О соотношении сложностей реализации некоторых булевых функций схемами двух видов

Н. А. Шкаликова

В работе рассматривается два вида схем из функциональных элементов. Задача получения нижней оценки сложности реализации булевых функций для одного типа схем сведена к задаче получения верхней оценки для другого типа схем. Получена точная по порядку нижняя оценка сложности укладки графа-двоичного дерева в клеточную структуру.

Ключевые слова: булевы функции, сложность реализации, схемы из функциональных элементов.

В работе рассматриваются два вида схем из функциональных элементов, реализующих булевы функции. Схемы из "обычных"функциональных элементов рассматриваются, например, в работе Лупанова О.Б. [1]. Ниже приведен пример схемы их "обычных"функциональных элементов, рис. (1). Сложностью схемы называют количество функциональных элементов. Соединения и расположение на плоскости в сложности не учитывается. В работе [1] показано, что для любой булевой функции можно построить реализующую ее схему из "обычных"функциональных элементов и установлено, что порядок функции Шеннона равен $\frac{2^n}{n}$. То есть каждую функцию от n переменных можно реализовать с такой сложностью, и существует функция от n переменных , которую с меньшей сложностью реализовать невозможно. Более того показано, что доля функций, реализуемых с меньшей сложностью стремится к нулю при n стремящемся к бесконечности.

Второй тип схем — это схемы из так называемых клеточных элементов. Допустимые типы элементов изображены на рис. (2). В верхнем ряду — функциональные, в нижнем ряду — коммутационные. Каждый элемент имеет форму единичного квадрата. Каждому функциональному элементу ставится в соответствие "обычный " функциональный элемент. Это соответсствие приведено на рис. (3). Первые два коммутационных элемента используются для соединения функциональных элементов и физически являются проводниками электрического тока. На третий коммутационный элемент могут подаваться как входы любого другого элемента, так и выходы. Физически этот элемент служит изолятором электрического тока. Прямоугольник, составленный из таких элементов (каждый элемент может быть повернут на плоскости) будем называть схемой, если при замене функциональных элементов на элементы в соответствии с рис. (3) и при соединении их, определяемом коммутационными элементами, получим некоторую структуру , удовлетворяющую определению схемы из функциональных элементов, данному в работе [1]. Входы и выходы схемы расположеныы на периметре прямоугольника. Сложностью схемы будем называть ее площадь (число входящих в нее элементов). В работе Кравцова С.С. [2] показано, что для любой булевой функции можно построить реализующую ее клеточную схему и установлено, что порядок соответствующей функции Шеннона равен 2^n.

Нижние оценки функций Шеннона получены в обоих случаях мощностным методом, то есть доказано, что схем с меньшей сложностью не достаточно для реализации всех функций от n переменных. Тем не менее существуют функции для обоих видов схем, которые удается реализовать с меньшей сложностью, чем функция Шеннона. Например симметрические фунции, функция умножения двух n-разрядных чисел (система функций), специальная функция выборочного сравнения наборов.

Для "обычных" схем из функциональных элементов нелинейные нижние оценки получить не удается. Линейная нижняя оценка, то есть по порядку равная n, очевидна, так как нужно "ввести" n переменных. Известные верхние оценки сложности реализации выше упомянутых систем функций являются нелинейными.

Для клеточных схем удалось получить нетривиальные точные нижние оценки для некоторых функций и систем функций [3]. В частности для умножения двух n-разрядных чисел. Также для клеточных схем Г.В.Калачевым [4, 5, 6] получены нетривиальные нижние оценки для булевых функций и булевых операторов для мощностной меры сложности, характеризующей потребляюмую схемой мощность.

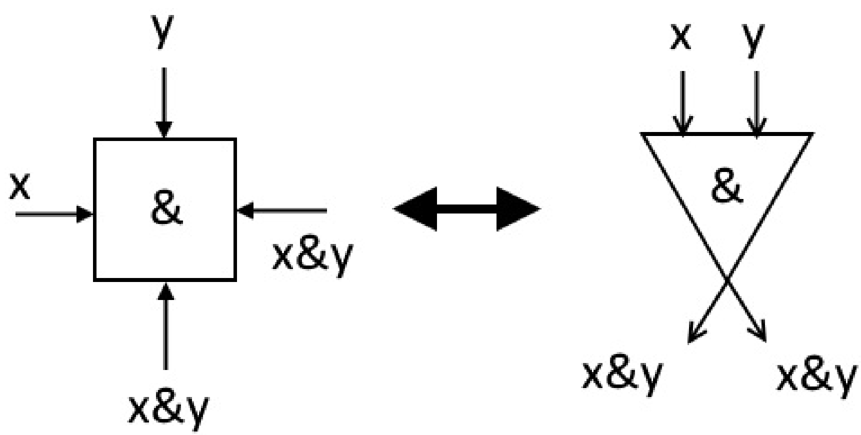

Рис. 1

Если удастся построить алгоритм, который позволяет для любой схемы из "обычных" функциональных элементов сложности n построить клеточную схему , реализующую ту же систему функций со сложностью по порядку меньшей чем n^2, то будет доказано, что сложность умножения двух n-разрядных чисел "обычными" схемами из функциональных элементов будет больше по порядку, чем n. Иначе сложность реализации

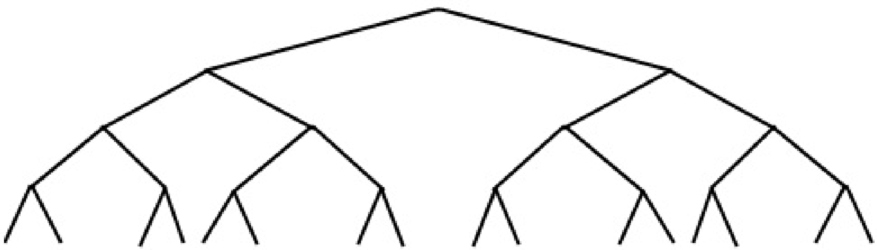

Рис. 2

умножения клеточными схемами будет по порядку меньше чем n^2, что не верно.

Таким образом доказательство нижней оценки будет сведено к доказательству верхней.

"Уложить" произвольную схему из "обычных" функциональных элементов сложности n в клеточную структуру (построить аналогичную клеточную схему),имеющую площадь по порядку меньшую n^2 не удается.

Теорема. *Схему состоящую из n элементов, не имеющих ветвлений на выходах можно "уложить" в клеточную структуру, имеющую площадь по порядку $n \log_2 n$. Существует схема, состоящая из n элементов, не имеющих ветвлений на выходах, которую не возможно уложить в клеточную структуру, имеющую по порядку меньшую площадь чем $n \log_2 n$.*

Доказательство. Схема, не имеющая ветвлений на выходах является графом-деревом. Рассмотрим сначала самое "сложное" дерево, соответствующая схема для которого не содержит одновходных элементов "отрицания", и все расстояния от корня до листьев одинаковы. Такое дерево имеет вид изображенный на рис. (4).Очевидно, что такое дерево имеет $2^k - 1$ вершин.

Доказательство по индукции. Индукция по k. Для малых k база индукции изображена на рис. (5). Пусть для некоторого k утверждение верно. Тогда для $k+1$ расположим дерево, как показано на рис. (6). С каждым шагом длина увеличивается вдвое, высота увеличивается на единицу.

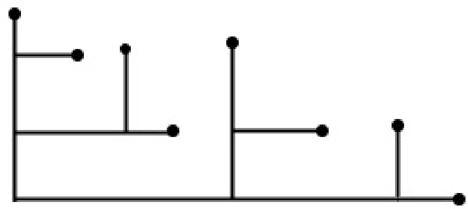

Рис. 3

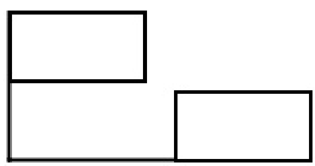

Рис. 4

Теперь рассмотрим дерево, которое может содержать вершины, соответствующие одновходному элементу "отрицание". Двигаясь от корня будем в каждой вершине располагать справа то поддерево, которое содержит большее или равное число вершин, а слева то, которое содержит меньшее или равное число вершин. Если вершина соответствует одновходному элементу "отрицание", то единственное поддерево, опирающееся на него будем располагать справа. См. рис. (7).

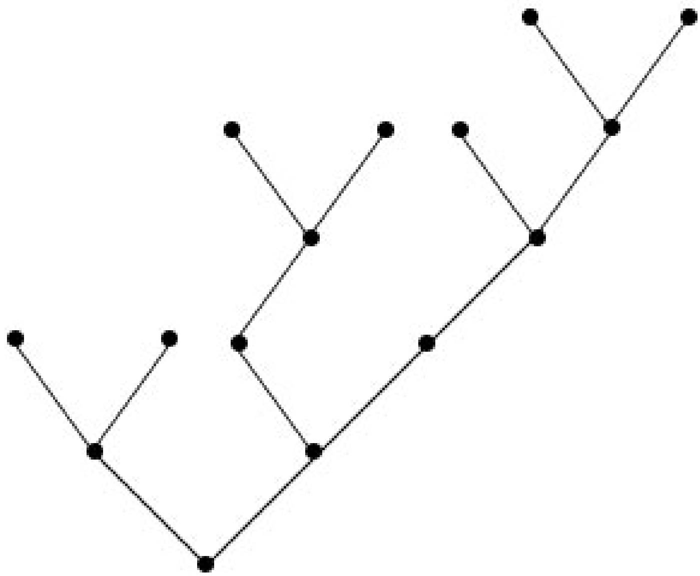

Рис. 5

"Укладку" будем производить следующим образом. Двигаясь от корня дерева уложим по горизонтали вправо все вершины, соответствующие элементу "отрицание", если они есть. Пусть на первую вершину, соответствующую двухвходному элементу опираются два дерева с числом вершин соответственно m и l, где $m \leq l$. Тогда левое поддерево с m вершинами будем "укладывать" на один разряд выше, и по горизонтали выделим ему m разрядов. Правое дерево будем "укладывать" на уровне "корня" на расстоянии m вправо. См. рис. (8). Таким образом "укладка" по горизонтали будет занимать по порядку не более n разрядов, а по вертикали -не более $\log_2 n$ так как в неветвящихся вершинах увеличения по вертикали не будет.

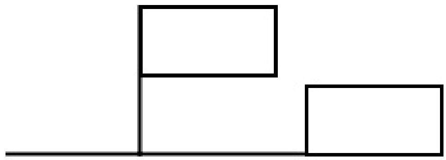

Рис. 6

Докажем, что дерево, не содержащее вершин, соответствующих одновходному элементу "отрицание", и у которого число ребер от корня до "листьев" одинаково и равно $\log_2 n$, невозможно уложить в прямоугольник площадью по порядку меньшей, чем $n \log_2 n$.

Пусть такое дерево уложено в прямоугольник(клеточную структуру). Существует сторона, содержащая четверть входов для схемы, то есть $\frac{n}{2 \cdot 4}$. Покажем, что перпендикулярная сторона имеет длину не менее $\frac{\log_n}{2}$. То есть достаточно доказать, что при любом расположении на плоскости такого дерева и для любой прямой на этой плоскости существует параллельная ей прямая, которая пересекает дерево не менее чем $\frac{\log_2 n}{2}$ раз.

Доказательство по индукции. Индукция по числу ветвлений-уровней. База очевидна (для дерева из 7 вершин, имеющего два уровня, $k = 2$). Произведя два ветвления всегда найдется прямая, пересекающая дерево в двух местах. См. рис.9. Покажем, что каждые два ветвления увеличат "толщину" схемы.

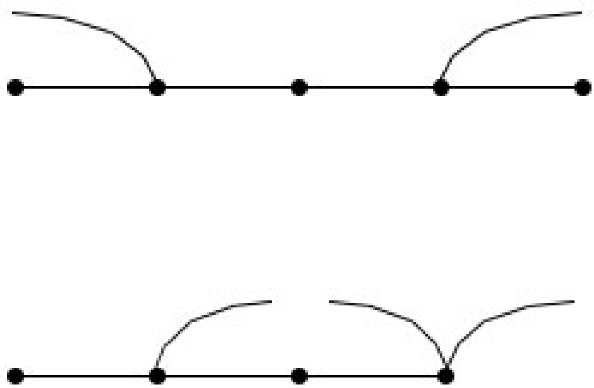

Рис. 7

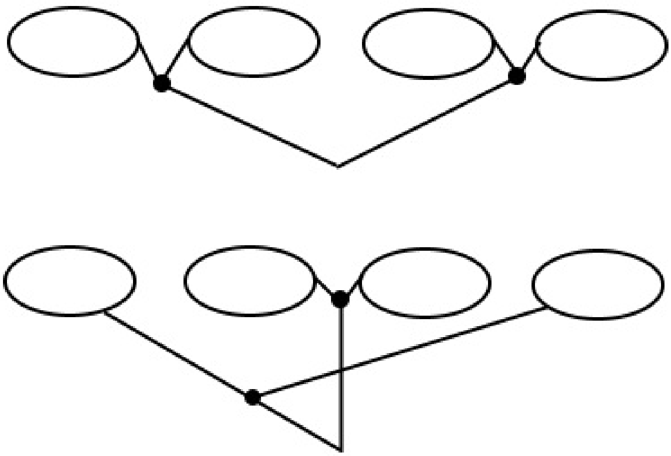

Рис. 8

Пусть для некоторого k толщина схемы в любом направлении не менее $\frac{\log_2 n}{2}$. Тогда для $k+2$ возьмем 4 таких дерева и соединим их двумя ветвлениями. Очевидно, что невозможно расположить их на плоскости так, чтоб толщина в любом направлении не увеличилась хотя бы на единицу, см. рис. 10.

Таким образом схему типа дерево уложить на плоскости можно проще, чем за n^2, а для произвольной схемы вопрос остается открытым, не смотря на то, что схема имеет всего не более $2n$ ребер, так как каждый элемент имеет не более 2 входов.

Список литературы

[1] Лупанов О.Б. Об одном классе схем из функциональных элементов. Проблемы кибернетики. Вып.7.-М.:Физматгиз, 1962.-С. 6-115.

[2] Кравцов С.С. О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов. Проблемы кибернетики. Вып.19.-М.: Наука, 1967.- С.285-293.

[3] Шкаликова Н.А. О реализации булевых функций схемами из клеточных элементов. Математические вопросы кибернетики. Вып.2.-М.:Наука. 1989. -С. 177-197.

[4] Kalachev G.V. Order of power of planar circuits implementing Boolean functions // Discrete Mathematics and Applications. 2014. Volume 24, Issue 4, Pages 185–205.

[5] Калачев Г.В. Порядок мощности плоских схем, реализующих булевы функции // Дискретная математика, 2014. Т. 26. Вып. 1. С. 49–74.

[6] Калачев Г.В. Нижние оценки мощности плоских схем, реализующих частичные булевы операторы // Интеллектуальные системы. 2014. Т. 18. Вып. 2. С. 279–322.

On the ratio of the complexities for the realization of some boolean functions by the schemes of two types

N. A. Shkalikov

Two different types of the schemes from functional elements are considered in the paper. The main goal is to estimate from below the complexity of the realization of boolean functions by the schemes of the first type. This problem is reduced to the estimation from above of the realization of the same functions by the schemes of the second type. In particular, this method gives a sharp estimate from below for the representation of the binary tree graph as the cell structured complex.

Keywords: boolean functions, complexity for realization, schemes of functional elements.