О возможностях суперпозиции, при наличии в базисе автоматов фиксированной добавки из булевых функций и задержки

Д. Н. Бабин, А. А. Летуновский

Авторы вводят расширенную суперпозицию автоматов. Расширенная суперпозиция – это суперпозиции автоматов с фиксированной добавкой булевых функций и задержки. Авторы доказали, алгоритмическая разрешимость выразимости задачи выразимости для групповых автоматных функций Медведева, а также линейных автоматных функций для группы Медведева автоматов, константных автоматов, линейных автоматов.

Ключевые слова: Автомат, суперпозиция, алгоритм.

Введение

Известно, что в общем случае работа со схемами автоматов наталкивается на существенные трудности [1]. Так в работе [2] установлена континуальность множества предполных классов для систем автоматных функций, а в работе Кратко [3] установлена алгоритмическая неразрешимость задачи полноты относительно суперпозиции с обратной связью для конечных систем автоматных функций. В [1] показана неполнота любой конечной системы автоматов относительно суперпозиции.

Тем не менее, если ограничить арность (число входов) в системе автоматов, то это никак не сказывается на способности получать суперпозициями произвольные автоматы из заранее заданных. Оказалось, что системы, состоящие из автоматов с двумя входами образуют полную систему [4].

Ранее в задачах полноты относительно суперпозиции и обратной связи хорошо зарекомендовал себя метод использования систем функций, содержащих фиксированную добавку [5,6]. Такой же метод применяется в этой работе для выразимости автоматов относительно одной только суперпозиции.

Авторы вводят понятие *расширенной* суперпозиции, как суперпозиции с обязательным наличием в системе "задержки"и штриха Шеффера, что тоже самое, что наличие "задержки"и всех булевых функций. Для расширенной суперпозиции авторам удалось доказать алгоритмическую разрешимость задачи выразимости для широкого класса автоматных функций: константных автоматных функций [7], групповых автоматных функций Медведева [8], а также линейных автоматных функций, что в общем случае было алгоритмически неразрешимо. Выразимость линейных автоматов была расмотрена в работе [15], задача выразимости константных автоматов с магазинной памятью в работе [14], частотные свойства автоматных функций в работах [12,13].

Основные понятия и результаты

Пусть $E_2 = \{0, 1\}$, функции вида $g : E_2^n \to E_2$ называются булевыми функциями, их множество обозначается через P_2.

Пусть E_2^∞- множество всех сверхслов вида $a(1)a(2)...$, где $a(j) \in E_2$, $j = 1, 2, ...$. Через $\mathbf{N}$ обозначим множество натуральных чисел. Пусть

$$f : (E_2^\infty)^n \to (E_2^\infty)^m$$

- автоматная функция(a-функция), т.е. она задается рекуррентно соотношениями (1)

$$\begin{cases} q_1(1) = q0_1, \\ ... \\ q_s(1) = q0_s \\ q_1(t+1) = \phi_1(q_1(t), ..., q_s(t), a_1, ..., a_n), \\ ... \\ q_s(t+1) = \phi_s(q_1(t), ..., q_s(t), a_1, ..., a_n) \\ b_1(t) = \psi_1(q_1(t), ..., q_s(t), a_1, ..., a_n) \\ ... \\ b_m(t) = \psi_m(q_1(t), ..., q_s(t), a_1, ..., a_n) \end{cases} \tag{1}$$

Вектор $q = (q_1, ..., q_s)$ задает состояние a-функции f, $q0$ её начальное состояние, буквы $a = (a_1, a_2..., a_n)$ и $b = (b_1, ..., b_m)$ называют входной и выходной буквами, а сверхслова $a(1)a(2)...$ и $b(1)b(2)...$ - входными и выходными сверхсловами, соответственно. Вектор-функции ϕ и ψ называются функциями переходов и выходной функцией, соответственно, а шестерка

$$(E_2^n, E_2^s, E_2^m, \phi, \psi, q0)$$

- автоматом, порождающим функцию f. Далее в тексте мы иногда будем использовать для автомата обозначение $(A, Q, B, \phi, \psi, q0)$, при этом предполагая что $A \subseteq E_2^n, Q \subseteq E_2^s, B \subseteq E_2^m$.

В этом классе обычным образом введем операции суперпозиции. Для суперпозиции будем использовать модификации операций из [9].

$$\begin{cases} (\eta f)(x_1, x_2, .., x_n) = f(x_2, x_3, ..., x_n, x_1), \\ (\varepsilon f)(x_1, x_2, .., x_n) = f(x_2, x_1, x_3, ..., x_n) \\ (\varpi f)(x_1, x_2, .., x_n) = f(x_1, x_3, .., x_n) \\ (\delta f)(x_1, x_2, .., x_n) = f(x_1, x_2, .., x_{n+1}) \\ (f * g)(x_1, x_2, .., x_{m+n-1}) = f(g(x_1, ..., x_m), x_{m+1}, ..., x_{m+n-1}) \end{cases}$$

Пусть $M \subseteq P$, обозначим через $[M]$ - множество a-функций, получающихся из M с помощью операций суперпозиции.

Автоматную функцию G_0, задаваемую уравнениями

$$\begin{cases} q(1) = 0, \\ q(t+1) = a(t), \\ b(t) = q(t), \end{cases}$$

назовём автоматной функцией задержки.

Автоматную функцию F_2, задаваемую уравнениями

$$\begin{cases} q(1) = 0, \\ q(t+1) = \bar{q(t)}a_1(t) \vee q(t)a_2(t), \\ b(t) = q(t), \end{cases}$$

назовём универсальной автоматной функцией с 2-мя состояниями.

Обозначим $< M >= [M \cup \{G_0, P_2\}]$ и назовем замыканием M относительно *расширенной суперпозиции*. Заметим, что P_2 можно заменить на одну булевую функцию "штрих Шеффера". Поэтому расширенная суперпозиция - это суперпозиция с конечной добавкой.

Обозначим $< M >_{F_2}= [M \cup \{F_2, P_2\}]$.

Константной автоматной функцией назовем автоматную функцию, выдающую одно и тоже периодическое выходное сверхслово на всех входных сверхсловах.

Автомат $A = (E_2^k, Q, E_2^l, \phi, \psi, q0), Q \subset E_2^n$, называется *групповым,* если для любого $a \in E_2^k$ отображение $q' = \phi(q, a) : Q \to Q$ - биекция. Класс всех групповых автоматов обозначим через G.

Автомат $A = (E_2^k, Q, E_2^l, \phi, \psi, q0), Q \subset E_2^n$, называется *линейным,* если

$$\begin{cases} \phi(x, q) = Aq + Bx, \\ \psi(x, q) = Cq + Dx, \\ q_0 = (0, 0, ..., 0), \end{cases}$$

где $A : E_2^n \to E_2^n, B : E_2^k \to E_2^n, C : E_2^n \to E_2^l, D : E_2^k \to E_2^l$ - есть линейные операторы. Класс всех линейных автоматов обозначим через L

Автомат называется *автоматом Медведева,* если $B = Q$ и $\psi(q, a) = q$.

Результат Кратко М.И.[3] об алгоритмической неразрешимости полноты для автоматов имеет в своей основе факт алгоритмической неразрешимости относительно суперпозиции задачи выразимости константных автоматов, который можно в наших обозначениях представить так.

Теорема [3] *Не существует алгоритма, проверяющего выразимость константой автоматной функции суперпозициями конечных системы автоматных функций.*

О возможностях суперпозиции, при наличии в базисе автоматов фиксированной добавки из булевых функций и задержки

Теорема 1[7] *Пусть $M \in P$, $|M| < \infty$, $K_1 \in K$, $|K_1| < \infty$. Тогда задача $K_1 \in < M >$ алгоритмически разрешима.*

Теорема 2[8] *Пусть $M \in P$, $|M| < \infty$, G_1 - групповой автомат Медведева. Тогда задача $G_1 \in < M >$ алгоритмически разрешима.*

Теорема 3 *Пусть $M \in P$, $|M| < \infty$, $L_1 \in L$. Тогда задача $L_1 \in < M >$ алгоритмически разрешима.*

Теорема 4[11] *Пусть $M \in P$, $|M| < \infty$, G_1 - групповой автомат. Тогда задача $G_1 \in < M >_{F_2}$ алгоритмически разрешима.*

Пусть $M \in P$, $|M| < \infty$, P^N - множество автоматов с не более чем N состояниями.

Теорема 5[11]. Задача $< M >_{F_2} \supseteq P^N$ - алгоритмически разрешима.

Основные леммы и вспомогательные определения

Будем обозначать Z_n автомат, задаваемый рекуррентными соотношениями

$$\begin{cases} q(1) = 0, \\ q(t+1) = (q(t) + a(t)), \\ b(t) = q(t), \end{cases}$$

Через β_{K_1} обозначим сверхслово, получающееся на выходе константного автомата K_1.

Пусть сверхслово β можно представить в виде $\beta = \gamma\alpha^{\infty}$. Выберем из всех таких представлений такое, что γ и α имеют наименьшую длину. Для выбранного представления назовем γ - наименьшим предпериодом сверхслова β, а α наименьшим периодом сверхслова β, а всякое слово вида $\underbrace{\alpha\alpha...\alpha}_{n}$ будем называть периодом сверхслова β, здесь $n \in N$. Обозначим $|\alpha|$ длину слова α.

Для множества константных автоматных функций $K' \subseteq K$ обозначим через $\Theta(K')$- множество длин минимальных периодов сверхслов $\{\beta_{K_i} : K_i \in K'\}$. Для случая одного слова $\beta = \gamma\alpha^{\infty}$ будем считать, что $\Theta(\beta) = |\alpha|$.

Лемма 1[7] *Пусть $M \in P$, $|M| < \infty$, $\alpha \in K$. Тогда $\alpha \in < M >$ тогда и только тогда когда $\Theta(\alpha) \in \Theta(< M > \cap K)$.*

Лемма 2[7] *Пусть $M \in P$, $|M| < \infty$, тогда существуют натуральные b, q такие что*

$$\Theta(< M > \cap K]) = \{t : t|bq^i, i = 0, 1, ..\}.$$

Минимальные b и q удовлетворяющие условию Леммы 2 называются частным и главным цикловыми индексами множества автоматов M.

Для цикловых индексов существуют грубые верхние оценки $b, q < n^{n^{\frac{n}{ln(n)}}}$

Лемма 3[10] *Пусть $M \in P$, $|M| < \infty$. Тогда $Z_n \in < M >$ тогда и только тогда когда $\Theta(< M > \cap K) \ni p^i$ для любого $i \in N$*

Лемма 4 *Пусть $M \in P$, $|M| < \infty$, $L_1 \in L$, тогда $L_1 \in < M >$ тогда и только тогда когда $\Theta(< L_1 > \cap K) \in \Theta(< M > \cap K)$.*

Лемма 5 *Пусть $L_1 \in L$, (b, q) - его цикловые индексы. Тогда $q \in \{1, 2\}$*

Обозначим K^q - все константные автоматы с длиной периода равной q.

Лемма 6 *Пусть $L_1 \in L$, $(b, 2)$ - его цикловые индексы. Тогда 1. $L_1 \in < K^b, Z_2 >$*
2. $K_b \in < L_1 >$
3. $Z_2 \in < L_1 >$

Из леммы 4 следует теорема 3. Сама лемма 4 следует из леммы 6, леммы 3 и теоремы 1. Остальные теоремы доказаны в приведенных статьях.

Список литературы

[1] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов, Наука, М., 1985.

[2] Кудрявцев В. Б. О мощности множеств предполных классов некоторых функциональных систем, связанных с автоматами - В кн.: Проблемы кибернетики.-М.:Наука, 1965, вып.13, с 45-74.

[3] Кратко М. И. Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов, ДАН СССР, 1964, т.155, N 1, с.35–37.

[4] Бабин Д. Н. О полноте двухместных автоматных функций относительно суперпозиции, Дискретная матетматика, том 1, выпуск 4, 1989, стр. 423-431

[5] Буевич В. А. Об алгоритмической неразрешимости распознавания А-полноты для о.д.-функций, Математические заметки, том 12, номер 6, 1972, с.687-697.

[6] Бабин Д. Н. Разрешимый случай задачи о полноте автоматных функций, Дискретная математика, том 4, 1992, выпуск 4, с.41-56, Наука, Москва.

[7] Летуновский А. А. О выразимости константных автоматов суперпозициями, Интеллектуальные системы, Том 13, выпуск 1-4, 2009 г.,397-406.

[8] Летуновский А. А. О выразимости суперпозициями групповых автоматов Медведева, Интеллектуальные системы, том 15, выпуск 1-4, 2011 г. стр. 402-412

[9] Мальцев А. И. Итеративные алгебры и многообразие Поста, Алгебра и логика, 1966, т.5, N2, с.5–24.

[10] Летуновский А. А. О выразимости суперпозициями автоматов с разрешимыми группами, Интеллектуальные системы, Том 14, выпуск 1-4, 2010 г.,стр 379-392

[11] Летуновский А. А. О задаче выразимости автоматов относительно суперпозиции для систем с фиксированной добавкой, Интеллектуальные системы в производстве, 2012, № 1, С. 36–50

[12] А. А. Петюшко О контекстно-свободных биграммных языках, Интеллектуальные системы, Том 19, выпуск 2,2015 г.,стр.187-208

[13] Д. Н. Бабин Частотные регулярные языки, Интеллектуальные системы, Том 18, выпуск 1,2014 г.,стр. 205-210

[14] И. Е. Иванов О сохранении периодических последовательностей автоматами с магазинной памятью с однобуквенным магазином, Интеллектуальные системы, Том 19, выпуск 1,2015 г.,стр. 145-160

[15] А. А. Летуновский Выразимость линейных автоматов относительно расширенной суперпозиции, Интеллектуальные системы, Том 19, выпуск 1,2015 г.,стр. 161-170.

About superposition capabilities for automata basis containing fixed additive of Boolean functions and delay automaton

D. N. Babin, A. A. Letunovskiy

Abstract: Authors introduce extended automata superposition. Extended superposition – automata superposition with fixed additive of Boolean functions and delay automaton. Authors proved algorithmic solvability of expressibility for group Medvedev automata, constant automata, linear automata

Keywords: Automaton, superposition, algorithm.