Отслеживание динамики объектов на многомерных изображениях

Д. В. Ронжин

Предлагается алгоритм восстановления соответствия между двумя N-точечными изображениями в конечномерном действительном евклидовом пространстве, связанными невырожденным аффинным преобразованием. Исследуются инварианты для поиска соответствия за линейное время.

Ключевые слова: отслеживание динамики изображений, аффинное преобразование, многомерные изображения, соответствие особых точек.

Введение

Задача анализа изображений некоторого видеоряда нередко сводится к работе с определенным фиксированным количеством точек, которые могут быть выделены на объектах, запечатленных на паре соседних кадров. Эти точки позволяют получать полезную информацию о поведении объектов сцены. При этом часто возникает задача быстрого восстановления взаимно-однозначного соответствия между выделенными точками на соседних кадрах.

Подобная задача была исследована автором в [1], где был приведен эффективный алгоритм восстановления соответствия между точками в случае, когда рассматриваемые изображения - плоские, и точки на них связаны некоторыми невырожденными аффинными преобразованиями. Были приведены оценки на сложность указанного алгоритма, а так же построена схема из функциональных элементов в фиксированном базисе. Получена константная оценка на глубину этой схемы.

Подробно инварианты аффинных преобразований плоских изображений изучены в работе [2]. Иные подходы к распознаванию динамики точек изображений были исследованы в [3], где был описан метод кластеризации особых точек изображений по некоторым спектральным характеристикам, и предложен алгоритм слежения в предположении малых изменений в положении классов на соседних кадрах.

В настоящей работе проведено обобщение описанного в [1] подхода на случай числа измерений больше двух. Особое внимание уделено случаю трехмерного пространства.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, кандидату физико-математических наук, доценту кафедры МаТИС Часовских А.А.

Постановка задачи

Пусть даны два множества точек в m-мерном действительном пространстве - M, M', $|M| = |M'| = N$, $m \in \mathbb{N}$, в которых точки заданы своими координатными векторами. Такие конечные множества будем называть изображениями. Будем считать, что существует единственное невырожденное аффинное преобразование, переводящее одно множество точек в другое, то есть существует такая невырожденная матрица $F \in \mathbb{R}_{m\times m}$ и вектор $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, что для любой точки $\vec{x_i} \in M$, существует точка $\vec{x_j}' \in M'$, такая что $F \cdot \vec{x_i} + b = \vec{x_j}'$, $i, j \in [1, N]$, причем данное отображение на множествах точек - биективное.

Точки обоих множеств можно записать в виде двух вспомогательных матриц:

$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,N} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,N} \\ \vdots & & & \\ x_{m,1} & x_{m,2} & \cdots & x_{m,N} \end{pmatrix} \text{ и } X' = \begin{pmatrix} x'_{1,1} & x'_{1,2} & \cdots & x'_{1,N} \\ x'_{2,1} & x'_{2,2} & \cdots & x'_{2,N} \\ \vdots & & & \\ x'_{m,1} & x'_{m,2} & \cdots & x'_{m,N} \end{pmatrix},$$

где вектор столбец $\vec{x_i} = \begin{pmatrix} x_{1,i} \\ x_{2,i} \\ \vdots \\ x_{m,i} \end{pmatrix}$ задаёт i-ую точку из M, $i \in [1, N]$, а вектор столбец $\vec{x_j}' = \begin{pmatrix} x'_{1,j} \\ x'_{2,j} \\ \vdots \\ x'_{m,j} \end{pmatrix}$ - j-ую точку из M', $j \in [1, N]$, причем нумерация точек во вспомогательных матрицах не обязательно сохраняется при аффинном преобразовании.

Введем дополнительные обозначения. Центром тяжести множества M называем величину $E(M) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} \begin{pmatrix} x_{1,i} \\ x_{2,i} \\ \vdots \\ x_{m,i} \end{pmatrix}$. Центр тяжести множества M' определяется аналогично и обозначается через $E(M')$.

Матрицей разброса для множества M назовем матрицу

$$C(M) = \sum_{i=1}^{N} (\begin{pmatrix} x_{1,i} \\ x_{2,i} \\ \vdots \\ x_{m,i} \end{pmatrix} - E(M)) \cdot (\begin{pmatrix} x_{1,i} \\ x_{2,i} \\ \vdots \\ x_{m,i} \end{pmatrix} - E(M))^T.$$

Аналогично определяется матрица $C(M')$:

$$C(M') = \sum_{i=1}^{N} (\begin{pmatrix} x'_{1,i} \\ x'_{2,i} \\ \vdots \\ x'_{m,i} \end{pmatrix} - E(M')) \cdot (\begin{pmatrix} x'_{1,i} \\ x'_{2,i} \\ \vdots \\ x'_{m,i} \end{pmatrix} - E(M'))^T.$$

Очевидно, что матрицы $C(M)$ и $C(M')$ имеют размерность $m \times m$ и являются симметричными матрицами. Множество M называется невырожденным, если матрица $C(M)$ имеет ранг m.

Задачей является нахождение соответствия между точками двух множеств, связанных невырожденным аффинным преобразованием, т.е. предъявление взаимно-однозначного соответствия между индексами матриц X и X'. Дополнительной задачей является отыскание коэффициентов аффинного преобразования, связывающего множества M и M', а именно матрицы F и вектора $\vec{b}$, таких, что $X'' = F \cdot X + \vec{b}$, где X'' -матрица, полученная из X' некоторой перестановкой столбцов.

Трехмерный случай

Особое внимание в настоящей работе уделено случаю $m = 3$. В соответствии с вышесказанным, при $m = 3$ вспомогательная матрица множества M имеет вид $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_N \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_N \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_N \end{pmatrix}$, где каждая точка задана вещественной координатной тройкой. Аналогично выглядит X'.

В этом случае матрица разброса $C(M)$ будет размерности 3×3. Множество M называется невырожденным, если матрица $C(M)$ имеет ранг 3.

Задачей так же является нахождение параметров аффинного преобразования и восстановление соответствия между точками множеств.

Далее всегда будем полагать множества точек M и M' невырожденными.

Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Всякая симметрическая матрица $A \in \mathbb{R}_{m \times m}$, обладающая единственным собственным значением λ кратности m, имеет диагональный вид $A = \lambda \cdot E$, где E - единичная матрица, размерности $m \times m$.*

Доказательство. Как известно из курса линейной алгебры, всякая симметрическая матрица это матрица квадратичной формы. Для вещественных квадратичных форм верна следующая теорема:

Теорема. *Всякая вещественная квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду посредством ортогонального преобразования с некоторой матрицей U.[4]*

Поскольку матрица A обладает единственным собственным значением, то, после такого преобразования, матрица $A' = U \cdot A \cdot U^T$ станет скалярной, то есть будет выполнено $A' = \lambda \cdot E$.

При этом, в силу ортогональности U:
$A = U^T \cdot \lambda \cdot E \cdot U = \lambda \cdot E$, что и требовалось показать.

□

Лемма 2. *Пусть $E(M) = \vec{0}$, и матрица $C(M)$ имеет одно собственное значение λ кратности m. Если множество M' получается из M при помощи ортогонального преобразования координат, то $C(M) = C(M') = \lambda \cdot E$, где $E \in \mathbb{R}_{m \times m}$ - единичная матрица.*

Доказательство. Пусть $X' = R \cdot X$, где R - ортогональная матрица (здесь без ограничения общности для удобства обозначения будем считать, что нумерация точек в матрицах X и X' согласована). По свойству транспонирования матриц, $(X')^T = X^T \cdot R^T$. Рассмотрим матрицу $C(M')$, составленную для множества точек, представленных матрицей X' и воспользуемся свойством симметричных матриц с одним собственным значением.

$$C(M') = R \cdot X \cdot X^T \cdot R^T = R \cdot \lambda \cdot E \cdot R^T$$

Т.к. λ – вещественное число ([5, стр. 133]) и R - ортогональная, получаем:

$$C(M') = \lambda \cdot R \cdot R^T = \lambda \cdot E = C(M).$$

Что и требовалось показать. □

Лемма 3. *Пусть для двух аффинно-эквивалентных множеств точек в трехмерном пространстве M и M' выполнено:*

1) $E(M) = E(M') = \vec{0}$
2) Найдется $\lambda > 0$, *такое что* $C(M) = C(M') = \lambda \cdot E$.

Тогда множество M может быть переведено во множество M' посредством некоторого ортогонального преобразования без сдвига.

Доказательство. Для начала покажем, что условие 2 гарантирует ортогональность матрицы аффинного преобразования F.

В самом деле, $C(M') = F \cdot C(M) \cdot F^T = F \cdot \lambda \cdot E \cdot F^T = \lambda \cdot F \cdot F^T = \lambda \cdot E$. Таким образом, $F \cdot F^T = E$.

Из условия 1 вытекает, что вектор $\vec{b}$ в нашем аффинном преобразовании - нулевой, так как центр тяжести переходит в центр тяжести в случае невырожденного аффинного преобразования (в силу линейности матричного умножения).

Таким образом, лемма доказана. □

Алгоритм совмещения

Принципом алгоритма является проведение ряда невырожденных преобразований над точками обоих множеств M и M' до их совпадения. Очевидно, что после нахождения таких преобразований над двумя множествами, можно составить единое преобразование переводящее одно множество в другое. Указанное преобразование составляется путем нахождения цепочки обратных преобразований для одного из множеств и применения найденной цепочки совместно с цепочкой прямых преобразований над другим множеством.

Отдельно в ходе описание шагов алгоритма будем выделять случай $m = 3$.

Шаг 1

Нахождение центров тяжести для M и M'. Сдвиг точек множеств M и M' до совмещения центров тяжести с началом координат. Этим мы избавляемся от параллельного переноса. Для удобства обозначений будем в дальнейшем называть матрицы таких центрированных множеств X и X', а сами центрированные множества так же M и M'.

Шаг 2

Нахождение матриц разброса $C(M)$ и $C(M')$, а так же вычисление их собственных значений. В случае $m = 3$ это величины λ_1,λ_2,λ_3 и λ'_1,λ'_2,λ'_3 соответственно. В силу того, что матрица разброса - неотрицательно определенная матрица (как матрица Грама, см. [5] стр. 228), собственные значения этой матрицы неотрицательны. Согласно предположению о невырожденности множеств M и M', собственные значения будут положительными вещественными величинами.

Шаг 3

Вычисление собственных векторов, соответствующих найденным собственным значениям. В силу симметричности матриц $C(M)$ и $C(M')$, собственные векторы будут попарно ортогональны для каждой из матриц. Далее совершается поворот множеств точек до совмещения собственных векторов с координатными осями.

В случае $m = 3$ это векторы $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ и $\vec{v_1}', \vec{v_2}', \vec{v_3}'$. Далее находятся матрицы поворота R и R', которые переводят векторы $\vec{v_1}$ и $\vec{v_1}'$ в вектор $\vec{e_1} = (1, 0, 0)^T$, а векторы $\vec{v_2}$ и $\vec{v_2}'$ в вектор $\vec{e_2} = (0, 1, 0)^T$. Очевидно, что после такого поворота $\vec{v_3}$ и $\vec{v_3}'$ будут лежать на третьей координатной оси.

В общем случае, для заданного m необходимо совместить $m - 1$ собственный вектор с координатными осями.

Найденные повороты применяются к X и X' соответственно - вычисляются матрицы X_R и X'_R.

Очевидно, подобные преобразования не изменят собственных значений у матриц разброса, а собственные векторы станут коллинеарны координатным осям. (Доказательство почти дословно повторяет выкладки в [1])

Шаг 4

Вдоль координатных осей совершается растяжение или сжатие матриц X_R и X'_R, полученных после поворота на предыдущем шаге, на величины, обратные квадратному корню из соответствующих собственных значений. Для случая $m = 3$ это $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}$ и $\frac{1}{\sqrt{\lambda'_1}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda'_2}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda'_3}}$ соответственно. То есть, вычисляются матрицы X_S и X'_S вида:

$$X_S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \cdot x_1 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \cdot x_2 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \cdot x_N \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \cdot y_1 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \cdot y_2 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \cdot y_N \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}} \cdot z_1 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}} \cdot z_2 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}} \cdot z_N \end{pmatrix} \text{ и}$$

$$X'_S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda'_1}} \cdot x'_1 & \frac{1}{\sqrt{\lambda'_1}} \cdot x'_2 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{\lambda'_1}} \cdot x'_N \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda'_2}} \cdot y'_1 & \frac{1}{\sqrt{\lambda'_2}} \cdot y'_2 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{\lambda'_2}} \cdot y'_N \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda'_3}} \cdot z'_1 & \frac{1}{\sqrt{\lambda'_3}} \cdot z'_2 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{\lambda'_3}} \cdot z'_N \end{pmatrix}$$

Это эквивалентно умножению матриц X_R и X'_R слева на матрицы

$$E_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}} \end{pmatrix} \text{ и } E'_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda'_1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda'_2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda'_3}} \end{pmatrix}$$

соответственно.

Матрицы разброса для новых множеств будут иметь одно собственное значение равное единице и иметь кратность три.(Доказательство почти дословно повторяет выкладки в [1])

Шаг 5

После совершения преобразований над матрицами X и X' их матрицы разброса удовлетворяют условиям последней доказанной леммы. Это означает, что нам необходимо найти последнее преобразование (ортогональное), которое окончательно совместит точки множеств и не изменит положения центра тяжести.

Оценка сложности и быстрое совмещение

Легко заметить, что при фиксированном m шаги алгоритма 1-4 имели асимптотику сложности $O(N)$, однако на последнем этапе необходимо найти ортогональное преобразование, совмещающее два множества, что в общем случае может иметь более высокую сложность. В случае $m = 3$ искомое преобразование будет сводиться к повороту относительно некоторой оси, проходящей через начало координат, либо композиции отражения относительно Oxy и поворота. Ниже предложен один из подходов к поиску такого преобразования, который может быть применим с некоторыми ограничениями, выполняющимися почти всегда, и позволяет находить необходимое преобразование за линейное время.

Для удобства обозначения предположим что множества M и M' - это множества точек, полученных после всех преобразований, совершенных над оригинальными изображениями в соответствии с шагами 1-4 указанного алгоритма. Каждой точке $\vec{x_i} \in M$ соответствует величина её удаленности от начала координат (совпадающего с центром тяжести) - r_i, $i \in [1, N]$. Одному и тому же значению расстояния r_k может соответствовать несколько точек множества M. Будем называть кратностью числа $r_k \in R$ количество точек множества M, удаленных на расстояние r_k от центра. Вычислив все эти расстояния, мы получим множество $R = \{r_i; i \in [1, K] : K \leq N\}$. Аналогично строится множество R' для точек из M'.

Очевидно, что множества R и R' с учетом кратности каждой точки можно представить в виде упорядоченных векторов кратности $\vec{r}$ и $\vec{r'}$, координаты которых - упорядоченные по неубыванию величины r_i и r'_i соответственно, $i \in [1, K] : K \leq N$. Будем строить эти векторы таким образом, что бы величина r_i встречалась в векторе $\vec{r}$ столько раз, какова её кратность.

В силу того, что ортогональные преобразования не меняют расстояний между точками изображения, наше искомое ортогональное преобразование должно сохранять расстояния до центра тяжести. Таким образом, если существует единственная точка $\vec{x_j} \in M$, $j \in [1, N]$, удаленная от центра тяжести на расстояние $r_j \in R$, и точка $\vec{x_k}' \in M'$,

$k \in [1, N]$, удаленная на расстояние $r'_k \in R'$, причем $r'_k = r_j$, тогда, очевидным образом, точка $\vec{x_j}$ должна совмещаться с точкой $\vec{x_k}'$. Из этого следует, что при несовпадении упорядоченных векторов кратности двух множеств, можно сразу говорить о невозможности их совмещения невырожденным ортогональным преобразованием.

В $\mathbb{R}^3$ ортогональные преобразования однозначно задаются вещественными матрицами размерности 3×3, с девятью действительными коэффициентами.

Пусть матрица искомого ортогонального преобразования имеет вид:

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix}, \, p_{i,j} \in \mathbb{R}, i, j \in [1, 3].$$

Предположим что существуют три пары точек, которые без ограничения общности можно обозначить следующим образом: $(\vec{x_1}, \vec{x_1}'), (\vec{x_2}, \vec{x_2}'), (\vec{x_3}, \vec{x_3}')$, таких что $\vec{x_i} \in M, \vec{x_j}' \in M', i, j \in [1, N]$, $r_k = r'_k, k \in [1, 3]$, и к тому же, кратность чисел r_k и r'_k равна единице. Так же будем полагать, что каждая тройка точек $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}$ и $\vec{x_1}', \vec{x_2}', \vec{x_3}'$ не лежит на одной прямой (а значит координатные вектора не являются линейно-зависимыми). Тогда, исходя из предположения о существовании ортогональной матрицы, совмещающей данные множества, получаем систему из 9 уравнений с девятью неизвестными коэффициентами матрицы P:

$$\widetilde{X} \cdot \vec{p} = \vec{q}, \text{ где:}$$

$$\widetilde{X} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & y_2 & z_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 & y_3 & z_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}, \, \vec{p} = \begin{pmatrix} p_{1,1} \\ p_{1,2} \\ p_{1,3} \\ p_{2,1} \\ p_{2,2} \\ p_{2,3} \\ p_{3,1} \\ p_{3,2} \\ p_{3,3} \end{pmatrix}, \, \vec{q} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \\ z'_1 \\ z'_2 \\ z'_3 \end{pmatrix}$$

Ранг основной матрицы этой системы равен 9 в силу линейной независимости троек точек, следовательно система будет совместна, и за константное время можно вычислить коэффициенты матрицы P. Можно сразу проводить проверку на вырожденность полученной матрицы. В случае, если нам важна скорость обработки и мы допускаем наличие «сбоя» алгоритма на паре изображений, возможен следующий подход: если матрица P не может быть найдена, либо получается вырожденной, можно либо пробовать другие тройки точек, либо отбрасывать пару изображений как «необработанные».

Можно, однако, обойтись меньшим числом координатных векторов, если учесть тот факт, что искомая матрица - ортогональна. Если у нас имеются пары точек на обоих изображениях $\vec{x_1}, \vec{x_2}$ и $\vec{x_1}', \vec{x_2}'$, попарно равноудаленные от центра тяжести, и имеющие единичную кратность, а так же не лежащие на одной прямой с центром тяжести, то этой информации может быть достаточно для восстановления ортогонального преобразования. В этом случае нам необходимо воспользоваться условием ортогональности матрицы P, т.е. тем фактом, что $P \cdot P^T = E$, где E - единичная матрица 3×3. Мы получаем следующую систему нелинейных уравнений:

$$
\begin{cases}
p_{1,1} \cdot x_1 + p_{1,2} \cdot y_1 + p_{1,3} \cdot z_1 = x_1' \\
p_{1,1} \cdot x_2 + p_{1,2} \cdot y_2 + p_{1,3} \cdot z_2 = x_2' \\
p_{2,1} \cdot x_1 + p_{2,2} \cdot y_1 + p_{2,3} \cdot z_1 = y_1' \\
p_{2,1} \cdot x_2 + p_{2,2} \cdot y_2 + p_{2,3} \cdot z_2 = y_2' \\
p_{1,1}^2 + p_{1,2}^2 + p_{1,3}^2 = 1 \\
p_{2,1}^2 + p_{2,2}^2 + p_{2,3}^2 = 1 \\
p_{3,1}^2 + p_{3,2}^2 + p_{3,3}^2 = 1 \\
p_{1,1} \cdot p_{3,1} + p_{1,2} \cdot p_{3,2} + p_{1,3} \cdot p_{3,3} = 0 \\
p_{2,1} \cdot p_{3,1} + p_{2,2} \cdot p_{3,2} + p_{2,3} \cdot p_{3,3} = 0
\end{cases}
$$

Очевидно, что решение нелинейной системы уравнений имеет более высокую сложность, чем решение указанной ранее системы линейных уравнений.

Таким образом, весь процесс сводится к выбору троек линейно независимых координатных векторов с величинами r_j кратности один, и решению системы линейных уравнений.

Быстрый поиск таких троек точек можно проводить за линейное время следующим образом: ищутся две точки, имеющие уникальную удаленность от начала координат (т.е. кратность расстояния - единица), после чего линейным проходом по множеству оставшихся точек выбирается любая, имеющая так же уникальную удаленность, но не лежащая с ними на одной прямой. Если такая точка не нашлась - пропустим два изображения как «необработанные». В противном случае, получим искомую тройку точек. Подходящая тройка на втором изображении ищется за линейное время. Проверка на совмещение точек множества выполняется за $O(N)$. Данный подход допускает «сбой» алгоритма распознавания, но позволяет быстро обрабатывать пары изображений.

Случай многомерного пространства

При $m > 3$, подход основанный на поиске ортогонального преобразования по некоторому вектору точек, с единичным показателем кратности во множествах R и R' может приводить к искомой матрице. В случае использования подобного алгоритма необходимо предъявить m линейно независимых точек множеств M и M', с совпадающей удаленностью от начала координат, и единичной кратностью. Это задаст m линейных уравнений с m неизвестными, что в матричной форме имеет вид:

$P \cdot \widetilde{X} = \widetilde{X}'$, где P - матрица ортогонального преобразования, размерности $m \times m$, а матрицы $\widetilde{X}$ и $\widetilde{X}'$ составлены из указанных m линейно независимых точек, представленных векторами-столбцами, причем нумерация точек по столбцам в матрицах сохранена. Решение этой системы однозначно определяет матрицу P.

Список литературы

[1] *Ронжин Д. В.* «Распознавание динамики особых точек в видеоряде», журнал «Интеллектуальные системы», Т.18, №2, 2014 г.

[2] *Козлов В. Н.* «О распознавании аффинно разных дискретных изображений», Интеллектуальные системы. 1998. Том 3. Вып. 3-4. С. 95-122.

[3] *Гуломова Н. Ф.*«Отслеживание динамических образов», Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Ташкент, выпускная работа. 2011.

[4] *Фаддеев Д. К.* «Лекции по алгебре: Учебное пособие для ВУЗов», М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. - стр. 160.

[5] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* «Линейная алгебра», издание второе, стереотипное, М.:1978. "НАУКА".

Multi-dimension images' dynamics tracking

D. V. Ronzhin

Proposing an algorithm for mapping reconstruction between two N-point images, related by a non-singular affine transformation in a finite-dimension Euclidean space. Invariants for linear time search are explored.

Keywords: Images dynamics recognition, affine transformation, multi-dimensional images, special points mapping.