О двух размерностях спектров тонких языков

П. С. Дергач

В статье рассматривается класс $\mathbb{T}$ тонких языков - регулярных языков с не более чем линейной функцией роста. Для этих языков вводится понятие двух размерностей - dim и Dim. Приводится результат о том, какие значения принимаются этими величинами на $\mathbb{T}$. Кроме того, находится множество всех реализуемых пар $(dimP, DimP)$, где на $P \in \mathbb{T}$.

Ключевые слова: спектр, тонкие языки, размерность, функция роста.

Введение

В данной работе изучаются спектры класса тонких языков. О роли и значении этого класса в рамках общей теории алфавитного кодирования регулярных языков можно прочитать в статье [1]. Познакомиться с понятием регулярных языков можно в [2]. Понятие алфавитного кодирования, в свою очередь, есть в [3] и [4]. Множество интересных результатов по современной теории автоматов можно найти в [5-14]. Очевидно, что не всегда можно однозначно восстановить тонкий язык по его спектру. Тем не менее, с помощью спектральных свойств тонких языков удается получить для них разумную классификацию. В работе [1] показано, что спектр любого тонкого языка представим в виде конечного объединения обобщенных арифметических прогрессий (в дальнейшем ОАП). Пусть S - один из таких спектров. Для него можно определить два понятия размерности. Первой размерностью такого спектра называется минимальное количество ОАП, объединение которых равно S. Второй размерностью называется минимальное количество непересекающихся ОАП, объединение которых равно S. Оказывается, что для произвольного натурального числа n можно привести пример спектра, у которого и первая, и вторая размерность равна n. Более интересным является вопрос о том, какие значения пар этих размерностей в совокупности бывают у спектров тонких языков. Легко понять, что первая размерность не может превышать вторую, и если первая размерность равна 1, то и вторая должна быть равна 1. Оказывается, что никаких других ограничений на эти пары размерностей нет. Для каждой пары m, n натуральных чисел таких, что $m = n = 1$ или $2 \leq m \leq n$ удается построить тонкий язык со спектром, у которого первая размерность равна m, а вторая равна n. Используемая при этом техника нетривиальна и позволяет ставить и решать целую серию теоретико-числовых задач по этой тематике.

Основные определения и результаты

Через $\mathbb{N}^+$ обозначаем множество $\mathbb{N} \bigcup \{0\}$.

Пусть A - непустое конечное множество. В дальнейшем будем называть его *алфавитом*, а его элементы - *буквами*. *Словами* называем произвольные конечные последовательности букв алфавита A. Для удобства рассматриваем при этом также *пустое* слово, не имеющее ни одной буквы и обозначаемое λ. Все слова кроме пустого называем *непустыми*. Множество слов в алфавите A обозначаем через A^*. Для любого $k \in \mathbb{N}^+$ и любого слова $\alpha \in A^*$ через α^k обозначаем слово, полученное записыванием подряд слова α k раз. При $k = 0$ по умолчанию считаем $\alpha^k = \lambda$.

Для произвольного множества $P \subseteq A^*$ через $|P|$ обозначаем его мощность. Если множество P конечно, то пишем $|P| < \infty$. Через $Sub(P)$ обозначаем множество всех подмножеств множества P.

Пусть A - непустой конечный алфавит и $s \in \mathbb{N}$. Введем понятие s-тонкого множества в алфавите A. Регулярное множество P, $P \subseteq A^*$, называем *s-тонким в алфавите* A, если

1) существуют s слов $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s \in P$ таких, что $l(\beta_1) = l(\beta_2) = \ldots = l(\beta_s)$ и для них не существуют $i, j \in \mathbb{N}$ такие, что $1 \leq i < j \leq s$ и $\beta_i = \beta_j$;

2) для любых $s + 1$ слов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{s+1} \in P$ таких, что $l(\alpha_1) = l(\alpha_2) = \ldots = l(\alpha_{s+1})$ существуют $i, j \in \mathbb{N}$ такие, что $1 \leq i < j \leq s + 1$ и $\alpha_i = \alpha_j$.

Другими словами, в P должно быть s несовпадающих слов одинаковой длины, но не должно быть $s{+}1$ несовпадающих слов одинаковой длины.

Для всех $s \in \mathbb{N}$ обозначаем через $\mathbb{T}_s$ множество всех s-тонких множеств в алфавите A. Через $\mathbb{T}$ обозначаем множество $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{T}_s$. Называем это множество *классом тонких языков*, а его элементы - *тонкими множествами*.

Введем понятие спектра множеств. Пусть $P \subseteq A^*$ - произвольное множество слов. *Спектром* этого множества называем множество $\{l(\alpha) \mid \alpha \in P\}$ и обозначаем его через $Sp(P)$.

Пусть $\mathbb{L} \subseteq Sub(A^*)$. Через $\overline{Sp}(\mathbb{L})$ обозначаем множество $\{Sp(P) \mid P \in \mathbb{L}\}$.

Пусть $a, b \in \mathbb{N}$. Через (a, b) обозначаем наибольший общий делитель чисел a и b.

Пусть $a, b \in \mathbb{N}^+,\ c \in \mathbb{N}$. Говорим, что числа a и b *сравнимы по модулю* c, если их разность делится нацело на c. Пишем $a \equiv b\ (mod\ c)$.

Пусть $a, b \in \mathbb{N}^+$. Обозначаем $(a \oplus b) = \{a + bi \mid i \in \mathbb{N}^+\}$. Называем такие множества *обобщенными арифметическим прогрессиями* или сокращенно ОАП. Множество всех ОАП обозначаем через $\mathbb{SGAP}$ *(Set of General Arithmetic Progressions)*.

Говорим, что непустое множество $S \subseteq \mathbb{N}^+$ является *прогрессивным*, если оно представимо в виде конечного объединения ОАП.

Пусть $S \subseteq \mathbb{N}^+$ - прогрессивное множество. Называем *первой размерностью* этого множества минимальное количество ОАП, объединяя которые можно получить S. Обозначаем это число через $dim\ S$. Называем *второй размерностью* этого множества минимальное количество попарно непересекающихся ОАП, объединяя которые можно получить S. Обозначаем это число через $Dim\ S$. Корректность приведенных определений будет доказана позже.

Теорема 1.

$$\{dim\ S \mid S \in \overline{Sp}(\mathbb{T})\} = \mathbb{N},$$

$$\{Dim\ S \mid S \in \overline{Sp}(\mathbb{T})\} = \mathbb{N},$$

$$\{(dim\ S, Dim\ S) \mid S \in \overline{Sp}(\mathbb{T})\} = (1,1) \bigcup \{(m,n) \mid m, n \in \mathbb{N},\ 2 \le m \le n\}.$$

Доказательство вспомогательных утверждений

Лемма 1. Для любых $a, c \in \mathbb{N}^+$ и $b, d \in \mathbb{N}$ верно

$$(a \oplus b) \cap (c \oplus d) \neq \emptyset \Longleftrightarrow a \equiv c \ (mod\ (b, d)).$$

Доказательство. Пусть $(a \oplus b) \cap (c \oplus d) \neq \emptyset$. Тогда существуют $i, j \in \mathbb{N}^+$ такие, что $a + i \cdot b = c + i \cdot d$. Значит, $a - c = i \cdot (b - d)$. Так как b и d делятся нацело на (b, d), то и $b - d$ делится нацело на (b, d). Поэтому и $a - c$ делится нацело на (b, d), то есть $a \equiv c \ (mod\ (b, d))$.

Пусть теперь $a \equiv c \ (mod\ (b, d))$. Без ограничения общности считаем, что $a \geq c$. Тогда для некоторого $i \in \mathbb{N}^+$ имеем $a = c + i \cdot (b, d)$. Из расширенного алгоритма Евклида получаем существование $j, s \in \mathbb{Z}$, для которых $(b, d) = j \cdot b + s \cdot d$. Значит, $a = c + i \cdot j \cdot b + i \cdot s \cdot d$ и $a - i \cdot j \cdot b = c + i \cdot s \cdot d$. Осталось заметить, что тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ верно $a + (k \cdot d - i \cdot j) \cdot b = c + (k \cdot b + i \cdot s) \cdot d$. Очевидно, что для некоторого $k \in \mathbb{N}$ будет выполнено $k \cdot d - i \cdot j, k \cdot b + i \cdot s \in \mathbb{N}^+$. Значит $(a \oplus b) \cap (c \oplus d) \neq \emptyset$.

Таким образом, утверждение леммы 1 доказано.

Лемма 2. Для любого $n \in \mathbb{N}$ верно

$$dim\ \left(\mathbb{N}^+ \setminus (0 \oplus 2^n)\right) = Dim\ \left(\mathbb{N}^+ \setminus (0 \oplus 2^n)\right) = n.$$

Доказательство. Пусть для некоторого $m \in \mathbb{N}$ и некоторых $a_i, b_i \in \mathbb{N}^+$, где i пробегает значения от 1 до m, верно следующее:

$$\mathbb{N}^+ \setminus (0 \oplus 2^n) = \bigcup_{i=1}^{m} (a_i \oplus b_i).$$

Рассмотрим множество $D = \{2^i \mid 0 \leq i \leq n - 1\}$. Предположим, что нашлись $s \in \mathbb{N}$, $1 \leq s \leq m$ и $d_1, d_2 \in D$, для которых выполнено

$$d_1 < d_2,\ d_1, d_2 \in (a_s \oplus b_s).$$

Отсюда немедленно следует, что

$$(d_1 \oplus (d_2 - d_1)) \subseteq (a_s \oplus b_s) \subseteq \mathbb{N}^+ \setminus (0 \oplus 2^n).$$

Значит, $(d_1 \oplus (d_2 - d_1)) \cap (0 \oplus 2^n) = \emptyset$. Так как $d_2 - d_1 \in \mathbb{N}$, то по лемме 1 получаем:

$$d_1 \not\equiv 0 \ (mod(d_2 - d_1, 2^n)).$$

Но, так как d_1, d_2 - элементы множества D и $d_1 < d_2 < 2^n$, то $(d_2 - d_1, 2^n) = d_1$. Полученное противоречие приводит нас к выводу, что разные элементы из множества D находятся в разных $(a_i \oplus b_i)$. Значит, $m \geq |D| = n$. Этим мы показали, что

$$dim\ \left(\mathbb{N}^+ \setminus (0 \oplus 2^n)\right) \geq n.$$

Кроме того,

$$\mathbb{N}^+ \setminus (0 \oplus 2^n) = \bigsqcup_{i=0}^{n-1} (2^i \oplus 2^{i+1}).$$

Это верно, так как $(2^i \oplus 2^{i+1})$ состоит из всех натуральных чисел, делящихся на 2^i и не делящихся на 2^{i+1}. Объединяя эти непересекающиеся множества, мы получим все натуральные числа кроме делящихся на 2^n. Отсюда следует, что

$$n \geq Dim\ \left(\mathbb{N}^+ \setminus (0 \oplus 2^n)\right).$$

Для завершения доказательства осталось заметить, что

$$Dim\ \left(\mathbb{N}^+ \setminus (0 \oplus 2^n)\right) \geq dim\ \left(\mathbb{N}^+ \setminus (0 \oplus 2^n)\right).$$

Это свойство тривиально следует из определения первой и второй размерностей и не нуждается в дальнейших комментариях.

Утверждение леммы 2 доказано.

Лемма 3. *Пусть p - простое натуральное число больше 2 и $l = (a \oplus b)$ - обобщенная арифметическая прогрессия такая, что $l \subseteq (2^n \oplus 2^n) \cup (p^n \oplus p^n)$. Тогда $l \subseteq (2^n \oplus 2^n)$ или $l \subseteq (p^n \oplus p^n)$.*

Доказательство. Обозначим для краткости для $i \in \mathbb{N}^+$ $l[i] = a + i \cdot b$. Будем разбирать случаи.

Случай 1. $l[0)], l[1] \in (2^n \oplus 2^n)$.
Тогда $a = l[0]$, $b = l[1] - l[0]$ и оба числа делятся на 2^n. Значит, $l \subseteq (2^n \oplus 2^n)$.

Случай 2. $l[0] \in (2^n \oplus 2^n)$, $l[1] \not\in (2^n \oplus 2^n)$, $l[2] \in (p^n \oplus p^n)$.
Тогда $l[1] \in (p^n \oplus p^n)$, то есть $l[1]$ делится на p^n. Аналогично, $l[2]$ делится на p^n. Отсюда заключаем, что и $b = l[2] - l[1]$ делится на p^n. Так как $b = l[1] - l[0]$ и $l[1]$ делится на p^n, то и $l[0]$ делится на p^n. Значит, $l[0], l[1] \in (p^n \oplus p^n)$, откуда следует, что $l \subseteq (p^n \oplus p^n)$.

Случай 3. $l[0] \in (2^n \oplus 2^n)$, $l[1] \notin (2^n \oplus 2^n)$, $l[2] \notin (p^n \oplus p^n)$, $l[3] \in (2^n \oplus 2^n)$.
Тогда $l[1] \in (p^n \oplus p^n)$ и $l[2] \in (2^n \oplus 2^n)$. Значит, $l[2]$ и $l[3]$ делятся на 2^n, то есть и $b = l[3] - l[2]$ делится на 2^n. Но $b = l[1] - l[0]$ и $l[0]$ делится на 2^n, а это значит, что и $l[1]$ делится на 2^n. Получаем $l[1] \in (2^n \oplus 2^n)$, что неверно. Поэтому этот случай невозможен.

Случай 4. $l[0] \in (2^n \oplus 2^n)$, $l[1] \notin (2^n \oplus 2^n)$, $l[2] \notin (p^n \oplus p^n)$, $l[3] \notin (2^n \oplus 2^n)$.
Тогда $l[1], l[3] \in (p^n \oplus p^n)$ и $l[2] \in (2^n \oplus 2^n)$. Так как $2b = l[3] - l[1]$ и $l[1]$, $l[3]$ делятся на p^n, то и $2b$ делится на p^n. Из этого и того, что p - простое число больше 2, заключаем, что b делится на p^n. Но $b = l[2] - l[1]$ и $l[1]$ делится на p^n, а это значит, что и $l[2]$ делится на p^n. Получаем $l[2] \in (p^n \oplus p^n)$, что неверно. Поэтому этот случай невозможен.

Случай 5. $l[0])] \notin (2^n \oplus 2^n)$, $l[1] \in (p^n \oplus p^n)$.
Тогда $l[0] \in (p^n \oplus p^n)$. Значит, $a = l[0]$, $b = l[1] - l[0]$ и оба числа делятся на p^n. Поэтому $l \subseteq (p^n \oplus p^n)$.

Случай 6. $l[0])] \notin (2^n \oplus 2^n)$, $l[1] \notin (p^n \oplus p^n)$, $l[2] \in (2^n \oplus 2^n)$.
Тогда $l[1] \in (2^n \oplus 2^n)$, то есть $l[1]$ делится на 2^n. Аналогично, $l[2]$ делится на 2^n. Отсюда заключаем, что и $b = l[2] - l[1]$ делится на 2^n. Так как $b = l[1] - l[0]$ и $l[1]$ делится на 2^n, то и $l[0]$ делится на 2^n, что неверно. Значит, этот случай невозможен.

Случай 7. $l[0])] \notin (2^n \oplus 2^n)$, $l[1] \notin (p^n \oplus p^n)$, $l[2] \notin (2^n \oplus 2^n)$, $l[3] \in (p^n \oplus p^n)$.
Тогда $l[1] \in (2^n \oplus 2^n)$ и $l[0], l[2] \in (p^n \oplus p^n)$. Значит, $l[2]$ и $l[3]$ делятся на p^n, то есть и $b = l[3] - l[2]$ делится на p^n. Но $b = l[1] - l[0]$ и $l[0]$ делится на p^n, а это значит, что и $l[1]$ делится на p^n, что неверно. Поэтому этот случай невозможен.

Случай 8. $l[0])] \notin (2^n \oplus 2^n)$, $l[1] \notin (p^n \oplus p^n)$, $l[2] \notin (2^n \oplus 2^n)$, $l[3] \notin (p^n \oplus p^n)$.
Тогда $l[0], l[2] \in (p^n \oplus p^n)$ и $l[1], l[3] \in (2^n \oplus 2^n)$. Так как $2b = l[2] - l[0]$ и $l[0]$, $l[2]$ делятся на p^n, то и $2b$ делится на p^n. Из этого и того, что p - простое число больше 2, заключаем, что b делится на p^n. Но $b = l[1] - l[0]$ и $l[0]$ делится на p^n, а это значит, что и $l[1]$ делится на p^n. Но это неверно. Значит, этот случай невозможен.

Таким образом, все случаи разобраны. Утверждение леммы 3 доказано.

Лемма 4. *Пусть* $S \subseteq \mathbb{N}^+$ *- прогрессивное множество,* $S_0 = (1 \oplus 3) \bigcup \{3 \cdot x \mid x \in S\}$. *Тогда* S_0 *- прогрессивное множество и*

$$dim\ S_0 = 1 + dim\ S,\ Dim\ S_0 = 1 + Dim\ S.$$

Доказательство. Сначала докажем корректность определения чисел $dim\ S$ и $Dim\ S$. Прогрессивное множество по определению можно представить в виде объединения конечного количества ОАП. Очевидно, что среди всех таких представлений найдется способ, для которого это количество минимально. Поэтому $dim\ S$ существует.

Далее, пусть для некоторых $a, b, c, d \in \mathbb{N}^+$ верно

$$(a \oplus b) \supseteq (c \oplus d).$$

Тогда, очевидно, существуют $m \in \mathbb{N}^+, n \in \mathbb{N}$ такие, что $c = a + m \cdot b$, $d = n \cdot b$. Поэтому

$$\begin{gathered}(a \oplus b) \setminus (c \oplus d) = \\ = (a \oplus 0) \sqcup ((a+b) \oplus 0) \sqcup \ldots \sqcup ((a + (m-1) \cdot b) \oplus 0) \sqcup \\ \sqcup ((a + (m+1) \cdot b \oplus n \cdot b) \sqcup ((a + (m+2) \cdot b) \oplus n \cdot b) \sqcup \ldots \sqcup \\ \sqcup ((a + (m+n-1) \cdot b) \oplus n \cdot b)\,. \end{gathered} \tag{4.1}$$

Для любых $t_1, t_2 \in \mathbb{SGAP}$ верно, что

$$t_1 \cap t_2 = \emptyset \text{ или } t_1 \cap t_2 \in \mathbb{SGAP}. \tag{4.2}$$

Кроме того,

$$t_1 \setminus t_2 = t_1 \setminus (t_1 \cap t_2)\,. \tag{4.3}$$

Из (4.1), (4.2) и (4.3) следует, что разность $t_1 \setminus t_2$ любых двух $t_1, t_2 \in \mathbb{SGAP}$ можно представить в виде конечного объединения попарно непересекающихся ОАП.

Так как S прогрессивно, то для некоторого $k \in \mathbb{N}$ верно, что

$$S = \bigcup_{i=1}^{k} l_i, \text{где } l_i \in \mathbb{SGAP}.$$

Тогда

$$S = l_1 \bigsqcup (l_2 \setminus l_1) \bigsqcup ((l_3 \setminus l_2) \setminus l_1) \bigsqcup \ldots \bigsqcup ((\ldots (l_k \setminus l_{k-1}) \setminus \ldots \setminus l_1).$$

Отсюда получаем, что S можно представить в виде объединения конечного количества непересекающихся ОАП. Среди всех таких представлений найдется способ, для которого это количество минимально. Поэтому $Dim\ S$ существует.

Переходим к доказательству основной части леммы. Пусть $dim\ S = k$ и для некоторых $a_i, b_i \in \mathbb{N}^+, i = 1, \ldots, k$ верно

$$S = \bigcup_{i=1}^{k} (a_i \oplus b_i). \tag{4.4}$$

Тогда

$$S_0 = \left(\bigcup_{i=1}^{k} (3 \cdot a_i \oplus 3 \cdot b_i) \right) \cup (1 \oplus 3). \tag{4.5}$$

Значит, S_0 прогрессивно. Поэтому у него существуют первая и вторая размерности. Пусть $dim\ S_0 = k_0$ и для некоторых $c_i, d_i \in \mathbb{N}^+, i = 1, \ldots, k_0$ верно

$$S_0 = \bigcup_{i=1}^{k_0} (c_i \oplus d_i).$$

Так как

$$S_0 \bigcap (2 \oplus 3) = \emptyset, \tag{4.6}$$

то по лемме 1 для всех $i = 1, \ldots, k_0$ верно, что d_i кратно 3. Особо отметим, что d_i при этом могут быть равны 0. Обозначаем $I = \{1, 2, \ldots, k_0\}$. Рассмотрим два множества:

$$A_1 = \{i \in I \mid c_i \equiv 1 (mod\ 3)\},\ A_2 = \{i \in I \mid c_i \equiv 0 (mod\ 3)\}.$$

Из (4.6) следует, что $A_1 \bigsqcup A_2 = I$. Так как d_i кратно 3, то

$$\bigcup_{i \in A_1} (c_i \oplus d_i) \subseteq (1 \oplus 3) \quad \text{и} \quad \bigcup_{i \in A_2} (c_i \oplus d_i) \subseteq (0 \oplus 3).$$

Отсюда получаем:

$$\left(\bigcup_{i \in A_1} (c_i \oplus d_i) \right) \bigsqcup \left(\bigcup_{i \in A_1} (c_i \oplus d_i) \right) = S_0.$$

Поэтому

$$\bigcup_{i\in A_1}(c_i\oplus d_i)=S_0\bigcap(1\oplus 3)=(1\oplus 3),$$

$$\bigcup_{i\in A_2}(c_i\oplus d_i)=S_0\bigcap(0\oplus 3)=\{3\cdot x\mid x\in S\}.$$

По определению первой размерности получаем, что $|A_2|\geq dim\ S$. Значит,

$$dim\ S_0=k_0=|I|=|A_1|+|A_2|\geq 1+dim\ S.$$

Но из (4.5) следует, что

$$dim\ S_0\leq 1+dim\ S.$$

Объединяя два этих неравенства, окончательно получаем:

$$dim\ S_0=1+dim\ S.$$

Заменяя в приведенном выше рассуждении знак $\bigcup$ на знак $\bigsqcup$, точно так же доказывается, что

$$Dim\ S_0=1+Dim\ S.$$

Утверждение леммы 4 доказано.

Лемма 5. *Пусть при* $n\in\mathbb{N}$

$$E_n=\{0,1,\ldots,n-1\},$$

$$\mathbb{A}(n)=\{S\in\overline{Sp}(\mathbb{T})\mid S\neq\mathbb{N}^+,E_n\subseteq S\},$$

$$f(n)=\min_{S\in\mathbb{A}(n)}\{Dim\ S\}.$$

Тогда $f(n)$ *неубывает и* $f(n)\to\infty$ *при* $n\to\infty$.

Доказательство. Сначала докажем, что функция f определена корректно. В работе [1] показано, что любой тонкий язык в алфавите A можно представить в виде конечного объединения множеств вида $\alpha\cdot(\beta^k)^*\cdot\gamma$, где α,β,γ - произвольные слова в алфавите A. Поэтому для любого $S\in\mathbb{T}$ верно, что его спектр можно представить в виде конечного объединения ОАП, то есть этот спектр будет прогрессивным. В доказательстве леммы 4 было показано, что у любого прогрессивного множества есть первая и вторая размерность. Значит, для любого $S \in \overline{Sp}(\mathbb{T})$ существует $Dim\ S$. Корректность определения функции f теперь тривиально следует из того факта, что значения $Dim\ S$ при $S \in \mathbb{A}(n)$ дискретны и ограничены снизу 1. Докажем, что при $n \in \mathbb{N}$ верно

$$f(n) \leq f(n+1).$$

Пусть $S_0 \in \mathbb{A}(n+1)$. Тогда $S_0 \in \overline{Sp}(\mathbb{T})$ и $S_0 \neq \mathbb{N}^+$, $E_{n+1} \subseteq S_0$. Значит, $E_n \subseteq S_0$. Поэтому $S_0 \in \mathbb{A}(n)$ и $\mathbb{A}(n+1) \subseteq \mathbb{A}(n)$. Отсюда получаем:

$$f(n) = \min_{S \in \mathbb{A}(n)} \{Dim\ S\} \leq \min_{S \in \mathbb{A}(n+1)} \{Dim\ S\} = f(n+1).$$

Осталось доказать, что $f(n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Пусть это не так. Тогда из неубывания функции $f(n)$ следует, что существует $C_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено $f(n) < C_0$. Докажем, что при всех $C \geq C_0$, $x \in \mathbb{N}$ выполнено:

$$f(C) \geq f\left(\left[\frac{C}{C_0}\right]\right) + 1. \tag{5.1}$$

Пусть $C \geq C_0$, $C \in \mathbb{N}$, $f(C) = k_0$. По определению функции f существует $S_0 \in \mathbb{A}(C)$ такое, что $Dim\ S_0 = k_0$ и для любого $S \in \mathbb{A}(C)$ выполнено $Dim\ S \geq k_0$. Здесь

$$S_0 \neq \mathbb{N}^+ \tag{5.2}$$

и $E_C \subseteq S_0$. По определению второй размерности существуют попарно непересекающиеся $l_1, l_2, \ldots, l_{k_0} \in \mathbb{SGAP}$ такие, что

$$S_0 = \bigsqcup_{i=1}^{k_0} l_i.$$

Для каждого $i = 1, \ldots, k_0$ существуют $a_i, b_i \in \mathbb{N}^+$, для которых $l_i = (a_i \oplus b_i)$. Рассмотрим множество

$$I = \{i \mid 1 \leq i \leq k_0,\ l_i \cap E_C \neq \emptyset\}.$$

Для $i \in I$ верно, что $a_i < C$, так как иначе $l_i \cap E_C = \emptyset$. Заметим, что

$$|I| \leq k_0 = f(C) < C_0.$$

Значит, существуют $x_1, x_2 \in E_{C_0}$ и $r \in I$ такие, что $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in (a_r \oplus b_r)$. Тогда

$$C_0 > b_r > 0 \tag{5.3}$$

и можно разделить a_r на b_r с остатком. Пусть этот остаток равен t, то есть $0 \leq t < b_r$ и $a_r \equiv t \ (mod\ b_r)$. Заметим, что

$$(a_r \oplus b_r) \bigcup E_C \supseteq (t \oplus b_r), \tag{5.4}$$

так как выше было показано, что $a_r < C$. Рассмотрим следующие ОАП:

$$(0 \oplus b_r), (1 \oplus b_r), \ldots, (t-1 \oplus b_r), (t+1 \oplus b_r), \ldots (b_r - 1 \oplus b_r).$$

Из (5.4) получаем, что

$$\left(\bigsqcup_{0 \leq i < b_r, i \neq t} (i \oplus b_r) \right) \bigcup (a_r \oplus b_r) \bigcup E_C \supseteq \left(\bigsqcup_{0 \leq i < b_r, i \neq t} (i \oplus b_r) \right) \bigcup (t \oplus b_r) = \mathbb{N}^+.$$

Значит,

$$\left(\bigsqcup_{0 \leq i < b_r, i \neq t} (i \oplus b_r) \right) \bigcup (a_r \oplus b_r) \bigcup E_C = \mathbb{N}^+.$$

Так как $(a_r \oplus b_r) \subseteq S_0$ и $E_C \subseteq S_0$, то

$$\mathbb{N}^+ \setminus S_0 = \left(\left(\bigsqcup_{0 \leq i < b_r, i \neq t} (i \oplus b_r) \right) \bigcup (a_r \oplus b_r) \bigcup E_C \right) \setminus S_0 = \left(\bigsqcup_{0 \leq i < b_r, i \neq t} (i \oplus b_r) \right) \setminus S_0. \tag{5.5}$$

Из (5.2) и (5.5) получаем, что существует $u \in \mathbb{N}^+$ такое, что

$$0 \leq u < b_r, u \neq t \tag{5.6}$$

и

$$(u \oplus b_r) \not\subseteq S_0 = \bigsqcup_{i=1}^{k_0} l_i.$$

Тогда

$$\bigsqcup_{i=1}^{k_0} (l_i \cap (u \oplus b_r)) = \left(\bigsqcup_{i=1}^{k_0} l_i \right) \bigcap (u \oplus b_r) \subsetneq (u \oplus b_r).$$

С другой стороны,

$$\left(\bigsqcup_{i=1}^{k_0} l_i\right)\bigcap(u\oplus b_r)=S_0\bigcap(u\oplus b_r)\supseteq E_C\bigcap(u\oplus b_r).$$

Из (5.3) и (5.6) следует:

$$\left|E_C\bigcap(u\oplus b_r)\right|\geq\left[\frac{C}{b_r}\right]\geq\left[\frac{C}{C_0}\right]. \tag{5.7}$$

Объединяя предыдущие результаты, получаем:

$$E_C\bigcap(u\oplus b_r)\subseteq\bigsqcup_{i=1}^{k_0}\left(l_i\cap(u\oplus b_r)\right)\subsetneq(u\oplus b_r). \tag{5.8}$$

Из (5.6) вспоминаем, что $u\neq t$ и, значит,

$$l_r\cap(u\oplus b_r)=(a_r\oplus b_r)\cap(u\oplus b_r)\subseteq(t\oplus b_r)\cap(u\oplus b_r)=\emptyset.$$

Поэтому (5.8) можно переписать в следующем виде:

$$E_C\bigcap(u\oplus b_r)\subseteq\bigsqcup_{\substack{i=1,\ldots,k_0,\\ i\neq r}}\left(l_i\cap(u\oplus b_r)\right)\subsetneq(u\oplus b_r). \tag{5.9}$$

Наконец, из (5.7), (5.9) и определения функции f получаем:

$$k_0-1\geq f\left(\left[\frac{C}{C_0}\right]\right).$$

Так как $k_0=f(C)$, то свойство (5.1) доказано. Из (5.1) и монотонного неубывания функции f мгновенно вытекает, что $f(n)\to\infty$ при $n\to\infty$.

Полученное противоречие завершает доказательство леммы 5.

Лемма 6. *Пусть $n\in\mathbb{N}$, f - функция из леммы 5 и p - простое число больше 2 такое, что $f(p^n-1)>n$. Тогда*

$$dim\left((2^n\oplus 2^n)\cup(p^n\oplus p^n)\right)=2\ \ \text{и}\ \ Dim\left((2^n\oplus 2^n)\cup(p^n\oplus p^n)\right)=n+1.$$

Доказательство. Обозначим $K = (2^n \oplus 2^n) \cup (p^n \oplus p^n)$. Очевидно, что $dim\ K \leq 2$. Пусть $dim\ K = 1$ и для некоторых $a, b \in \mathbb{N}^+$ верно $K = (a \oplus b)$. Тогда 2^n и p^n делятся на b. Так как $(2^n, p^n) = 1$, то $b = 1$. Значит,

$$K = (a \oplus 1). \tag{6.1}$$

Но

$$(2p)^n \in K,\ (2p)^n + 1 \notin K. \tag{6.2}$$

Очевидно, что (6.1) и (6.2) противоречат друг другу. Значит, $dim\ K = 2$.

Докажем теперь, что

$$Dim\ K = n + 1.$$

Пусть $dim\ K = k$, $E_k = \{1, \ldots, k\}$ и для некоторых $a_i, b_i \in \mathbb{N}^+, i = 1, \ldots, k$ верно

$$K = \bigsqcup_{i=1}^{k} (a_i \oplus b_i). \tag{6.3}$$

Вводим обозначения:

$$H_1 = \{i \cdot 2^n \mid 1 \leq i < p^n\}, \quad H_2 = \{i \cdot p^n \mid i \in E_k,\ i \not\equiv 0 (mod\ 2^n)\},$$

$$I_1 = \{i \mid i \in E_k,\ H_1 \cap (a_i \oplus b_i) \neq \emptyset\}, \quad I_2 = \{i \mid i \in E_k,\ H_2 \cap (a_i \oplus b_i) \neq \emptyset\},$$

$$S_1 = \bigsqcup_{i \in I_1} (a_i \oplus b_i), \quad S_2 = \bigsqcup_{i \in I_2} (a_i \oplus b_i).$$

Так как $H_1 \bigcap (p^n \oplus p^n) = \emptyset$ и $H_2 \bigcap (2^n \oplus 2^n) = \emptyset$, то по лемме 3:

$$S_1 \subseteq (2^n \oplus 2^n), \quad S_2 \subseteq (p^n \oplus p^n), \quad I_1 \cap I_2 = \emptyset, \quad S_1 \cap S_2 = \emptyset. \tag{6.4}$$

Рассмотрим 2 случая:

$$((2p)^n \oplus (2p)^n) \subseteq S_1, \tag{1}$$

$$((2p)^n \oplus (2p)^n) \not\subseteq S_1. \tag{2}$$

Пусть верно (1). Тогда $S_2 \cap ((2p)^n \oplus (2p)^n) = \emptyset$. Отсюда и из (6.4) получаем:

$$S_2 \subseteq (p^n \oplus p^n) \setminus ((2p)^n \oplus (2p)^n) = H_2. \tag{6.5}$$

Так как $H_2 \subseteq K$, то из (6.3) и определения множеств H_2, S_2 следует, что

$$H_2 \subseteq S_2. \tag{6.6}$$

По лемме 2 $Dim H_2 = n$. Объединяя (6.5) и (6.6), получаем:

$$H_2 = S_2 \bigsqcup_{i \in I_2} (a_i \oplus b_i).$$

Значит, $|I_2| \geq n$. Отсюда и из (6.4) получаем

$$k \geq |I_1| + |I_2| \geq n + 1. \tag{6.7}$$

Но $K = (2^n \oplus 2^n) \sqcup H_2$ и $H_2 = \{p^n \cdot i \mid i \in \mathbb{N}^+ \setminus (0 \oplus 2^n)\}$. Поэтому по лемме 2

$$k = Dim\ K \leq 1 + Dim\ H_2 = 1 + n. \tag{6.8}$$

Из (6.7) и (6.8) окончательно получаем:

$$Dim\ K = k = n + 1.$$

Пусть теперь верно (2). Тогда, с одной стороны,

$$S_1 \subseteq (2^n \oplus 2^n) \setminus ((2p)^n \oplus (2p)^n) = \{2^n \cdot i \mid i \in \mathbb{N}^+ \setminus (0 \oplus p^n)\}. \tag{6.9}$$

С другой стороны,

$$\{2^n \cdot i \mid 1 \leq i < p^n\} = H_1 \subseteq S_1. \tag{6.10}$$

Так как $f(p^n - 1) > n$, то из определения функции f и из (6.9), (6.10) получаем:

$$Dim\ K = k \geq Dim\ S_1 > n.$$

Заметим, что (6.8) верно и для случая (2). Поэтому и в этом случае верно

$$Dim\ K = k = n + 1.$$

Утверждение леммы 6 доказано.

Доказательство основных утверждений

Теорема 1.

$$\{dim\ S \mid S \in \overline{Sp}(\mathbb{T})\} = \mathbb{N},$$

$$\{Dim\ S \mid S \in \overline{Sp}(\mathbb{T})\} = \mathbb{N},$$

$$\{(dim\ S, Dim\ S) \mid S \in \overline{Sp}(\mathbb{T})\} = (1,1) \bigcup \{(m,n) \mid m,n \in \mathbb{N},\ 2 \le m \le n\}.$$

Доказательство. Для начала заметим, что из доказательства леммы 5 следует, что у всех $S \in \overline{Sp}(\mathbb{T})$ существуют первая и вторая размерности.

Пусть a - буква алфавита и $n_1 \in \mathbb{N}$. Рассмотрим множество

$$S_1 = \{a^i \mid i \in \mathbb{N}^+ \setminus (0 \oplus 2^{n_1})\}.$$

Очевидно, что $_1 \in \mathbb{T}$. Поэтому

$$\mathbb{N}^+ \setminus (0 \oplus 2^{n_1}) = Sp(S) \in \overline{Sp}(\mathbb{T}).$$

Из леммы 2 следует, что

$$dim\ S_1 = Dim\ S_1 = n_1.$$

Значит,

$$\{dim\ S \mid S \in \overline{Sp}(\mathbb{T})\} = \mathbb{N} \ \text{ и } \ \{Dim\ S \mid S \in \overline{Sp}(\mathbb{T})\} = \mathbb{N}.$$

Возьмем какое-нибудь множество $S_2 \in \overline{Sp}(\mathbb{T})$, для которого $dim\ S_2 = 1$. Очевидно, что тогда $Dim\ S_2 = 1$. Поэтому

$$(1,1) \in \{(dim\ S, Dim\ S) \mid S \in \overline{Sp}(\mathbb{T})\} \tag{1}$$

и для любого $n_2 \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

$$(1, n_2) \notin \{(dim\ S, Dim\ S) \mid S \in \overline{Sp}(\mathbb{T})\}. \tag{2}$$

Возьмем произвольное $n_3 \in \mathbb{N}$. Так как по лемме 5 $f(n) \to \infty$ при $n \to \infty$, то существует простое число $p > 2$ такое, что $f(p_3^n - 1) > n_3$. Обозначаем:

$$S_3 = \{a^i \mid i \in (2^{n_3} \oplus 2^{n_3}) \cup (p^{n_3} \oplus p^{n_3})\}.$$

Очевидно, что $S_3 \in \mathbb{T}$ и по лемме 6

$$dim\ Sp(S_3) = 2, \quad Dim\ Sp(S_3) = n_3 + 1.$$

Значит, для всех $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ верно, что

$$(2, n) \in \{(dim\ S, Dim\ S) \mid S \in \overline{Sp}(\mathbb{T})\}. \tag{3}$$

Пусть теперь $n_4, n_5 \in \mathbb{N},\ 2 \leq n_4 \leq n_5$ и

$$(n_4, n_5) \in \{(dim\ S, Dim\ S) \mid S \in \overline{Sp}(\mathbb{T})\}. \tag{4}$$

Тогда существует $S_4 \in \overline{Sp}(\mathbb{T})$ такое, что

$$dim\ S_4 = n_4, \quad Dim\ S_5 = n_5.$$

Обозначим через S_5 множество $(1 \oplus 3) \bigcup \{3 \cdot x \mid x \in S_4\}$. По лемме 5 S_5 - прогрессивное множество и

$$dim\ S_5 = 1 + dim\ S_4 = 1 + n_4, \quad Dim\ S_5 = 1 + Dim\ S_4 = 1 + n_5.$$

Так как S_5 является спектром тонкого множества $\{a^i \mid i \in S_5\}$, то $S_5 \in \overline{Sp}(\mathbb{T})$. Значит,

$$(n_4 + 1, n_5 + 1) \in \{(dim\ S, Dim\ S) \mid S \in \overline{Sp}(\mathbb{T})\}. \tag{5}$$

Из (3),(4) и (5) получаем, что при $m, n \in \mathbb{N},\ 2 \leq m \leq n$ верно

$$(m, n) \in \{(dim\ S, Dim\ S) \mid S \in \overline{Sp}(\mathbb{T})\}. \tag{6}$$

Осталось заметить, что для любого $S \in \overline{Sp}(\mathbb{T})$ верно $dim\ S \leq Dim\ S$. Значит, при $m, n \in \mathbb{N},\ 2 \leq n < m$ верно, что

$$(m, n) \notin \{(dim\ S, Dim\ S) \mid S \in \overline{Sp}(\mathbb{T})\}. \tag{7}$$

Объединяя (1),(2),(3),(6) и (7), окончательно получаем:

$$\{(dim\ S, Dim\ S) \mid S \in \overline{Sp}(\mathbb{T})\} = (1, 1) \bigcup \{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{N},\ 2 \leq m \leq n\}.$$

Утверждение теоремы 1 доказано.

Список литературы

[1] Дергач П. С. О каноническом регулярном представлении S-тонких языков. Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 1, М., Сс. 211-242.

[2] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

[3] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.

[4] Марков А. А. Введение в теорию кодирования. М.: Наука, 1982.

[5] Алешин С. В. Полугруппы и группы автоматов. Интеллектуальные системы, 2013. Т.17, вып. 1-4, М., Сс. 129-141.

[6] Иванов И. Е. t О некоторых свойствах автоматов с магазинной памятью. Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 1, М., Сс. 243-252.

[7] Часовских А. А. Условия полноты линейно-p-автоматных функций. Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 3, М., Сс. 203-252.

[8] Александров Д. Е. Об оценках автоматной сложности распознавания классов регулярных языков. Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 4, М., Сс. 161-190.

[9] Гасанов Э. Э. Прогнозирование периодических сверхсобытий автоматами. Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 1, М., Сс. 23-34.

[10] Иванов И. Е. О сохранении периодических последовательностей автоматами с магазинной памятью с однобуквенным магазином. Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 1, М., Сс. 145-160.

[11] Летуновский А. А. Выразимость линейных автоматов относительно расширенной суперпозиции. Интеллектуальные системы, 2014. Т.19, вып. 1, М., Сс. 161-170.

[12] Гербус В. Г. О связи функций автомата и автоматной функции. Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 2, М., Сс. 109-116.

[13] Миронов А. М. Критерий реализуемости функций на строках вероятностными автоматами Мура с числовым выходом. Интеллектуальные системы, 2014. Т.19, вып. 2, М., Сс. 149-160.

[14] Терехина И. Ю. Модель невлияния для квантовых автоматов. Интеллектуальные системы, 2014. Т.19, вып. 2, М., Сс. 183-190.

About two spectral dimensions of the thin languages

P. S. Dergach

Abstract: The article is devoted to the class $\mathbb{T}$ of thin languages - regular languages with no more then linear growth function. For such languages it is introduced the concept of two dimensions - dim and Dim. The paper describes all possible values of this quantities. More over, we obtain all possible values of the pairs $(dimP, DimP)$, where $P \in \mathbb{T}$.

Keywords: spectrum, thin language, dimension, growth function.