| =$$

$$= \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\lambda \vee \beta_2 \vee \ldots \vee \beta_2^{x-1} \vee \beta_2^x \cdot (\beta_2)^*) \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4\right| =$$

$$= |\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4| \cup \ldots \cup$$

$$\cup \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^x \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4\right|.$$

При $0 \leq i \leq x - 1$ берем:

$$P_i := \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^i \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4\right|.$$

И еще:

$$P_x := |\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^x \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4|\,.$$

При всех i выражение

$$\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^i \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4$$

имеет правильный линейный вид. В свою очередь, выражение

$$\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^x \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4$$

тоже имеет правильный линейный вид. Разберемся теперь с $\tilde{f}(P_i)$ и $\tilde{f}(P_x)$:

$$\tilde{f}(P_i) = \tilde{f}(\big|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^i \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4\big|) =$$

$$= \big|\gamma_1 \cdot (\delta_1)^* \cdot \gamma_2 \cdot \delta_2^i \cdot \gamma_3 \cdot (\delta_3)^* \cdot \gamma_4\big| =$$

$$= \Big|\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot \hat{\delta}_2^i \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4\Big| =$$

$$= \Big|\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_2^i \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4\Big|,$$

$$\tilde{f}(P_x) = \tilde{f}(|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^x \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4|) =$$

$$= |\gamma_1 \cdot (\delta_1)^* \cdot \gamma_2 \cdot \delta_2^x \cdot (\delta_2)^* \cdot \gamma_3 \cdot (\delta_3)^* \cdot \gamma_4| =$$

$$= \Big|\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot \hat{\delta}_2^x \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4\Big| =$$

$$= \Big|\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_2^x \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4\Big| =$$

$$= \Big|\hat{\gamma}_1 \cdot h_1 \cdot (\tilde{\delta}_1)^* \cdot h_2 \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4\Big|\,.$$

Если первые буквы слов $\hat{\delta}_1$ и $\hat{\delta}_2^i \cdot \hat{\gamma}_3$ совпадают и выражение

$$\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_2^i \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4$$

еще не правильного линейного вида, то к нему нужно применить операцию "перекидывания". Полученное выражение будет иметь ту же сложность и уже будет правильного линейного вида. В свою очередь, выражение

$$\hat{\gamma}_1 \cdot h_1 \cdot (\tilde{\delta}_1)^* \cdot h_2 \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4$$

тоже имеет правильный линейный вид. Осталось оценить сложность полученных выражений:

$$n_1 \leq \max(L(\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^{x-1} \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4),$$
$$L(\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^{x} \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4)) \leq$$
$$\leq L(\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4) + l(\beta_2^x) \leq n + l(\beta_2) \cdot x \leq$$
$$\leq n + n \cdot nm = n + n^2 m,$$
$$n_2 \leq \max(L(\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_2^{x-1} \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4),$$
$$L(\hat{\gamma}_1 \cdot h_1 \cdot (\tilde{\delta}_1)^* \cdot h_2 \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4)) =$$
$$= \max(L(\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_2^{x-1} \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4),$$
$$L(\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_2^{x} \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4)) \leq$$
$$\leq L(\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4) + x \cdot l(\hat{\delta}_2) \leq nm + nm \cdot nm = nm + n^2 m^2.$$

Случай 3.2. $\hat{\gamma}_2 = \hat{\gamma}_3 = \lambda$, $\hat{\delta}_1$ и $\hat{\delta}_2$ не соизмеримы, $\hat{\delta}_2$ и $\hat{\delta}_3$ соизмеримы. Тогда для некоторых $\nu \in B^*$, $x, y \in \mathbb{N}$ имеем:

$$\hat{\delta}_2 = \nu^x, \ \hat{\delta}_3 = \nu^y.$$

Помним, что $\max(x, y) \leq nm$. Пусть $z := l(\hat{\delta}_1)$. Из леммы 11 мы знаем, что слово $\hat{\delta}_2^z$ не является префиксом сверхслова $(\hat{\delta}_1)^\infty$. Обозначим через h_1 их наибольший общий префикс. И пусть h_2 - результат удаления из начала слова $\hat{\delta}_2^z$ этого префикса, то есть $\hat{\delta}_2^z = h_1 h_2$. Тогда после применения операции "перекидывания"к $(\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_2^z$ получаем для некоторого $\tilde{\delta}_1$:

$$(\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_2^z = (\hat{\delta}_1)^* \cdot h_1 h_2 = h_1 \cdot (\tilde{\delta}_1)^* \cdot h_2.$$

Кроме того, слово $\hat{\delta}_3^z$ не является префиксом сверхслова $(\hat{\delta}_1)^\infty$, так как слова $\hat{\delta}_1$ и $\hat{\delta}_3$ не соизмеримы. Обозначим через g_1 их наибольший общий префикс. И пусть g_2 - результат удаления из начала слова $\hat{\delta}_3^z$ этого префикса, то есть $\hat{\delta}_3^z = g_1 g_2$. Тогда после применения операции "перекидывания"к $(\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_3^z$ получаем для некоторого $\bar{\delta}_1$:

$$(\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_3^z = (\hat{\delta}_1)^* \cdot g_1 g_2 = g_1 \cdot (\bar{\delta}_1)^* \cdot g_2.$$

Теперь мы можем разделить P :

$$P = |\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4| =$$

$$= \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\lambda \vee \beta_2 \vee \ldots \vee \beta_2^{z-1} \vee \beta_2^z \cdot (\beta_2)^*) \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4\right| =$$

$$= \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\lambda \vee \beta_2 \vee \ldots \vee \beta_2^{z-1}) \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4\right| \cup$$

$$\cup |\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^z \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4| =$$

$$= |\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\lambda \vee \beta_2 \vee \ldots \vee \beta_2^{z-1}) \cdot \alpha_3 \cdot$$

$$\cdot (\lambda \vee \beta_3 \vee \ldots \vee \beta_3^{z-1} \vee \beta_3^z \cdot (\beta_3)^*) \cdot \alpha_4| \cup$$

$$\cup \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^z \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot (\lambda \vee \beta_3 \vee \ldots \vee \beta_3^{x-1}) \cdot (\beta_3^x)^* \cdot \alpha_4\right| =$$

$$= |\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4| \cup \ldots \cup$$

$$\cup \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^{z-1} \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^z \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4\right| \cup$$

$$\cup |\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^z \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3^x)^* \cdot \alpha_4| \cup$$

$$\cup \ldots \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^z \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^{x-1} \cdot (\beta_3^x)^* \cdot \alpha_4\right|.$$

При $0 \leq i \leq z-1$, $0 \leq j \leq z-1$, $0 \leq k \leq x-1$ берем:

$$P_{i,j} := \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^i \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^j \cdot \alpha_4\right|,$$

$$P_i := \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^i \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^z \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4\right|,$$

$$P'_k := \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^z \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^k \cdot (\beta_3^x)^* \cdot \alpha_4\right|.$$

При всех i, j, k выражения

$$\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^i \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^j \cdot \alpha_4,$$

$$\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^i \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^z \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4,$$

$$\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^z \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^k \cdot (\beta_3^x)^* \cdot \alpha_4$$

имеют правильный линейный вид. Разберемся теперь с $\tilde{f}(P_{i,j})$, $\tilde{f}(P_i)$ и $\tilde{f}(P'_j)$:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(P_{i,j}) = \tilde{f}(\big|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^i \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^j \cdot \alpha_4\big|) &= \\
= \left|\gamma_1 \cdot (\delta_1)^* \cdot \gamma_2 \cdot \delta_2^i \cdot \gamma_3 \cdot \delta_3^j \cdot \gamma_4\right| &= \\
= \left|\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot \hat{\delta}_2^i \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot \hat{\delta}_3^j \cdot \hat{\gamma}_4\right| &= \\
= \left|\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_2^i \cdot \hat{\delta}_3^j \cdot \hat{\gamma}_4\right|&,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(P_i) = \tilde{f}(\big|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^i \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^z \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4\big|) &= \\
= \left|\gamma_1 \cdot (\delta_1)^* \cdot \gamma_2 \cdot \delta_2^i \cdot \gamma_3 \cdot \delta_3^z \cdot (\delta_3)^* \cdot \gamma_4\right| &= \\
= \left|\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot \hat{\delta}_2^i \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot \hat{\delta}_3^z \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4\right| &= \\
= \left|\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_2^i \cdot \hat{\delta}_3^z \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4\right| &= \\
= \left|\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_3^z \cdot \hat{\delta}_2^i \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4\right| &= \\
= \left|\hat{\gamma}_1 \cdot g_1 \cdot (\bar{\delta}_1)^* \cdot g_2 \cdot \hat{\delta}_2^i \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4\right|&,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(P'_j) = \tilde{f}(\big|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^z \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^k \cdot (\beta_3^x)^* \cdot \alpha_4\big|) &= \\
= \left|\gamma_1 \cdot (\delta_1)^* \cdot \gamma_2 \cdot \delta_2^z \cdot (\delta_2)^* \cdot \gamma_3 \cdot \delta_3^k \cdot (\delta_3^x)^* \cdot \gamma_4\right| &= \\
= \left|\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot \hat{\delta}_2^z \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot \hat{\delta}_3^k \cdot (\hat{\delta}_3^x)^* \cdot \hat{\gamma}_4\right| &= \\
= \left|\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_2^z \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot (\hat{\delta}_3^x)^* \cdot \hat{\delta}_3^k \cdot \hat{\gamma}_4\right| &= \\
= \left|\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_2^z \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot \hat{\delta}_3^k \cdot \hat{\gamma}_4\right| &= \\
= \left|\hat{\gamma}_1 \cdot h_1 \cdot (\tilde{\delta}_1)^* \cdot h_2 \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot \hat{\delta}_3^k \cdot \hat{\gamma}_4\right| &= \\
= \left|\hat{\gamma}_1 \cdot h_1 \cdot (\tilde{\delta}_1)^* \cdot h_2 \cdot \hat{\delta}_3^k \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot \hat{\gamma}_4\right|&.
\end{aligned}$$

Если первые буквы слов $\hat{\delta}_1$ и $\hat{\delta}_2^i \cdot \hat{\delta}_3^j \cdot \hat{\gamma}_4$ совпадают и выражение

$$\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_2^i \cdot \hat{\delta}_3^j \cdot \hat{\gamma}_4$$

еще не правильного линейного вида, то к нему нужно применить операцию "перекидывания". Полученное выражение будет иметь ту же сложность и уже будет правильного линейного вида. Выражение

$$\hat{\gamma}_1 \cdot g_1 \cdot (\bar{\delta}_1)^* \cdot g_2 \cdot \hat{\delta}_2^i \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4$$

тоже имеет правильный линейный вид. Наконец, выражение

$$\hat{\gamma}_1 \cdot h_1 \cdot (\tilde{\delta}_1)^* \cdot h_2 \cdot \hat{\delta}_3^k \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot \hat{\gamma}_4$$

имеет правильный линейный вид, так как первая буква слова $\hat{\delta}_2$ совпадает с первой буквой $\hat{\delta}_3$ и значит отличается от первой буквы слова γ_4. Теперь оценим сложность полученных выражений:

$$n_1 \leq \max(L(\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^{z-1} \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^{z-1} \cdot \alpha_4),$$
$$L(\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^{z-1} \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^{z} \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4),$$
$$L(\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^{z} \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^{x-1} \cdot (\beta_3^x)^* \cdot \alpha_4)) \leq$$
$$\leq L(\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4) +$$
$$+ \max(l(\beta_2^z) + l(\beta_3^z), l(\beta_2^z) + l(\beta_3^z), l(\beta_2^z) + 2l\beta_3^x)) \leq$$
$$\leq n + \max((l(\beta_2) + l(\beta_3)) \cdot z, 2(l(\beta_2) + l(\beta_3)) \max(x, z)) \leq n + 2n \cdot nm =$$
$$= n + 2n^2 m;$$

$$n_2 \leq \max(L(\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_2^{z-1} \cdot \hat{\delta}_3^{z-1} \cdot \hat{\gamma}_4), L(\hat{\gamma}_1 \cdot g_1 \cdot (\bar{\delta}_1)^* \cdot g_2 \cdot \hat{\delta}_2^{z-1} \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4),$$
$$L(\hat{\gamma}_1 \cdot h_1 \cdot (\tilde{\delta}_1)^* \cdot h_2 \cdot \hat{\delta}_3^{x-1} \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot \hat{\gamma}_4)) = \max(L(\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_2^{z-1} \cdot \hat{\delta}_3^{z-1} \cdot \hat{\gamma}_4),$$
$$L(\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_3^{z} \cdot \hat{\delta}_2^{z-1} \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4, L(\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_2^{z} \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot \hat{\delta}_3^{x-1} \cdot \hat{\gamma}_4)) \leq$$
$$\leq L(\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4) +$$
$$+ \max(l(\delta_2^z) + l(\delta_3^z), l(\delta_3^z) + l(\delta_2^z), l(\delta_2^z) + l(\delta_3^x)) \leq$$
$$\leq nm + nm \cdot nm = nm + n^2 m^2.$$

Случай 3.3. $\hat{\gamma}_2 = \hat{\gamma}_3 = \lambda$, $\hat{\delta}_1$ и $\hat{\delta}_2$ не соизмеримы, $\hat{\delta}_2$ и $\hat{\delta}_3$ не соизмеримы. Из леммы 11 знаем, что слово $\hat{\delta}_2^{l(\hat{\delta}_1)}$ не является префиксом сверхслова $(\hat{\delta}_1)^\infty$. Пусть $z \in \mathbb{N}$ - минимальное число, при котором $\hat{\delta}_2^z$ - все еще не префикс сверхслова $(\hat{\delta}_1)^\infty$. Для всех

$i \in \mathbb{N}$, $i \leq z-1$ после применения операции "перекидывания"к $(\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_2^i$ получаем для некоторого $\hat{\delta}_{1,i}$:

$$(\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_2^i = \hat{\delta}_2^i \cdot (\hat{\delta}_{1,i})^*.$$

Здесь при всех i выполнено $l(\hat{\delta}_1) = l(\hat{\delta}_{1,i})$. Кроме того, пусть h_1 - наибольший общий префикс слова $\hat{\delta}_2^z$ и сверхслова $(\hat{\delta}_1)^\infty$. И пусть h_2 - результат удаления из начала слова $\hat{\delta}_2^z$ этого префикса, то есть $\hat{\delta}_2^z = h_1 h_2$. Тогда после применения операции "перекидывания"к $(\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_2^z$ получаем для некоторого $\tilde{\delta}_1$:

$$(\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_2^z = (\hat{\delta}_1)^* \cdot h_1 h_2 = h_1 \cdot (\tilde{\delta}_1)^* \cdot h_2.$$

Пусть $w := l(\hat{\delta}_2)$. Из леммы 11 знаем, что слово $\hat{\delta}_3^w$ не является префиксом сверхслова $(\hat{\delta}_2)^\infty$. Обозначим через g_1 их наибольший общий префикс. И пусть g_2 - результат удаления из начала слова $\hat{\delta}_3^w$ этого префикса, то есть $\hat{\delta}_3^w = g_1 g_2$. Тогда после применения операции "перекидывания"к $(\hat{\delta}_2)^* \cdot \hat{\delta}_3^w$ получаем для некоторого $\bar{\delta}_2$:

$$(\hat{\delta}_2)^* \cdot \hat{\delta}_3^w = (\hat{\delta}_2)^* \cdot g_1 g_2 = g_1 \cdot (\bar{\delta}_2)^* \cdot g_2.$$

Начинаем делить P :

$$P = |\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4| =$$

$$= \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\lambda \vee \beta_2 \vee \ldots \vee \beta_2^{z-1} \vee \beta_2^z \cdot (\beta_2)^*) \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4\right| =$$

$$= |\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4| \cup |\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2 \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4| \cup$$

$$\cup \ldots \cup |\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^{z-1} \cdot \alpha_3 \cdot$$

$$\cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4\| \cup |\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^z \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4| =$$

$$= |\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4| \cup |\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2 \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4| \cup$$

$$\cup \ldots \cup \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^{z-1} \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4\right| \cup$$

$$\cup |\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^z \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot (\lambda \vee \beta_3 \vee \ldots \vee \beta_3^{w-1} \vee \beta_3^w \cdot (\beta_3)^*) \cdot$$

$$\cdot \alpha_4| = |\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4| \cup$$

$$\cup |\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2 \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4| \cup \ldots \cup$$

$$\cup \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^{z-1} \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4\right| \cup$$
$$\cup \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^{z} \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4\right| \cup \ldots \cup$$
$$\cup \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^{z} \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^{w-1} \cdot \alpha_4\right| \cup$$
$$\cup \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^{z} \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^{w} \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4\right|.$$

При $0 \le i \le z-1$, $0 \le j \le w-1$ берем:

$$P_i := \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^{i} \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4\right|,$$

$$P'_j := \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^{z} \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^{j} \cdot \alpha_4\right|.$$

И еще:

$$P'_w := \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^{z} \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^{w} \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4\right|.$$

Выражения

$$\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^{z} \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^{j} \cdot \alpha_4,$$
$$\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^{z} \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^{w} \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4$$

имеют правильный линейный вид. Множества P_i надо еще делить. Но для этого найдем сначала $\tilde{f}(P_i)$:

$$\tilde{f}(P_i) = \left|\gamma_1 \cdot (\delta_1)^* \cdot \gamma_2 \cdot \delta_2^{i} \cdot \gamma_3 \cdot (\delta_3)^* \cdot \gamma_4\right| =$$
$$= \left|\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot \hat{\delta}_2^{i} \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4\right| =$$
$$= \left|\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_2^{i} \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4\right| = \left|\hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\delta}_2^{i} \cdot (\hat{\delta}_{1,i})^* \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4\right|.$$

Здесь возможны два варианта. Если слова $\hat{\delta}_{1,i}$ и $\hat{\delta}_3$ соизмеримы, то для некоторых $\nu \in B^*$, $x, y \in \mathbb{N}$ имеем:

$$\hat{\delta}_{1,i} = \nu^x,\ \hat{\delta}_3 = \nu^y.$$

Помним, что $\max(x, y) \le nm$. Тогда:

$$P_i = \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^{i} \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4\right| =$$
$$= \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^{i} \cdot \alpha_3 \cdot (\lambda \vee \beta_3 \vee \ldots \vee \beta_3^{x-1}) \cdot (\beta_3^{x})^* \cdot \alpha_4\right| =$$

$$= \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^i \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3^x)^* \cdot \alpha_4\right| \cup \ldots \cup$$
$$\cup \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^i \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^{x-1} \cdot (\beta_3^x)^* \cdot \alpha_4\right|.$$

Делим P_i на $P_{i,j}$ (при $0 \leq j \leq x-1$) :

$$P_{i,j} := \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^i \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^j \cdot (\beta_3^x)^* \cdot \alpha_4\right|.$$

Выражение

$$\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^i \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^j \cdot (\beta_3^x)^* \cdot \alpha_4$$

имеет правильный линейный вид. Разберемся теперь с $\tilde{f}(P_{i,j})$:

$$\tilde{f}(P_{i,j}) = \gamma_1 \cdot (\delta_1)^* \cdot \gamma_2 \cdot \delta_2^i \cdot \gamma_3 \cdot \delta_3^j \cdot (\delta_3^x)^* \cdot \gamma_4 = \hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot \hat{\delta}_2^i \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot \hat{\delta}_3^j \cdot (\hat{\delta}_3^x)^* \cdot \hat{\gamma}_4 =$$

$$= \hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_2^i \cdot \hat{\delta}_3^j \cdot (\hat{\delta}_3^x)^* \cdot \hat{\gamma}_4 = \hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\delta}_2^i \cdot (\hat{\delta}_{1,i})^* \cdot (\hat{\delta}_3^x)^* \cdot \hat{\delta}_3^j \cdot \hat{\gamma}_4 = \hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\delta}_2^i \cdot \hat{\delta}_3^j \cdot (\hat{\delta}_{1,i})^* \cdot \hat{\gamma}_4.$$

Выражение

$$\hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\delta}_2^i \cdot \hat{\delta}_3^j \cdot (\hat{\delta}_{1,i})^* \cdot \hat{\gamma}_4$$

имеет правильный линейный вид, так как первая буква слова $\hat{\delta}_{1,i}$ совпадает с первой буквой $\hat{\delta}_3$ и значит отличается от первой буквы слова γ_4. Разберем теперь второй случай, когда слова $\hat{\delta}_{1,i}$ и $\hat{\delta}_3$ не соизмеримы. Пусть $s := l(\hat{\delta}_{1,i})$. Из леммы 11 знаем, что слово $\hat{\delta}_3^s$ не является префиксом сверхслова $(\hat{\delta}_{1,i})^\infty$. Обозначим через k_1 их наибольший общий префикс. И пусть k_2 - результат удаления из начала слова $\hat{\delta}_3^s$ этого префикса, то есть $\hat{\delta}_3^s = k_1 k_2$. Тогда после применения операции "перекидывания"к $(\hat{\delta}_{1,i})^* \cdot \hat{\delta}_3^s$ получаем для некоторого $\tilde{\delta}_{1,i}$:

$$(\hat{\delta}_{1,i})^* \cdot \hat{\delta}_3^s = (\hat{\delta}_{1,i})^* \cdot k_1 k_2 = k_1 \cdot (\tilde{\delta}_{1,i})^* \cdot k_2.$$

Тогда:

$$P_i = \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^i \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4\right| =$$
$$= \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^i \cdot \alpha_3 \cdot (\lambda \vee \beta_3 \vee \ldots \vee \beta_3^{s-1} \vee \beta_3^s \cdot (\beta_3)^*) \cdot \alpha_4\right| =$$
$$= \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^i \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4\right| \cup \ldots \cup$$
$$\cup \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^i \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^s \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4\right|.$$

Делим P_i на $P_{i,j}$ (при $0 \leq j \leq s-1$) :

$$P_{i,j} := \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^i \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^j \cdot \alpha_4\right|.$$

И еще

$$P_{i,s} := \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^i \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^s \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4\right|.$$

Выражения

$$\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^i \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^j \cdot \alpha_4,$$

$$\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^i \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3^s \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4$$

имеют правильный линейный вид. Далее:

$$\tilde{f}(P_{i,j}) = \gamma_1 \cdot (\delta_1)^* \cdot \gamma_2 \cdot \delta_2^i \cdot \gamma_3 \cdot \delta_3^j \cdot \gamma_4 =$$

$$= \hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot \hat{\delta}_2^i \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot \hat{\delta}_3^j \cdot \hat{\gamma}_4 =$$

$$= \hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_2^i \cdot \hat{\delta}_3^j \cdot \hat{\gamma}_4 = \hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\delta}_2^i \cdot (\hat{\delta}_{1,i})^* \cdot \hat{\delta}_3^j \cdot \hat{\gamma}_4.$$

Если выражение

$$\hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\delta}_2^i \cdot (\hat{\delta}_{1,i})^* \cdot \hat{\delta}_3^j \cdot \hat{\gamma}_4$$

не правильного линейного вида, то к нему надо применить операцию "перекидывания". Длина выражения от этого не изменится, а выражение станет правильного линейного вида. Далее:

$$\tilde{f}(P_{i,s}) = \gamma_1 \cdot (\delta_1)^* \cdot \gamma_2 \cdot \delta_2^i \cdot \gamma_3 \cdot \delta_3^s \cdot \delta_3^* \cdot \gamma_4 =$$

$$= \hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot \hat{\delta}_2^i \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot \hat{\delta}_3^s \cdot \hat{\delta}_3^* \cdot \hat{\gamma}_4 =$$

$$= \hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_2^i \cdot \hat{\delta}_3^s \cdot \hat{\delta}_3^* \cdot \hat{\gamma}_4 = \hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\delta}_2^i \cdot (\hat{\delta}_{1,i})^* \cdot \hat{\delta}_3^s \cdot \hat{\delta}_3^* \cdot \hat{\gamma}_4 =$$

$$= \hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\delta}_2^i \cdot k_1 \cdot (\tilde{\delta}_{1,i})^* \cdot k_2 \cdot \hat{\delta}_3^* \cdot \hat{\gamma}_4.$$

Выражение

$$\hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\delta}_2^i \cdot k_1 \cdot (\tilde{\delta}_{1,i})^* \cdot k_2 \cdot \hat{\delta}_3^* \cdot \hat{\gamma}_4$$

правильного линейного вида. Разберемся теперь с $\tilde{f}(P'_j)$ и $\tilde{f}(P'_w)$:

$$\tilde{f}(P'_j) = \gamma_1 \cdot (\delta_1)^* \cdot \gamma_2 \cdot \delta_2^z \cdot (\delta_2)^* \cdot \gamma_3 \cdot \delta_3^j \cdot \gamma_4 = \hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot \hat{\delta}_2^z \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot \hat{\delta}_3^j \cdot \hat{\gamma}_4 =$$

$$= \hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_2^z \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot \hat{\delta}_3^j \cdot \hat{\gamma}_4 = \hat{\gamma}_1 \cdot h_1 \cdot (\tilde{\delta}_1)^* \cdot h_2 \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot \hat{\delta}_3^j \cdot \hat{\gamma}_4,$$

$$\tilde{f}(P'_w) = \gamma_1 \cdot (\delta_1)^* \cdot \gamma_2 \cdot \delta_2^z \cdot (\delta_2)^* \cdot \gamma_3 \cdot \delta_3^w \cdot (\delta_3)^* \cdot \gamma_4 =$$

$$= \hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot \hat{\delta}_2^z \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot \hat{\gamma}_3 \cdot \hat{\delta}_3^w \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4 = \hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_2^z \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot \hat{\delta}_3^w \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4 =$$

$$= \hat{\gamma}_1 \cdot h_1 \cdot (\tilde{\delta}_1)^* \cdot h_2 \cdot g_1 \cdot (\bar{\delta}_2)^* \cdot g_2 \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4.$$

Если выражение

$$\hat{\gamma}_1 \cdot h_1 \cdot (\tilde{\delta}_1)^* \cdot h_2 \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot \hat{\delta}_3^j \cdot \hat{\gamma}_4$$

не правильного линейного вида, то к нему надо применить операцию "перекидывания". Длина выражения от этого не изменится. Выражение

$$\hat{\gamma}_1 \cdot h_1 \cdot (\tilde{\delta}_1)^* \cdot h_2 \cdot g_1 \cdot (\bar{\delta}_2)^* \cdot g_2 \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4$$

правильного линейного вида. Оценим сложность полученных выражений:

$$n_1 \le \max(L(\alpha_1(\beta_1)^*\alpha_2\beta_2^{z-1}\alpha_3\beta_3^{x-1}(\beta_3^x)^*\alpha_4),$$

$$L(\alpha_1(\beta_1)^*\alpha_2\beta_2^{z-1}\alpha_3\beta_3^{s-1}\alpha_4),$$

$$L(\alpha_1(\beta_1)^*\alpha_2\beta_2^{z-1}\alpha_3\beta_3^{s}(\beta_3)^*\alpha_4), L(\alpha_1(\beta_1)^*\alpha_2\beta_2^{z}(\beta_2)^*\alpha_3\beta_3^{w-1}\alpha_4),$$

$$L(\alpha_1(\beta_1)^*\alpha_2\beta_2^{z}(\beta_2)^*\alpha_3\beta_3^{w}(\beta_3)^*\alpha_4)) \le$$

$$\le L(\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \alpha_3 \cdot (\beta_3)^* \cdot \alpha_4) +$$

$$+ \max(l(\beta_2^z) + 2l(\beta_3^x), l(\beta_2^z) + l(\beta_3^s), l(\beta_2^z) + l(\beta_3^w)) \le$$

$$\le n + 2(l(\beta_2) + l(\beta_3)) \cdot \max(x, z) \le n + 2n \cdot nm = n + 2n^2 m;$$

$$n_2 \le \max(L(\hat{\gamma}_1\hat{\delta}_2^{z-1}\hat{\delta}_3^{x-1}(\hat{\delta}_{1,i})^*\hat{\gamma}_4), L(\hat{\gamma}_1\hat{\delta}_2^{w-1}(\hat{\delta}_{1,i})^*\hat{\delta}_3^{s-1}\hat{\gamma}_4),$$

$$L(\hat{\gamma}_1\hat{\delta}_2^{w-1}k_1(\tilde{\delta}_{1,i})^*k_2 \cdot \hat{\delta}_3^*\hat{\gamma}_4),$$

$$L(\hat{\gamma}_1 h_1(\tilde{\delta}_1)^* h_2(\hat{\delta}_2)^*\hat{\delta}_3^{w-1}\hat{\gamma}_4), L(\hat{\gamma}_1 h_1(\tilde{\delta}_1)^* h_2 g_1(\bar{\delta}_2)^* g_2(\hat{\delta}_3)^*\hat{\gamma}_4)) =$$

$$= \max(L(\hat{\gamma}_1\hat{\delta}_2^{z-1}\hat{\delta}_3^{x-1}(\hat{\delta}_1)^*\hat{\gamma}_4), L(\hat{\gamma}_1\hat{\delta}_2^{w-1}(\hat{\delta}_1)^*\hat{\delta}_3^{s-1}\hat{\gamma}_4),$$

$$L(\hat{\gamma}_1\hat{\delta}_2^{z-1}(\hat{\delta}_1)^*\hat{\delta}_3^{s}\hat{\delta}_3^{*}\hat{\gamma}_4),$$

$$L(\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_2^z \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot \hat{\delta}_3^{w-1} \cdot \hat{\gamma}_4, L(\hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\delta}_2^z \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot \hat{\delta}_3^w \cdot (\hat{\delta}_3)^* \cdot \hat{\gamma}_4)) \le$$

$$\leq L(\hat{\gamma}_1(\hat{\delta}_1)^*\hat{\gamma}_2(\hat{\delta}_2)^*\hat{\gamma}_3(\hat{\delta}_3)^*\hat{\gamma}_4)+$$

$$+\max(l(\hat{\delta}_2^z)+l(\hat{\delta}_3^x), l(\hat{\delta}_2^w)+l(\hat{\delta}_3^s), l(\hat{\delta}_2^z)+l(\hat{\delta}_3^s), l(\hat{\delta}_2^z)+l(\hat{\delta}_3^w)) \leq$$

$$\leq nm+(l(\hat{\delta}_2)+l(\hat{\delta}_3))\cdot\max(x,z,s,w) \leq nm+nm\cdot nm = nm+n^2m^2.$$

Разбор случаев закончен.

Переходим теперь к общему случаю. Пусть $s \in \mathbb{N}$ и P представимо выражением $\mathfrak{P}$ правильного линейного вида с s итерациями:

$$P = \left|\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \ldots \cdot \alpha_s \cdot (\beta_s)^* \cdot \alpha_{s+1}\right|.$$

Опишем алгоритм разбиения P на P_i. Вводим при $1 \leq i \leq s+1$, $1 \leq j \leq s$ обозначения:

$$\tilde{f}(\alpha_i) := \gamma_i,\ \tilde{f}(\beta_i) := \delta_i.$$

Заводим счетчик $k := 2$.
Шаг 1. Применяем к выражению

$$\mathfrak{P} = \gamma_1 \cdot (\delta_1)^* \cdot \gamma_2 \cdot (\delta_2)^* \cdot \ldots \cdot \gamma_s \cdot (\delta_s)^* \cdot \gamma_{s+1}$$

операцию "перекидывания"и получаем выражение

$$\hat{\mathfrak{P}} := \hat{\gamma}_1 \cdot (\hat{\delta}_1)^* \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot (\hat{\delta}_2)^* \cdot \ldots \cdot \hat{\gamma}_s \cdot (\hat{\delta}_s)^* \cdot \hat{\gamma}_{s+1}.$$

Переходим к шагу 2.
Шаг 2. Если $\hat{\gamma}_k \neq \lambda$ и $k = s$, то алгоритм закончен. Иначе переходим к шагу 3.
Шаг 3. Если $\hat{\gamma}_k \neq \lambda$ и $k \neq s$, то увеличиваем счетчик k на 1 и переходим к шагу 2. Иначе переходим к шагу 4.
Шаг 4. Если $\hat{\gamma}_k = \lambda$ и слова $\hat{\delta}_{k-1}$ и $\hat{\delta}_k$ соизмеримы, то

1. вычисляем $x := l(\hat{\delta}_{k-1})$;

2. совершаем в выражении $\mathfrak{P}$ операцию "расслоения"на новые $\mathfrak{P}_i$:

$$\ldots(\beta_k)^*\ldots \quad\Longrightarrow\quad \ldots(\lambda \vee \beta_k \vee \ldots \vee \beta_k^{x-1}) \cdot (\beta_k^x)^* \ldots;$$

3. для каждого из новых $\mathfrak{P}_i$ пересчитываем $\tilde{f}(\mathfrak{P}_i)$:

$$\ldots(\hat{\delta}_{k-1})^* \cdot \hat{\gamma}_k \cdot (\hat{\delta}_k)^* \ldots \implies \ldots(\hat{\delta}_{k-1})^* \cdot \hat{\delta}_k^i \cdot (\hat{\delta}_k^x)^* \ldots \implies$$

$$\implies \ldots \cdot \hat{\delta}_k^i \cdot (\hat{\delta}_{k-1})^* \cdot (\hat{\delta}_k^x)^* \ldots \implies \ldots(\lambda)^* \cdot \hat{\delta}_k^i \cdot (\hat{\delta}_{k-1})^* \ldots;$$

4. если $k = s$, то алгоритм закончен; иначе увеличиваем счетчик k на 1;

5. переходим для каждой пары $\mathfrak{P}_i$, $\tilde{f}(\mathfrak{P}_i)$ к шагу 2.

Иначе переходим к шагу 5.

Шаг 5. Если $\hat{\gamma}_k = \lambda$ и слова $\hat{\delta}_{k-1}$ и $\hat{\delta}_k$ не соизмеримы, то

1. находим такое минимальное $z \in \mathbb{N}$, при котором $\hat{\delta}_k^z$ - все еще не префикс $(\hat{\delta}_{k-1})^\infty$;

2. находим наибольший общий префикс h_1 слова $\hat{\delta}_k^z$ и сверхслова $(\hat{\delta}_{k-1})^\infty$;

3. находим результат h_2 удаления из начала слова $\hat{\delta}_k^z$ префикса h_1, то есть $\hat{\delta}_k^z = h_1 h_2$;

4. находим результат применения операции "перекидывания"к $(\hat{\delta}_{k-1})^* \cdot \hat{\delta}_k^z$:

$$(\hat{\delta}_{k-1})^* \cdot \hat{\delta}_k^z = (\hat{\delta}_{k-1})^* \cdot h_1 h_2 = h_1 \cdot (\tilde{\delta}_{k-1})^* \cdot h_2;$$

5. совершаем в выражении $\mathfrak{P}$ операцию "расщепления"на новые $\mathfrak{P}_i$:

$$\ldots(\beta_k)^* \ldots \implies \ldots((\lambda)^* \vee (\lambda)^* \cdot \beta_k \vee \ldots \vee (\lambda)^* \cdot \beta_k^{z-1} \vee \beta_k^z \cdot (\beta_k)^*) \ldots;$$

6. для каждого из новых $\mathfrak{P}_i$ пересчитываем $\tilde{f}(\mathfrak{P}_i)$; при этом

$$\ldots(\hat{\delta}_{k-1})^* \cdot \hat{\delta}_k^z \cdot (\hat{\delta}_k)^* \ldots \implies \ldots h_1 \cdot (\tilde{\delta}_{k-1})^* \cdot h_2 \cdot (\hat{\delta}_k)^* \ldots;$$

7. если $k = s$, то алгоритм закончен; иначе увеличиваем счетчик k на 1;

8. переходим для каждой пары $\mathfrak{P}_i$, $\tilde{f}(\mathfrak{P}_i)$ к шагу 2.

Результатом работы алгоритма будет разбиение P на P_i. При этом P_i и $\tilde{f}(P_i)$ заданы выражениями правильного линейного вида. Оценим их сложность. При каждом значении счетчика k от 2 до s сложность P_i может возрасти только один раз и только на одном из шагов 4.2. и 5.5.; при этом она увеличивается не более чем на $2l(\beta_k^{l(\hat{\delta}_{k-1})}) = 2l(\hat{\delta}_{k-1})l(\beta_k)$. Аналогично, сложность $\tilde{f}(P_i)$ тоже может возрасти только один раз и только на одном из шагов 4.2. и 5.5.; при этом она увеличивается не более чем на $l(\hat{\delta}_k^{l(\hat{\delta}_{k-1})}) = l(\hat{\delta}_{k-1})l(\hat{\delta}_k)$. Таким образом, получаем следующие оценки n_1 и n_2 на сложность P_i и $\tilde{f}(P_i)$:

$$n_1 \leq n + 2l(\hat{\delta}_1)l(\beta_2) + \ldots + l(\hat{\delta}_{s-1})l(\beta_s) \leq$$

$$\leq n + 2(l(\hat{\delta}_1) + \ldots + l(\hat{\delta}_{s-1}))(l(\beta_2) + \ldots l(\beta_s)) \leq n + 2nm \cdot n = n + 2n^2m,$$

$$n_2 \leq nm + l(\hat{\delta}_1)l(\hat{\delta}_2) + \ldots + l(\hat{\delta}_{s-1})l(\hat{\delta}_s) \leq$$

$$\leq nm + (l(\hat{\delta}_1) + \ldots + l(\hat{\delta}_{s-1}))(l(\hat{\delta}_2) + \ldots l(\hat{\delta}_s)) \leq nm + nm \cdot nm =$$

$$= nm + n^2m^2.$$

Утверждение леммы 14 доказано.

Лемма 15. *Пусть A - конечный алфавит, $n \in \mathbb{N}$ и $P \in WRP_n^1(A)$. Тогда существует $V \in K_{\leq}(A, E_2, n+2)$ такой, что $1(V) = P$.*

Доказательство. Так как $P \in WRP_n^1(A)$, то P представимо выражением правильного линейного вида сложности не выше n :

$$P = |\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)^* \cdot \ldots \cdot \alpha_s \cdot (\beta_s)^* \cdot \alpha_{s+1}| \, .$$

Построим диаграмму Мура для V. Во всех диаграммах, приводимых ниже, для любых состояний q_l, q_m и любого слова $\alpha = a_{i_1} \ldots a_{i_s} \in A^*$ под

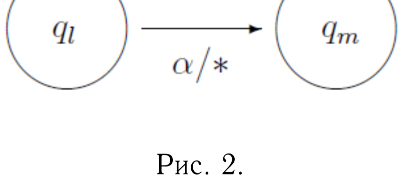

Рис. 2.

подразумеваем

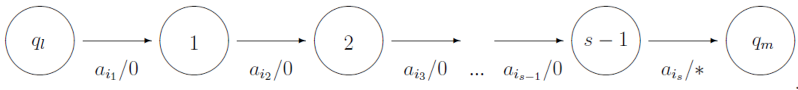

Рис. 3.

Если $\alpha_1 \neq \lambda$, $\alpha_{s+1} \neq \lambda$, то диаграмма имеет вид

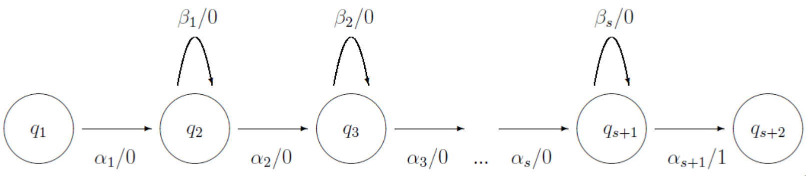

Рис. 4.

Если $\alpha_1 = \lambda$, $\alpha_{s+1} \neq \lambda$, то диаграмма имеет вид

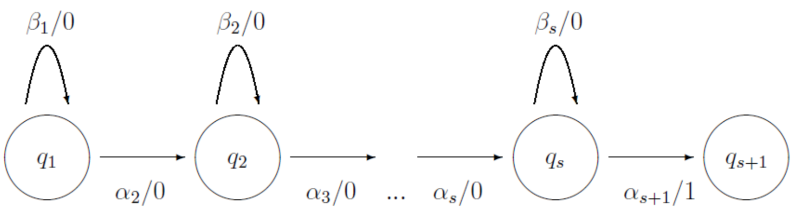

Рис. 5.

Если $\alpha_1 \neq \lambda$, $\alpha_{s+1} = \lambda$, то диаграмма имеет вид

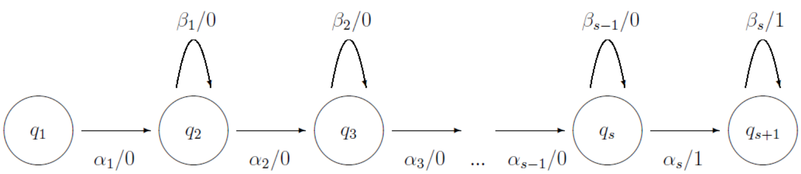

Рис. 6.

Наконец, если $\alpha_1 = \alpha_{s+1} = \lambda$, то диаграмма имеет вид

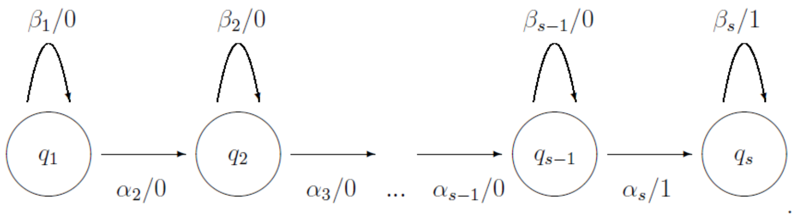

Рис. 7.

Во всех этих диаграммах есть еще одно дополнительное состояние, выполняющее роль "тупика". В него отправляются все недостающие стрелки и на выходе у этих стрелок символ 0. В каждой из этих диаграмм не более чем

$$(s+2)+(l(\alpha_1)-1)+(l(\beta_1)-1)+\ldots+(l(\beta_s)-1)+(l(\alpha_{s+1})-1)+1=$$

$$=l(\alpha_1)+l(\beta_1)+\ldots+l(\beta_s)+l(\alpha_{s+1})+(s+2)-(2s+1)+1\leq$$

$$\leq l(\alpha_1)+l(\beta_1)+\ldots+l(\beta_s)+l(\alpha_{s+1})+2\leq n+2$$

состояний.

Утверждение леммы 15 доказано.

Лемма 16. *Пусть A,B - конечные непустые алфавиты, $f\in F_l(A,B)$, $P\subseteq A^*$. Пусть, кроме того, P представимо в виде конечного объединения множеств P_i таких, что для некоторых фиксированных $m,n\in\mathbb{N}$ при всех i имеем:*
1) существует $V_i\in K_{\leq}(A,E_2,n)$, для которого $1(V_i)=P_i$;
2) для каждого $V\in[V_i]$ существует $W\in K_{\leq}(B,E_2,m)$ такой, что $1(W)=\tilde{f}(1(V))$.
Тогда $P\in I(\tilde{f})$ если и только если $P_{\leq}(n^2+m^2+l)\in I(\tilde{f})$.

Доказательство. Если кодирование $\tilde{f}$ однозначно декодируемо на P, то оно, очевидно, однозначно декодируемо и на $P_{\leq}(n+m^2+l)$. Допустим теперь, что кодирование $\tilde{f}$ не является однозначно декодируемым на P. Тогда существуют $\alpha_1,\alpha_2\in P$ такие, что $\alpha_1\neq\alpha_2$ и $\tilde{f}(\alpha_1)=\tilde{f}(\alpha_2)$. Так как P распадается в конечное объединение P_i, то для некоторых $r,s\in\mathbb{N}$ имеем $\alpha_1\in P_r$ и $\alpha_2\in P_s$. При этом r и s могут совпадать. Далее рассуждение почти полностью повторяет идею доказательства теоремы 1 из первой части статьи. Единственным отличием является то, что оценка на длину общего для α_1 и α_2 префикса γ теперь равна не n, а n^2. Это связано с тем, что верхний (по α_1) и нижний (по α_2) автоматы для этого префикса теперь могут быть разными.

Утверждение леммы 16 доказано.

Доказательство основных утверждений

Теорема 2. *Пусть A - конечный алфавит. Любое множество $P \in RP(A)$ может быть представлено в виде конечного объединения множеств правильного линейного вида.*

Доказательство. Из леммы 6 следует, что P представимо регулярным выражением вида

$$\bigvee_{i=1}^{k} \alpha_{i,1} \cdot (\mathfrak{P}_{i,1})^* \cdot \alpha_{i,2} \cdot \ldots \cdot \alpha_{i,s(i)-1} \cdot (\mathfrak{P}_{i,s(i)-1})^* \cdot \alpha_{i,s(i)},$$

где $k, s(1), \ldots, s(k)$ - произвольные натуральные числа, $\alpha_{1,1}, \ldots, \alpha_{k,s(k)}$ - произвольные слова (возможно пустые) в алфавите A, $\mathfrak{P}_{1,1}, \ldots, \mathfrak{P}_{k,s(k)-1}$ - произвольные регулярные выражения в алфавите A. Из леммы 9 следует, что все $|\mathfrak{P}_{1,1}|, \ldots, |\mathfrak{P}_{k,s(k)-1}|$ измеримы. Значит и все $|\mathfrak{P}_{1,1}|^*, \ldots, |\mathfrak{P}_{k,s(k)-1}|^*$ измеримы. При этом, они еще и регулярны. Отсюда и из леммы 8 получаем, что, например, $|\mathfrak{P}_{1,1}|^*$ представимо в виде конечного объединения множеств

$$\alpha_i^{a_i} \cdot (\alpha_i^{b_i})^*$$

для некоторых $\alpha_i \in A^*$, $a_i, b_i \in \mathbb{N}_0$. То же самое можно сказать и про любые другие $|\mathfrak{P}_{i,j}|^*$. Значит P представимо в виде конечной дизъюнкции регулярных выражений вида

$$\alpha_1 \cdot (\beta_1)^* \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_s \cdot (\beta_s)^* \cdot \alpha_{s+1}$$

для некоторых $s \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s+1} \in A^*$, $\beta_1, \ldots, \beta_s \in A^* \setminus \{\lambda\}$. Итак, мы показали, что P может быть представлено в виде конечного объединения множеств линейного вида. Для доказательства теоремы осталось применить лемму 12.

Утверждение теоремы 2 доказано.

Теорема 3. *Пусть A, B - конечные непустые алфавиты и $m, n \in \mathbb{N}$. Проверка однозначности алфавитного декодирования f на P для произвольных $f \in F_m(A, B)$ и $P \in WRP_n(A)$ может быть сведена к проверке однозначности алфавитного декодирования f на $P_{\leq}(3(nm+1)^4)$.*

Доказательство. Пусть $f \in F_m(A, B)$ и $P \in WRP_n(A)$. Из леммы 14 знаем, что P представимо в виде конечного объединения множеств P_i таких, что

$$P_i \in WRP^1_{n+2n^2m}(A) \quad \text{и} \quad \tilde{f}(P_i) \in WRP^1_{nm+n^2m^2}(B).$$

Из леммы 15 следует, что для каждого P_i существует автомат

$$V_i \in K_{\leq}(A, E_2, n + 2n^2m + 2)$$

такой, что $1(V_i) = P_i$. И еще для каждого $\tilde{f}(P_i)$ существует автомат

$$W_i \in K_{\leq}(B, E_2, nm + n^2m^2 + 2)$$

такой, что $1(W_i) = \tilde{f}(P_i)$. Возьмем какое-нибудь i и $V \in [V_i]$. Покажем, что существует автомат

$$W \in K_{\leq}(B, E_2, nm + n^2m^2 + 2)$$

такой, что $1(W) = \tilde{f}(1(V))$. В самом деле, автомат V_i из леммы 15 имеет линейный вид. Если начальное состояние автомата V - "тупиковое"состояние автомата V_i, то $1(V) = \emptyset$ и существование W очевидно. Если же это одно из состояний линейной цепи, то существует ведущее в него из начального состояния автомата V_i слово $\alpha \in A^*$. Для получения автомата W теперь надо изменить начальное состояние автомата W_i на состояние, в которое попадает этот автомат при подаче слова $\tilde{f}(\alpha)$. Все условия леммы 16 выполнены. Из нее следует, что $P \in I(f)$ если и только если

$$P_{\leq}((n + 2n^2m + 2)^2 + (nm + n^2m^2 + 2)^2 + m) \in I(f).$$

Осталось заметить, что

$$(n + 2n^2m + 2)^2 + (nm + n^2m^2 + 2)^2 + m \leq$$

$$\leq 3(nm + n^2m^2 + 2)^2 \leq 3(2nm + n^2m^2 + 1)^2 = 3(nm + 1)^4.$$

Утверждение теоремы 3 доказано.

Теорема 4. *Пусть A, B - конечные непустые алфавиты и $m, n \in \mathbb{N}$. Проверка однозначности алфавитного декодирования f на P для произвольных $f \in F_m(A, B)$ и $P \in RP_n(A)$ может быть сведена к проверке однозначности алфавитного декодирования f на $P_{\leq}(3(n^2m + 1)^4)$.*

Доказательство. Утверждение теоремы тривиально следует из теоремы 3 и леммы 13.

Список литературы

[1] В. Б. Кудрявцев, С. В. Алешин, А. С. Подколзин. *Введение в теорию автоматов*. М.: Наука, 1985.

[2] С. В. Яблонский. *Введение в дискретную математику*. М.: Наука, 1986.

[3] Ал. А. Марков. *Введение в теорию кодирования*. М.: Наука, 1982.

[4] П. С. Дергач. *Об однозначности алфавитного декодирования*. Интеллектуальные системы, 2011. Т.15, вып. 1-4, М., Сс. 349-361.

[5] Д. Е. Александров. *Эффективные методы реализации проверки содержания сетевых пакетов регулярными выражениями*. Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 1, М., Сс. 37-60.

[6] Д. Н. Бабин. *Частотные регулярные языки*. Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 1, М., Сс. 205-210.

[7] П. С. Дергач. *О каноническом регулярном представлении S-тонких языков*. Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 1, М., Сс. 211-242.

[8] И. Е. Иванов. *О некоторых свойствах автоматов с магазинной памятью*. Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 1, М., Сс. 243-252.

[9] А. А. Часовских. *Проблема A—полноты линейно-автоматных функций над конечным полем*. Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 1, М., Сс. 253-258.

[10] А. А. Часовских. *Условия полноты линейно-р-автоматных функций*. Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 3, М., Сс. 203-252.

[11] Д. Е. Александров. *Об оценках автоматной сложности распознавания классов регулярных языков*. Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 4, М., Сс. 161-190.

[12] В. М. Дементьев. *О звездной высоте регулярного языка и циклической сложности минимального автомата*. Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 4, М., Сс. 215-222.

[13] И. В. Кучеренко. *О минимизации многофункциональных классов бинарных клеточных автоматов с неразрешимым свойством обратимости*. Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 4, М., Сс. 227-294.

[14] Э. Э. Гасанов. *Прогнозирование периодических сверхсобытий автоматами*. Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 1, М., Сс. 23-34.

[15] И. Е. Иванов. *О сохранении периодических последовательностей автоматами с магазинной памятью с однобуквенным магазином*. Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 1, М., Сс. 145-160.

[16] А. А. Летуновский. *Выразимость линейных автоматов относительно расширенной суперпозиции*. Интеллектуальные системы, 2014. Т.19, вып. 1, М., Сс. 161-170.

[17] В. Г. Гербуз. *О связи функций автомата и автоматной функции*. Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 2, М., Сс. 109-116.

[18] П. С. Дергач. *О проблеме вложения допустимых классов*. Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 2, М., Сс. 143-174.

[19] А. М. Миронов. *Критерий реализуемости функций на строках вероятностными автоматами Мура с числовым выходом*. Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 2, М., Сс. 175-186.

[20] А. А. Петюшко. *О контекстно-свободных биграмных языках*. Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 2, М., Сс. 187-208.

[21] И. Ю. Терехина. *Модель невлияния для квантовых автоматов*. Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 2, М., Сс. 209-216.

[22] Д. И. Васильев. *О стабилизации одной динамической системы, связанной с автоматным моделированием миграционных процессов*. Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 3, М., Сс. 27-38.

[23] Д. Н. Бабин, А. А. Летуновский. *О возможностях суперпозиции, при наличии в базисе автоматов фиксированной добавки из булевых функций и задержки*. Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 3, М., Сс. 71-78.

[24] Э. С. Айрапетов, П. С. Дергач. *О прогрессивном разбиении некоторых подмножеств натурального ряда*. Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 3, М., Сс. 79-86.

[25] Д. Н. Бабин. *Автоматы с суперпозициями, пример нерасширяемости до предполного класса*. Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 3, М., Сс. 87-94.

[26] Э. Э. Гасанов, А. А. Мастихина. *Прогнозирование общерегулярных сверхсобытий*. Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 3, М., Сс. 127-155.

[27] П. С. Дергач. *О двух размерностях спектров тонких языков*. Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 3, М., Сс. 155-174.

[28] И. Е. Иванов. *Нижняя оценка на максимальную длину периода выходной последовательности автономного автомата с магазинной памятью*. Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 3, М., Сс. 175-194.

[29] А. А. Часовских. *Критериальные системы в классах линейно-автоматных функций над конечными полями*. Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 3, М., Сс. 195-207.

[30] А. М. Миронов. *Основные понятия теории вероятностных автоматов*. Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 4, М., Сс. 75-116.

[31] А. А. Плетнев. *Нижняя оценка на область видимости автомата, обрабатывающего произвольный поток запросов к динамической базе данных*. Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 4, М., Сс. 117-154.