О стабилизации одной динамической системы, связанной с автоматным моделированием миграционных процессов

Д. И. Васильев

В работе рассмотрена модель динамической системы, состоящей из графа, к каждой вершине которого приписаны характеристики "благоприятности"и "количества элементов в данной вершине". Каждый элемент стремится попасть в наиболее благоприятную вершину, при этом наличие элементов в вершине есть неблагоприятный фактор. Показано, что такая система всегда имеет предельное состояние, указан класс систем, для которых это предельное состояние зависит только от количества элементов во всём графе, но не от их распределения по вершинам.

Ключевые слова: динамические системы, стабилизация, автоматное моделирование миграционных процессов.

Введение

Рассмотрим следующую динамическую систему: дано множество городов, в каждом из которых живет некоторое количество мигрантов, используемых как дешевая рабочая сила. В разных городах разная потребность в мигрантах, причем чем больше в городе мигрантов, тем меньше в них потребность, и, как следствие, тем меньше их зарплата. Каждый мигрант стремится получать как можно больший оклад, и, если видит, что такая возможность представляется в другом городе, не задумываясь переезжает. Хочется узнать, наступит ли момент, когда распределение людей устроит всех, то есть никто никуда не захочет переезжать, и если наступит, зависит ли финальное распределение от начального.

Указанная система не укладывается в рамки распространенных существующих моделей (из наиболее близких NK-модель [1], булевские сети [2]). Поэтому предлагается использовать подход, сочетающий в себе теоретико-графовые понятия и автоматное моделирование. И теоретико-графовое и автоматное направления активно развиваются и используются в самых разных прикладных и теоретических задачах [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29]. В [30] содержится обзор, в котором отражены оба направления. Предлагается следующее формальное описание нашей динамической системы: города будем представлять вершинами полного графа. Каждой такой вершине припишем тройку: количество мигрантов; количество рабочих мест; функция зарплаты, зависящая от количества мигрантов, и убывающая по этой переменной. Вводится автомат, состояниями которого является распределение мигрантов между городвами. Задается бесконечная последовательность α ребер графа, интерпретируемая как входная последовательность автомата. Функция переходов автомата определяется так, чтобыi-я итерация системы заключалась в том, что мигранты из городов-вершин, соединяемых i-м ребром входной последовательности, анализируют перспективы переезда в город-сосед по этому ребру, и если в этом есть смысл, высылают туда одного из своих представителей.

В работе показывается, что начиная с какого-то момента автомат попадает в некоторое финальное состояние и больше из него не выходит, т.е. система стабилизируется, и указаны классы систем и входных слов, для которых финальное состояние зависит лишь от суммарного количества населения (а не от его начального распределения или входного слова).

Автор выражает благодарность профессору Э.Э.Гасанову за постановку задачи и помощь в работе.

Постановка задачи и формулировка результатов

Если $m \in \mathbb{N}$, то обозначим $N_m = \{0, 1, \ldots, m\}$.

О стабилизации одной динамической системы, связанной с автоматным моделированием миграционных процессов

Пусть $G = (V, E)$ — полный граф без петель с n вершинами, т.е. $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, $E = \{\{v_1, v_2\} : v_1, v_2 \in V, v_1 \neq v_2\}$. Пусть каждой вершине графа приписана тройка: (m_i, q_i, f_i), где $m_i \in \mathbb{N}$, $q_i \in N_{m_i}$, $f_i : N_{m_i} \to \mathbb{N}$, причем f_i невозрастающая функция, т.е. для любых $a, b \in N_{m_i}$ если $a \geqslant b$, то $f_i(a) \leqslant f_i(b)$), $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Обозначим $Q(G) := \{q = (q_1, q_2, \ldots, q_n) : q_i \in N_{m_i}, i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$, $\mathcal{G}^n$ — множество всех таким образом нагруженных полных графов без петель с n вершинами.

В дальнейшем для удобства восприятия вершины графа будем интерпретировать как города, для каждого города $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ число m_i будет восприниматься как максимально возможное число людей в городе, q_i — текущее число людей в городе, f_i — функция зарплат в i-м городе в зависимости от числа проживающих в городе людей. Вектор $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ будем называть *состоянием* графа G.

В соответствии с терминологией [31] рассмотрим автомат без выходов $A^G = (E, Q(G), \varphi, q_0)$, где E — входной алфавит, $Q(G)$ — алфавит состояний, $\varphi : Q(G) \times E \to Q(G)$ — функция переходов, q_0 — начальное состояние. Автомат A^G задается канонической системой

$$\begin{cases} q(1) = q_0, \\ q(t+1) = \varphi(q(t), v(t)), \end{cases}$$

где для $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$, $v = \{v_1, v_2\}$,

$$\varphi(q, v) = \begin{cases} q', \text{ если } f_{v_2}(q_{v_2} + 1) > f_{v_1}(q_{v_1}), q_{v_2} < m_{v_2}, q_{v_1} > 0, \\ q'', \text{ если } f_{v_1}(q_{v_1} + 1) > f_{v_2}(q_{v_2}), q_{v_1} < m_{v_1}, q_{v_2} > 0, \\ q \text{ в остальных случаях,} \end{cases} \tag{1}$$

$$q' = (q_1, \ldots, q_{v_1-1}, q_{v_1} - 1, q_{v_1+1}, \ldots, q_{v_2-1}, q_{v_2} + 1, q_{v_2+1}, \ldots, q_n),$$
$$q'' = (q_1, \ldots, q_{v_1-1}, q_{v_1} + 1, q_{v_1+1}, \ldots, q_{v_2-1}, q_{v_2} - 1, q_{v_2+1}, \ldots, q_n).$$

В нашей интерпретации функция переходов устроена таким образом, что для пары городов v_1, v_2, если зарплата в городе v_2 после увеличения числа жителей на единицу больше, чем зарплата в городе v_1, то из города v_1 один человек переезжает в город v_2.

Через E^* будем обозначать множество всех слов в алфавите E. Через E^∞ будем обозначать множество всех сверхслов в алфавите E.

Расширим функцию φ на $Q(G) \times E^*$, а именно, если $\alpha \in E^*$, $v \in E$, то индуктивно определим

$$\varphi(q, \alpha v) = \varphi(\varphi(q, \alpha), v).$$

Пусть $\alpha \in E^\infty$, α_t - первые t символов сверхслова α. Определим

$$A^G(\alpha) = \begin{cases} \lim\limits_{t \to \infty} \varphi(q_0, \alpha_t), \text{ если таковой существует,} \\ * \text{ — в противном случае.} \end{cases}$$

Теорема 1. *Для любого графа G из $\mathcal{G}^n$, любого сверхслова α из E^∞ имеем $A^G(\alpha) \neq *$.*

Определим E_1^∞ как множество сверхслов из E^∞, в которых каждый символ из E встречается бесконечное число раз.

Пусть $\mathcal{G}_0^n$ — подмножество $\mathcal{G}^n$ такое, что

- для любого $i \in \{1, 2, ..., n\}$ функция f_i – строго убывающая,
- для любых $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, $i \neq j$, для любых $a \in N_{m_i}$, $b \in N_{m_j}$ выполняется $f_i(a) \neq f_j(b)$.

Теорема 2. *Если G_1, G_2 из $\mathcal{G}_0^n$ такие, что $A^{G_1} = (q_0^1, E, Q, \varphi)$, $A^{G_2} = (q_0^2, E, Q, \varphi)$, $|q_0^1| = |q_0^2|$, то для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in E_1^\infty$ имеет место равенство $A^{G_1}(\alpha_1) = A^{G_2}(\alpha_2)$.*

Доказательство теоремы 1

Пусть граф G находится в состоянии q и пусть в этом состоянии в городах s различных значений зарплат f_1,f_2,...,f_s, причём $f_1 < f_2 < ... < f_s$. Пусть r_i это количество городов, зарплата в которых равна f_i, $i = 1, 2, ..., s$. Понятно, что $\sum\limits_{i=1}^{s} r_i = n$. Сопоставим состоянию q вектор пар $ord_G(q) = ((f_1, r_1), \ldots, (f_s, r_s))$.

Введём на парах (f_i, r_i) следующий линейный порядок:

- если $f^i > f^j$, то $(f^i, r^i) > (f^j, r^j)$ независимо от r^i и r^j;
- если $f^i = f^j$, то $(f^i, r^i) > (f^j, r^j)$ точно тогда, когда $r^i < r^j$.

Введём лексикографический порядок на множестве всех векторов, состоящих из таких пар.

Лемма 1. *Для любых* $G \in \mathcal{G}^n$, $q \in Q$, $\{a, b\} \in E$ *если* $\varphi(q, \{a, b\}) \neq q$, *то* $ord_G(\varphi(q, \{a, b\})) > ord_G(q)$

Доказательство. Для определённости будем считать, что мигранты переезжают из города a в город b, то есть $f_a(q_a) < f_b(q_b + 1)$, $q_b < m_b$, $q_a > 0$. Пусть городов с зарплатой $f_a(q_a)$ будет r_a, а количество городов с зарплатой $f_b(q_b)$ равно r_b. Пусть $(f_a(q_a), r_a)$ находиться на i-ой позиции $ord_G(q)$, а $(f_b(q_b), r_b)$ на j-ой. Поскольку $f_b(q_b+1) \leqslant f_b(q_b)$, то $f_a(q_a) < f_b(q_b)$ и значит $i < j$. Обозначим пару, стоящую на $(i+1)$-й позиции через (f_c, r_c). Возможно $f_c = f_b$, тогда $r_c = r_b$ и $j = i + 1$.

Обозначим через r' число городов, зарплата в которых равна $f_b(q_b + 1)$, если таких городов нет, то $r' = 0$. Обозначим $q^+ = \varphi(q, \{a, b\})$.

Когда один мигрант переезжает в город b, зарплата там становится $f_b(q_b + 1)$, то есть в $ord(q^+)$ появляется пара $(f_b(q_b + 1), r' + 1)$. Поскольку $f_b(q_b + 1) > f_a(q_a)$, то позиция этой пары в $ord(q^+)$ будет не меньше чем i, причём эта пара окажется в i-той позиции только если $r_a = 1$ и $f_b(q_b + 1) \leq f_c$. Равенство $r_a = 1$ означает, что после отъезда одного мигранта из города a, городов с зарплатой $f_a(q_a)$ больше не будет, и следовательно, на i-ю позицию переместится пара со значением зарплаты $\min(f_a(q_b + 1), f_c)$, которое больше, чем $f_a(q_a)$.

Если же $r_a > 1$, то после отъезда одного мигранта из города a число городов с зарплатой $f_a(q_a)$ уменьшится как минимум на 1, а зарплата в городе a останется прежней, либо возрастёт, то есть на i-ой позиции вектора $ord(q^+)$ окажется пара со значением зарплаты $\min(f_a(q_a - 1), f_c)$, которое больше чем $f_a(q_a)$.

Следовательно, $ord(q)$ и $ord(q^+)$ совпадают до $(i - 1)$-й позиции включительно, а в i-й позиции в $ord(q^+)$ стоит большая пара, то есть $ord(q^+) > ord(q)$. $\square$

Докажем теорему 1. Предположим, что функция $q(t)$ непостоянна на бесконечном подмножестве значений аргумента t. Тогда по лемме 1 функция $ord_G(q(t))$ неограниченно возрастает, что невозможно, так как множество различных векторов $ord_G(q)$ конечно. Значит $q(t)$ может меняться конечное число раз. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2

Обозначим $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$, $K = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} f_i(0)$.

Рассмотрим множество $F = \{f_i(q_j) : i = 1,...,n,\ j = 1,...,m_i\} \bigcup \{K\}$. Поскольку все $f_i(q_j)$ различны, то $|F| = M + 1$ и для любого числа p из F существуют i, j такие, что $f_i(q_j) = p$.

Для каждого числа $p \in F$ построим состояние $s(p) = (s_1(p), \ldots, s_n(p))$. Сначала найдём k и q_k такие, что $f_k(q_k) = p$, и положим $s_k(p) = q_k$, далее для $i \neq k$ положим $s_i(p) = 0$, если $p \geqslant f_i(0)$, и если $p < f_i(0)$, то $s_i(p)$ такое, что $f_i(s_i(p)) = \min_{a\in\{1,\ldots,m_i\}, f_i(a)>p} f_i(a)$.

Понятно, что $s(K) = (0, 0, \ldots, 0)$, и если $p \neq K$, то $s(K) \neq (0, \ldots, 0)$ и p — минимальная зарплата среди городов с ненулевым населением, если граф G находится в состоянии $s(p)$.

Состояние q из $Q(G)$ назовём *финальным*, если для любого $v \in E$ $\varphi(q, v) = q$.

Лемма 2. *Для любого числа p из F состояние $s(p)$ является финальным.*

Доказательство. Если $s(p) = (0, \ldots, 0)$, т.е. $p = K$, то $s(p)$ — финальное, поскольку некому переезжать.

Предположим $s(p) \neq (0, \ldots, 0)$ и $s(p)$ — нефинальное. Тогда существует $\{a, b\}$ из E такое, что $f_a(s_a(p) + 1) > f_b(s_b(p))$, причем $s_b(p) > 0$. Пусть $f_k(s_k(p)) = p$. Так как p — минимальная заприлата среди городов с ненулевым населением, то $f_a(s_a(p) > f_a(s_a(p)+1) > f_b(s_b(p)) \geqslant p$, что противоречит определению $s_a(p)$ как $argmin_{c\in\{1,\ldots,m_a\}, f_a(c)>p} f_a(c)$. □

Лемма 3. *Если $q \in Q(G)$ — финальное состояние, то существует такое число p из F, что $s(p) = q$.*

Доказательство. Если $q = (0, \ldots, 0)$, то ему соответствует состояние $s(K)$. Пусть $q \neq (0, \ldots, 0)$. Рассмотрим $p = \min_{r\in\{1,\ldots,n\}, q_r\neq 0} f_r(q_r)$. Покажем, что q совпадает с $q(p)$.

Из финальности $q = (q_1, \ldots, q_n)$ следует, что для любого $j \in \{1, \ldots, n\}$ имеет место $f_j(q_j + 1) < p$, при этом, из определения p, для любого $j \in \{1, \ldots, n\}$ имеет место $f_j(q_j) > p$ или $q_j = 0$. Легко убедиться, что эти два условия эквивалентны тому, что если $q_j \neq 0$, то $q_j = argmin_{c\in\{1,\ldots,m_j\}, f_j(c)>p} f_j(c)$. Что и требовалось доказать. □

Лемма 4. *Если $p, p' \in F$, $p \neq p'$, то $s(p) \neq s(p')$.*

Доказательство. Пусть $s(p) = (s_1, \ldots, s_n)$, $s(p') = (s'_1, \ldots, s'_n)$. Для определенности считаем, что $p < p'$. Пусть $p = f_i(a)$, $a \in \{0, \ldots, m_i\}$, $p' = f_j(b)$, $b \in \{0, \ldots, m_j\}$. Тогда $s_i = a$, $s'_j = b$. Покажем, что $s_i \neq s'_i$.

Сначала заметим, что $a \neq 0$, поскольку $p < p' \leqslant K$ и $f_i(0) \notin F$.

Рассмотрим возможные случаи.

1) $f_i(s'_i) < f_j(s'_j)$, тогда $s'_i = 0 \neq a = s_i$.

2) $f_i(s_i) = f_i(a) > f_j(s_j)$, тогда $s_j = 0$. Но $f_j(0) \geqslant f_j(b)$, что противоречит тому, что $f_i(a) = p < p' = f_j(b)$.

3) $f_i(s_i) < f_j(s_j)$ и $f_i(s'_i) > f_j(s'_j)$. Следовательно, $f_i(s'_i) > f_j(s'_j) = f_j(b) = p' > p = f_i(a) = f_i(s_i)$. Отсюда следует, что $s'_i \neq s_i$.

Таким образом, мы показали, что вектора $s(p)$ и $s(p')$ различны. Лемма доказана. □

Из лемм 2, 3, 4 следует, что отображение $s(p)$ — биекция, а значит всего финальных состояний ровно $M + 1$.

Обозначим $|(q_1, q_2, \ldots, q_n)| := \sum\limits_{i=1}^{n} q_i$.

Разобьём все $q \in Q(G)$ на классы эквивалентности Q_i, $i \in \{0, \ldots M\}$, так, что $q \sim q' \in Q_i$ тогда и только тогда, когда $|q| = |q'| = i$.

Из определения (1) функции переходов φ следует, что для любого $v \in E$ имеет место $|q| = |\varphi(q, v)|$. Иными словами, если автоматы A^{G_1} и A^{G_2} отличаются только начальными состояниями $q^1(0)$ и $q^2(0)$, причём $q^1(0) \sim q^2(0)$, то для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in E^\infty$ будет выполняться $|A^{G_1}(\alpha_1)| = |A^{G_2}(\alpha_2)|$. В случае, если мы ограничимся только $\alpha \in E_1^\infty$, то из $q = A^G(\alpha)$ будет следовать финальность q в описанном выше смысле.

Согласно теореме 1 в каждом из непересекающихся классов эквивалентности Q_i есть финальное состояние. Всего классов $M + 1$, как и финальных состояний, следовательно, в каждом классе лежит ровно одно финальное состояние, что и требовалось доказать.

Список литературы

[1] Kauffman, S.; Weinberger, E. (1989). "The NK Model of rugged fitness landscapes and its application to the maturation of the

immune response". Journal of Theoretical Biology 141 (2): 211–245

[2] Kauffman, Stuart (11 October 1969). "Homeostasis and Differentiation in Random Genetic Control Networks". Nature 224 (5215): 177–178

[3] Плетнев А.А. Информационно-графовая модель динамических баз данных и ее применение // Интеллектуальные системы. — 2014. — Т. 18, вып. 1. — С. 111–140.

[4] Калачев Г.В. Нижние оценки мощности плоских схем, реализующих частичные булевы операторые // Интеллектуальные системы. — 2014. — Т. 18, вып. 2. — С. 279–322.

[5] Гасанов Э.Э., Ефремов Д.В. Фоновый алгоритм решения двумерной задачи о доминировании // Интеллектуальные системы. — 2014. — Т. 18, вып. 3. — С. 133–158.

[6] Сытдыков Т.Р. Линейный алгоритм построения деревьев разводки сигнала // Интеллектуальные системы. — 2014. — Т. 18, вып. 3. — С. 175–202.

[7] Шуткин Ю.С. Моделирование схемных управляющих систем // Интеллектуальные системы. — 2014. — Т. 18, вып. 3. — С. 253–261.

[8] Лебедев А.А. О задачах оптимального распределения ресурсов и проверки устойчивости для схем функциональных элементов в k-значной логике // Интеллектуальные системы. — 2014. — Т. 18, вып. 4. — С. 107–130.

[9] Аскарова А.Ш. О времени очищения лёгких от никотина в чистой среде // Интеллектуальные системы. — 2014. — Т. 18, вып. 4. — С. 191–206.

[10] Ищенко Р.А. Хроматическое число бипланарных графов без треугольников // Интеллектуальные системы. — 2014. — Т. 18, вып. 4. — С. 223–226.

[11] Перпер Е.М. Порядок сложности задачи поиска в множестве слов вхождений подслова // Интеллектуальные системы. — 2014. — Т. 19, вып. 1. — С. 99–116.

[12] Плетнев А.А. Динамическая база данных, допускающая параллельную обработку произвольных потоков запросов // Интеллектуальные системы. — 2014. — Т. 19, вып. 1. — С. 117–142.

[13] Плетнев А.А. Логарифмическая по сложности параллельная обработка автоматами произвольных потоков запросов к динамической базе данных // Интеллектуальные системы. — 2014. — Т. 19, вып. 1. — С. 171–212.

[14] Алешин С.В. Полугруппы и группы автоматов // Интеллектуальные системы. — 2013. — Т. 17, вып. 1–4. — С. 129–141.

[15] Александров Д.Е. Эффективные методы реализации проверки содержания сетевых пакетов регулярными выражениями // Интеллектуальные системы. — 2014. — Т. 18, вып. 1. — С. 37–60.

[16] Титова Е.Е. Конструирование движущихся изображений клеточными автоматами // Интеллектуальные системы. — 2014. — Т. 18, вып. 1. — С. 153–180.

[17] Бабин Д.Н. Частотные регулярные языки // Интеллектуальные системы. — 2014. — Т. 18, вып. 1. — С. 205–210.

[18] Иванов И.Е. О некоторых свойствах автоматов с магазинной памятью // Интеллектуальные системы. — 2014. — Т. 18, вып. 1. — С. 243–252.

[19] Часовских А.А. Условия полноты линейно-p-автоматных функций // Интеллектуальные системы. — 2014. — Т. 18, вып. 3. — С. 203–252.

[20] Александров Д.Е. Об оценках автоматной сложности распознавания классов регулярных языков // Интеллектуальные системы. — 2014. — Т. 18, вып. 4. — С. 161–190.

[21] Дементьев В.М. О звездной высоте регулярного языка и циклической сложности минимального автомата // Интеллектуальные системы. — 2014. — Т. 18, вып. 4. — С. 215–222.

[22] Кучеренко И.В. О минимизации монофункциональных классов бинарных клеточных автоматов с неразрешимым свойством обратимости. — 2014. — Т. 18, вып. 4. — С. 227–295.

[23] Якимец К.К. Об инвариантности характеристик конфигураций однородных структур. — 2014. — Т. 18, вып. 4. — С. 347–356.

[24] Гасанов Э.Э. Прогнозирование периодических сверхсобытий автоматами // Интеллектуальные системы. — 2015. — Т. 19, вып. 1. — С. 23–34.

[25] Иванов И.Е. О сохранении периодических последовательностей автоматами с магазинной памятью с однобуквенным магазином // Интеллектуальные системы. — 2015. — Т. 19, вып. 1. — С. 145–160.

[26] Летуновский А.А. Выразимость линейных автоматов относительно расширенной суперпозиции // Интеллектуальные системы. — 2015. — Т. 19, вып. 1. — С. 161–170.

[27] Гербус В.Г. О связи функций автомата и автоматной функции // Интеллектуальные системы. — 2015. — Т. 19, вып. 2. — С. 109–116.

[28] Миронов А.М. Критерий реализуемости функций на строках вероятностными автоматами Мура с числовым выходом // Интеллектуальные системы. — 2015. — Т. 19, вып. 2. — С. 149–160.

[29] Терехина И.Ю. Модель невлияния для квантовых автоматов // Интеллектуальные системы. — 2015. — Т. 19, вып. 2. — С. 183–190.

[30] В.Б.Кудрявцев. Кафедра математической теории интеллектуальных систем (МаТИС) // Интеллектуальные системы. — 2014. — Т. 18, вып. 2. — С. 5–30.

[31] В.Б.Кудрявцев, С.В. Алешин, А.С. Подколзин. Введение в теорию автоматов. Издательство «Наука», Москва, 1985.

About stabilization of a dynamical system, related to automata modelling of migration processes

D. I. Vasiliev

This paper considers the model of dynamical system, consisting of graph, each vertex of which is assigned with “comfort” and “the number of elements in current vertex”. Each element is forced to reach the most comfortable vertex, but presence of elements in vertex is uncomfortable factor. We shown, that this system always has a limit state and described class of system, which limit state depends only on number of elements in graph, but not on their distribution.

Keywords: dynamical systems, stabilization, automata modelling of migration