

Неразрешимое суперинтуиционистское пропозициональное исчисление от трех переменных

Г. В. Боков

В данной работе построено неразрешимое суперинтуиционистское пропозициональное исчисление, аксиомы которого содержат только три переменные.

Ключевые слова: Суперинтуиционистское пропозициональное исчисление, неразрешимое исчисление, машина Минского.

Введение

Первое суперинтуиционистское пропозициональное исчисление было построено Шехтманом в 1978 [2]. Аксиомы этого исчисления содержали семь переменных. В 1994 году Чагров [1] получил суперинтуиционистское исчисление от четырех переменных. В [3, Раздел 16.9] он отмечает, что для случая двух и трех переменных этот вопрос остается открытым. В данной работе будет показано существование суперинтуиционистского пропозиционального исчисления, аксиомы которого зависят от трех переменных.

Основной результат

Под суперинтуиционистским пропозициональным исчислением понимается конечное расширение интуиционистского исчисления высказываний **Int**. Суперинтуиционистское исчисление, полученное из **Int**

добавлением в качестве новой аксиомы формулы A будем обозначать через **Int** + A .

Пусть

$$\begin{aligned} S_{-2}[x] &= \neg x, & S_{-1}[x] &= T_{-2}[x] \rightarrow x, \\ T_{-2}[x] &= \neg\neg x, & T_{-1}[x] &= S_{-1}[x] \rightarrow S_{-2}[x] \vee T_{-2}[x], \\ S_i[x] &= T_{i-1}[x] \rightarrow S_{i-1}[x] \vee T_{i-2}[x], \\ T_i[x] &= S_i[x] \rightarrow S_{i-1}[x] \vee T_{i-1}[x] \quad \text{для } i \geq 0. \end{aligned}$$

Определим вспомогательные формулы от переменных p_0, p_1 и p_2 :

$$A_i^0 = S_{i+3}[p_0], \quad B_i^0 = T_{i+3}[p_0] \quad \text{для } i \geq -5;$$

$$A_i^j = S_{i+3}[p_j], \quad B_i^j = T_{i+3}[p_j] \quad \text{для } i \in \{-3, -4, -5\}, \quad j \in \{1, 2\};$$

$$\begin{aligned} A_{-2}^j &= B_{-3}^j \rightarrow A_{-3}^j \vee B_{-4}^1, & A_{-1}^j &= B_{-2}^j \rightarrow A_{-2}^j \vee B_{-3}^1, \\ B_{-2}^j &= A_{-3}^j \rightarrow C_j \vee B_{-3}^1, & B_{-1}^j &= A_{-2}^j \rightarrow A_{-3}^j \vee B_{-2}^1 \quad \text{для } j \in \{1, 2\}; \end{aligned}$$

$$A_i^1 = C_2 \wedge B_{i-1}^1 \rightarrow C_1 \vee A_{i-1}^1 \vee B_{i-2}^1,$$

$$B_i^1 = C_2 \wedge A_{i-1}^1 \rightarrow C_1 \vee A_{i-2}^1 \vee B_{i-1}^1 \quad \text{для } i \geq 0;$$

$$A_i^1 = C_2 \wedge B_{i-1}^1 \rightarrow C_1 \vee A_{i-1}^1 \vee B_{i-2}^1,$$

$$B_i^1 = C_2 \wedge A_{i-1}^1 \rightarrow C_1 \vee A_{i-2}^1 \vee B_{i-1}^1 \quad \text{для } i \geq 0;$$

где $C_1 = A_0^0$ и $C_2 = B_0^0$. Для $s, m, n \geq 0$ положим

$$\begin{aligned} E_{s,m,n} &= A_{3s+2}^0 \wedge B_{3s+2}^0 \wedge A_{m+1}^1 \wedge B_{m+1}^1 \wedge A_{n+1}^2 \wedge B_{n+1}^2 \rightarrow \\ &\rightarrow A_{3s+1}^0 \vee B_{3s+1}^0 \vee A_m^1 \vee B_m^1 \vee A_n^2 \vee B_n^2. \end{aligned}$$

Кроме того определим формулы $F_k = F_k[x, y, u, v]$ и $G_k = G_k[x, y, u, v]$:

$$F_0 = x,$$

$$G_0 = y,$$

$$F_1 = v \wedge y \rightarrow u \vee x,$$

$$G_1 = v \wedge x \rightarrow u \vee y,$$

$$F_k = v \wedge G_{k-1} \rightarrow u \vee F_{k-1} \vee G_{k-2}, \quad G_k = v \wedge F_{k-1} \rightarrow u \vee G_{k-1} \vee F_{k-2},$$

где $k \geq 0$. Положим

$$\begin{aligned} F_k^1 &= F_k[p_1, p_2, A_{-1}^0, B_{-1}^0], & G_k^1 &= G_k[p_1, p_2, A_{-1}^0, B_{-1}^0], \\ F_k^2 &= F_k[p_1, p_2, B_{-1}^0, A_{-1}^0], & G_k^2 &= G_k[p_1, p_2, B_{-1}^0, A_{-1}^0] \end{aligned}$$

Неразрешимое суперинтуиционистское пропозициональное исчисление от трех переменных

для всех $k \geq 0$. Последнее семейство формул, необходимое для формулировки результата, определим следующим образом:

$$\begin{aligned}\hat{E}_{s,i,j} &= A_{3s+2}^0 \wedge B_{3s+2}^0 \wedge F_{i+1}^1 \wedge G_{i+1}^1 \wedge F_{j+1}^2 \wedge G_{j+1}^2 \rightarrow \\ &\rightarrow A_{3s+1}^0 \vee B_{3s+1}^0 \vee F_i^1 \vee G_i^1 \vee F_j^2 \vee G_j^2, \\ \hat{E}_{s,0,*} &= A_{3s+2}^0 \wedge B_{3s+2}^0 \wedge A_1^1 \wedge B_1^1 \rightarrow A_{3s+1}^0 \vee B_{3s+1}^0 \vee A_0^1 \vee B_0^1 \vee q, \\ \hat{E}_{s,*,0} &= A_{3s+2}^0 \wedge B_{3s+2}^0 \wedge A_1^2 \wedge B_1^2 \rightarrow A_{3s+1}^0 \vee B_{3s+1}^0 \vee p \vee A_0^2 \vee B_0^2, \\ \hat{E}_{s,0,0} &= E_{s,0,0},\end{aligned}$$

где $s \geq 0$, $i, j \geq 1$.

Пусть \mathcal{M} — машина Минского [5]. Определим формулу $Ax(I)$, задающую инструкцию I машины \mathcal{M} :

1) Если I — это инструкция вида $s \mapsto \langle t, 1, 0 \rangle$, то

$$Ax(I) = \hat{E}_{t,2,1} \rightarrow \hat{E}_{s,1,1};$$

2) Если I — это инструкция вида $s \mapsto \langle t, 0, 1 \rangle$, то

$$Ax(I) = \hat{E}_{t,1,2} \rightarrow \hat{E}_{s,1,1};$$

3) Если I — это инструкция вида $s \mapsto \langle t, -1, 0 \rangle / \langle u, 0, 0 \rangle$, то

$$Ax(I) = (\hat{E}_{t,1,1} \rightarrow \hat{E}_{s,2,1}) \wedge (\hat{E}_{u,0,*} \rightarrow \hat{E}_{s,0,*});$$

4) Если I — это инструкция вида $s \mapsto \langle t, 0, -1 \rangle / \langle u, 0, 0 \rangle$, то

$$Ax(I) = (\hat{E}_{t,1,1} \rightarrow \hat{E}_{s,1,2}) \wedge (\hat{E}_{u,*,0} \rightarrow \hat{E}_{s,*,0}),$$

Наконец, определим формулу $Ax(\mathcal{M})$, кодирующую поведение машины \mathcal{M} :

$$Ax(\mathcal{M}) = \bigwedge_{I \in \mathcal{M}} Ax(I).$$

Следующая лемма устанавливает соответствие между выводимостью конфигураций машины \mathcal{M} и выводимостью формул в исчислении **Int** + $Ax(\mathcal{M})$.

Лемма. $E_{t,k,l} \rightarrow E_{s,m,n} \in \mathbf{Int} + Ax(\mathcal{M}) \iff \langle s, m, n \rangle \xRightarrow{\mathcal{M}} \langle t, k, l \rangle$.

Поскольку существует машина \mathcal{M} и стартовая конфигурация $\langle s, m, n \rangle$ с неразрешимой проблемой вывода конфигураций [3], то верна следующая теорема.

Теорема. Исчисление **Int** + $Ax(\mathcal{M})$ неразрешимо.

Заключение

В данной работе было построено неразрешимое суперинтуиционистское пропозициональное исчисление от трех переменных. В работе [4] было показано, что интуиционистская формула

$$A = (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$$

не выводима из множества всех тавтологий от двух переменных. Тем самым, не существует неразрешимого суперинтуиционистского исчисления, аксиомы которого содержат менее трех переменных.

Список литературы

- [1] Чагров А. В. Неразрешимые свойства суперинтуиционистских логик. // Математические вопросы кибернетики, 1994, вып. 5, стр. 62–108.
- [2] Шехтман В. Б. Неразрешимое суперинтуиционистское исчисление высказываний. // Доклады АН СССР, 1978, т. 240, №. 3, стр. 549–552.
- [3] Chagrov A., Zakharyashev M. Modal Logic. — Oxford, Clarendon Press, 1997, vol. 35 of Oxford logic guides, 605 pp.
- [4] Gladstone M. D. On the number of variables in the axioms,. // Notre Dame Journal of Formal Logic, 1970, vol. 11, p. 1–15.
- [5] Minsky M. L. Computation: Finite and Infinite Machines. — Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1967. xviii + 317 pp.

Undecidable three-variables superintuitionistic propositional calculus

G. V. Bokov

In this paper, we construct an undecidable superintuitionistic propositional calculus with axioms containing only three variables.

Keywords: Superintuitionistic propositional calculus, undecidable calculus, Minsky machine.