Оценка числа шагов алгоритма Новикова

С. А. Комков

В работе представлен алгоритм построения множества по заданным параметрам, для которого фактическое число шагов достигает половину верхней оценки числа шагов для данного множества в теореме Новикова. Дополнительно доказывается, что для множества, состоящего из двух точек, фактическое число шагов не более чем $\frac{D^2}{2\cdot r^2}+2$.

Ключевые слова: нейронные сети, теорема Новикова.

Рассмотрим конечное упорядоченное множество точек на плоскости $X = \big\{(x_0;y_0);\ldots;(x_{k-1};y_{k-1})\big\}$. Пусть найдется прямая, проходящая через точку $(0;0)$, такая, что все точки из множества X лежат строго по одну сторону от этой прямой. Алгоритм Новикова позволяет найти подобную прямую не более чем за $\frac{D^2}{r^2}$ шагов, где $D = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant k-1}\sqrt{x_i^2+y_i^2}$ (максимальное расстояние от точки из множества X до начала координат), а $r = \min\limits_{0\leqslant i<j\leqslant k-1;\ 0\leqslant t\leqslant 1}\sqrt{(t\,x_i+(1-t)\,x_j)^2+(t\,y_i+(1-t)\,y_j)^2}$ (минимальное расстояние от начала координат до выпуклой оболочки множества X).

Алгоритм Новикова.[1]

Инициализация:

$$\begin{cases}\overline{a_0}=(0;0),\\ t_0=0.\end{cases}$$

Пусть на m-ом шаге имеем $\overline{a_m} = (a_{m,1};a_{m,2})$. Поочередно считаем скалярное произведение вектора $\overline{a_m}$ на векторы $(x_{t_m};\ y_{t_m})$, $\big(x_{t_m+1\ (mod\ k)};\ y_{t_m+1\ (mod\ k)}\big),\ldots,\big(x_{t_m+k-1\ (mod\ k)};\ y_{t_m+k-1\ (mod\ k)}\big)$ до

[1]Здесь представлен упрощенный вид данного алгоритма.

тех пор, пока не получим неположительное число. При первом неположительном результате, полученном при скалярном умножении на вектор $(x_l; y_l)$, переходим к следующему шагу посредством:

$$\begin{cases} \overline{a_{m+1}} = \overline{a_m} + (x_l; y_l), \\ t_{m+1} = l + 1 \ (mod\ k). \end{cases}$$

В случае если все скалярные произведения положительные числа, то прямая, перпендикулярная вектору $\overline{a_m}$, проходящая через точку $(0; 0)$ — искомая.

Лемма 1. *При отображении $f : X \to Y$ вида $(x; y) \mapsto C\,(x; y)^\tau$ с сохранением порядка элементов множества X, где C — матрица вида:*

1) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$,

2) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $\lambda > 0$,

3) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

не меняется оценка количества шагов для алгоритма Новикова и не меняется фактическое число шагов.

Доказательство.

1) Повороты относительно начала координат не меняют расстояния до точки $(0; 0)$. Следовательно, D и r не меняются. При вращении вокруг начала координат угол между векторами, выходящими из $(0; 0)$, также не изменяется. Итак, сохраняются расстояния и скалярные произведения, используемые алгоритмом. Отсюда сохраняется ход алгоритма Новикова, то есть число фактических шагов.

2) Будем обозначать штрихом скаляры и вектора, соответствующие ходу алгоритма для множества Y. Имеют место равенства:

$$D' = \max_{0 \leqslant i \leqslant k-1} \sqrt{(\lambda\, x_i)^2 + (\lambda\, y_i)^2} = \lambda \max_{0 \leqslant i \leqslant k-1} \sqrt{x_i^2 + y_i^2} = \lambda\, D;$$

$$r' = \min_{\substack{0\leqslant i<j\leqslant k-1;\\ 0\leqslant t\leqslant 1}} \sqrt{(\lambda\, t\, x_i + \lambda\,(1-t)\, x_j)^2 + (\lambda\, t\, y_i + \lambda\,(1-t)\, y_j)^2} =$$

$$= \lambda \min_{\substack{0\leqslant i<j\leqslant k-1;\\ 0\leqslant t\leqslant 1}} \sqrt{(t\, x_i + (1-t)\, x_j)^2 + (t\, y_i + (1-t)\, y_j)^2} = \lambda\, r.$$

Следовательно,

$$\frac{D'^2}{r'^2} = \frac{\lambda^2\, D^2}{\lambda^2\, r^2} = \frac{D^2}{r^2};$$

$$\begin{cases} \overline{a_1'} = \lambda\,\overline{a_1} = (\lambda\, x_0; \lambda\, y_0),\\ t_1' = t_1 = 1. \end{cases}$$

Результат первого шага определен однозначно, так как скалярное произведение с нулевым вектором всегда равно нулю. Пусть

$$\begin{cases} \overline{a_m'} = \lambda\,\overline{a_m},\\ t_m' = t_m. \end{cases}$$

Тогда для скалярных произведений:

$$\langle \overline{a_m'}; (x_l'; y_l')\rangle = \langle \lambda\,\overline{a_m}; \lambda\,(x_l; y_l)\rangle = \lambda^2\,\langle \overline{a_m}; (x_l; y_l)\rangle.$$

Итак, знак скалярного произведения будет такой же, как у соответствующего скалярного произведения в алгоритме для случая без использования преобразования f, значит ход алгоритма не меняется. Следовательно, сохраняется оценка количества шагов и фактическое число шагов.

3) Имеют место равенства:

$$D' = \max_{0\leqslant i\leqslant k-1} \sqrt{(-x_i)^2 + (y_i)^2} = \max_{0\leqslant i\leqslant k-1} \sqrt{x_i^2 + y_i^2} = D;$$

$$r' = \min_{\substack{0\leqslant i<j\leqslant k-1;\\ 0\leqslant t\leqslant 1}} \sqrt{(t\,(-x_i) + (1-t)\,(-x_j))^2 + (t\, y_i + (1-t)\, y_j)^2} =$$

$$= \min_{\substack{0\leqslant i<j\leqslant k-1;\\ 0\leqslant t\leqslant 1}} \sqrt{(t\, x_i + (1-t)\, x_j)^2 + (t\, y_i + (1-t)\, y_j)^2} = r.$$

Следовательно,

$$\frac{D'^2}{r'^2} = \frac{D^2}{r^2};$$

$$\begin{cases} \overline{a'_1} = (-x_0; y_0), \\ t'_1 = t_1 = 1. \end{cases}$$

Результат первого шага определен однозначно, так как скалярное произведение с нулевым вектором всегда равно нулю. Пусть

$$\begin{cases} \overline{a'_m} = (-a^1_m; a^2_m), \\ t'_m = t_m. \end{cases}$$

Тогда для скалярных произведений:

$$\langle \overline{a'_m}; (x'_l; y'_l) \rangle = \langle (-a^1_m; a^2_m); (-x_l; y_l) \rangle = \langle \overline{a_m}; (x_l; y_l) \rangle.$$

Итак, знак скалярного произведения будет такой же, как у соответствующего скалярного произведения в алгоритме для случая без использования преобразования f, значит ход алгоритма не меняется. Следовательно, сохраняется оценка количества шагов и фактическое число шагов.

Лемма доказана.

Теорема 1. *При любых заданных D, r и b таких, что $\frac{D}{r} \geqslant \sqrt{10}$ и $b \geqslant 2$, можно построить такое множество точек на плоскости $X = \big\{(x_1; y_1); \dots; (x_b; y_b)\big\}$, что фактическое число шагов в ходе алгоритма Новикова будет не менее чем $\frac{D^2}{2\,r^2} - 2$.*

Доказательство. Построим множество $X' = \big\{(n; 0); (-n; \frac{1}{n})\big\}$, где $n > 0$ такое, что

$$\frac{D'}{r'} = \frac{D}{r}. \tag{1}$$

Для данного множества $D' = \sqrt{n^2 + \frac{1}{n^2}}$, а $r' = \frac{1}{\sqrt{4\,n^2 + \frac{1}{n^2}}}$. Тогда n находится из условия (1), которое эквивалентно равенству:

$$4\,n^4 + 5 + \frac{1}{n^4} = \frac{D^2}{r^2}.$$

Слева от знака равенства при $n \geqslant 1$ монотонно возрастающая, непрерывная, неограниченная функция, равная 10 при $n = 1$. Следовательно, для существования решения достаточно, чтобы выполнялось: $\frac{D}{r} \geqslant \sqrt{10}$. Далее будем считать, что $n \geqslant 1$.

Рассмотрим вектор $\overline{a'_k} = (a'_{k,1}; a'_{k,2})$. Очевидно, $a'_{k,2} \geqslant 0$ для любого k (так как $y'_i \geqslant 0$ для любого i). Далее в случае, когда $a'_{k,1} > 0$:

$$\langle (a'_{k,1}; a'_{k,2}); (n; 0) \rangle = n\, a'_{k,1} > 0.$$

Следовательно, в этом случае в ходе алгоритма Новикова может быть добавлен только вектор $(-n; \frac{1}{n})$. В случае, когда $a'_{k,1} < 0$:

$$\langle (a'_{k,1}; a'_{k,2}); (n; 0) \rangle = n\, a'_{k,1} < 0;$$

$$\langle (a'_{k,1}; a'_{k,2}); (-n; \frac{1}{n}) \rangle = -n\, a'_{k,1} + \frac{a'_{k,2}}{n} > 0.$$

Итак, в этом случае $\overline{a'_{k+1}} = \overline{a'_k} + (n; 0)$. После первых двух шагов вектор определен однозначно: $\overline{a'_2} = (0; \frac{1}{n})$. Следовательно, $a'_{k,2} > 0$ для любого $k \geqslant 2$. Далее при $a'_{k,1} = 0$:

$$\langle (a'_{k,1}; a'_{k,2}); (n; 0) \rangle = 0;$$

$$\langle (a'_{k,1}; a'_{k,2}); (-n; \frac{1}{n}) \rangle = \frac{a'_{k,2}}{n} > 0.$$

Значит, алгоритм закончит работу только при $a'_{m,1} > 0$. Так как в случае, когда $a'_{k,1} > 0$, может быть добавлен только вектор $(-n; \frac{1}{n})$, то $a'_{m,1} = n$. Итак, окончательный вектор будет иметь вид $(n; \frac{t}{n})$, где t — количество шагов, на которых был добавлен вектор $(-n; \frac{1}{n})$. Отсюда вектор $(n; 0)$ был добавлен $t+1$ раз. Итого всего шагов $2\,t+1$. При этом должна быть верна система:

$$\begin{cases} \langle (n; \frac{t}{n}); (-n; \frac{1}{n}) \rangle > 0, \\ \langle (n; \frac{t}{n}); (n; 0) \rangle > 0. \end{cases} \tag{2}$$

Второе неравенство системы (2) очевидно выполняется. Рассмотрим первое неравенство:

$$\langle (n; \frac{t}{n}); (-n; \frac{1}{n}) \rangle = -n^2 + \frac{t}{n^2} > 0;$$

$$t > n^4.$$

Наименьшее t, при котором выполняется данное неравенство, это $t = [n^4]+1$. Итого всего шагов $2\,t+1 = 2\,[n^4]+3$.

$$\begin{gathered}
n \geqslant 1; \\
1 \geqslant \frac{1}{n^4}; \\
5 \geqslant 4\,\{n^4\} + \frac{1}{n^4}; \\
4\,[n^4] + 6 \geqslant 4\,n^4 + \frac{1}{n^4} + 1; \\
2\,[n^4] + 3 \geqslant \frac{4\,n^4 + 5 + \frac{1}{n^4}}{2} - 2; \\
2\,[n^4] + 3 \geqslant \frac{D^2}{2\,r^2} - 2.
\end{gathered}$$

Итак, фактическое число шагов не менее чем $\frac{D^2}{2\,r^2} - 2$.

В случае если $b > 2$ возьмем множество

$$X'' = \Big\{(n;0);(-n;\frac{1}{n});(v_{1,1};v_{1,2});\ldots;(v_{(b-2),1};v_{(b-2),2})\Big\},$$

где $v_{j,i} > 0,\ v_{j,2} > n^2\,v_{j,1}$ и $n < \sqrt{{v_{j,1}}^2 + {v_{j,2}}^2} < \sqrt{n^2 + \frac{1}{n^2}}$ для любых $i,\ j$. Таким образом $D'' = D'$ и $r'' = r'$. Так как

$$\begin{gathered}
\langle (v_{j,1};v_{j,2});(n;0)\rangle = n\,v_{j,1} > 0, \\
\langle (v_{j,1};v_{j,2});(-n;\frac{1}{n})\rangle = -n\,v_{j,1} + \frac{v_{j,2}}{n} > -n\,v_{j,1} + \frac{n^2\,v_{j,1}}{n} = 0,
\end{gathered}$$

добавленные точки не будут влиять на ход алгоритма Новикова. То есть фактическое число шагов и оценка числа шагов будут такими же, как и для множества X'. Далее, умножив координаты точек на матрицу $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$, где $\lambda = \frac{D}{D'}$, получим искомое множество, так как по лемме фактическое количество шагов и оценка количества шагов не изменятся при данном преобразовании. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Для любого множества X на плоскости, состоящего из двух точек, строго отделимых от нуля, фактическое число шагов не больше чем $\frac{D^2}{2\,r^2} + 2$.*

Доказательство. По лемме любое множество $X = \{(x_1; y_1); (x_2; y_2)\}$, строго отделимое от нуля, можно свести к множеству одного из трех типов:

1) $X' = \{(m; 0); (-k; t)\}$, либо $X' = \{(-k; t); (m; 0)\}$, где $m, k, t > 0$ и $m \geqslant \sqrt{k^2 + t^2}$;
2) $X' = \{(m; 0); (k; t)\}$, где $m, t > 0$ и $k \geqslant 0$;
3) $X' = \{(m; 0); (k; 0)\}$, где $m, k > 0$.

Разберем эти случаи раздельно:

1. В этом случае:

$$D' = m;$$
$$r' = \frac{m\,t}{\sqrt{t^2 + (k+m)^2}}.$$

Рассмотрим вектор $\overline{a'_s} = (a'_{s,1}; a'_{s,2})$. Очевидно, $a'_{s,2} \geqslant 0$ для любого s (так как $y'_i \geqslant 0$ для любого i). Далее в случае, когда $a'_{s,1} > 0$:

$$\langle (a'_{s,1}; a'_{s,2}); (m; 0) \rangle = m\, a'_{s,1} > 0.$$

Следовательно, в этом случае в ходе алгоритма Новикова может быть добавлен только вектор $(-k; t)$. В случае, когда $a'_{s,1} < 0$:

$$\langle (a'_{s,1}; a'_{s^2}); (m; 0) \rangle = m\, a'_{s,1} < 0;$$
$$\langle (a'_{s,1}; a'_{s,2}); (-k; t) \rangle = -k\, a'_{s,1} + t\, a'_{k,2} > 0.$$

Итак, в этом случае $\overline{a'_{s+1}} = \overline{a'_s} + (m; 0)$. Так как $m \geqslant \sqrt{k^2 + t^2} > k$, то $a'_{(s+1),1} > 0$.

После первых двух шагов вектор одинаков для X' и X'':

$$\overline{a'_2} = (m - k; t).$$

Следовательно, так как $m - k > 0$, то далее ход алгоритма определен однозначно для X' и X''. Так же $a'_{s,2} > 0$ для любого $s \geqslant 2$. Далее при $a'_{s,1} = 0$:

$$\langle (a'_{s,1}; a'_{s,2}); (m; 0) \rangle = 0;$$
$$\langle (a'_{s,1}; a'_{s,2}); (-k; t) \rangle = t\, a'_{s,2} > 0.$$

Значит, алгоритм закончит работу только при $a'_{s,1} > 0$. По предыдущим замечаниям получается, что вектор, прибавляемый к $\overline{a'_s}$ на $s+1$ шаге, где $s \geqslant 2$, определяется знаком числа ${a_s^1}'$.

Рассмотрим новый алгоритм, который добавляет вектор $(m;0)$, если $a'_{s,1} \leqslant 0$, добавляет $(-k;t)$, если $a'_{s,1} > 0$. Будем считать, что фактическое число шагов работы алгоритма Новикова для рассматриваемого множества более двух. В противном же случае число шагов заведомо укладывается в желаемую оценку. Итак, начиная с третьего шага и заканчивая последним шагом алгоритма Новикова, новый алгоритм целиком совпадает с изначальным. То есть если на каком-то шаге нового алгоритма построенный вектор дает положительное скалярное произведение с векторами $(m;0)$ и $(-k;t)$, то номер этого шага не меньше, чем фактическое число шагов алгоритма Новикова.

Пусть j — номер шага нового алгоритма, u — количество шагов, на которых был добавлен вектор $(m;0)$, а v — количество шагов, на которых был добавлен вектор $(-k;t)$. Тогда должна быть верна система:

$$\begin{cases} \langle (u\,m - v\,k; v\,t); (m;0)\rangle > 0, \\ \langle (u\,m - v\,k; v\,t); (-k;t)\rangle > 0. \end{cases} \tag{3}$$

Найдем j, при котором эти условия могут выполняться. Рассмотрим второе неравенство системы (3):

$$\langle (u\,m - v\,k; v\,t); (-k;t)\rangle > 0;$$
$$-k\,(u\,m - v\,k) + v\,t^2 > 0;$$
$$v\,t^2 + u\,t^2 > k\,(u\,m - v\,k) + u\,t^2;$$
$$j > \frac{k\,(u\,m - v\,k)}{t^2} + u. \tag{4}$$

Так как в случае, когда $a'_{s,1} > 0$ может быть добавлен только вектор $(-k;t)$, то:

$$u\,m - v\,k \leqslant m; \tag{5}$$
$$u\,m - (j-u)\,k \leqslant m;$$
$$u\,(m+k) \leqslant m + j\,k;$$
$$u \leqslant \frac{m + j\,k}{m+k}. \tag{6}$$

Нетрудно видеть, что подставив (6) в (4) можно получить оценку:

$$j > \frac{k\,(u\,m - v\,k)}{t^2} + \frac{m + j\,k}{m+k};$$
$$\frac{j\,(m+k) - j\,k}{m+k} > \frac{k\,(u\,m - v\,k)}{t^2} + \frac{m}{m+k};$$
$$j > \frac{k\,(u\,m - v\,k)\,(m+k)}{t^2\,m} + 1. \qquad (7)$$

Подстановка (5) в (7) дает оценку:

$$j > \frac{k\,(m+k)}{t^2} + 1.$$

Итак, при $j > \frac{k\,(m+k)}{t^2} + 1$ второе неравенство системы (3) выполнено. Как ранее было замечено, хотя бы у одного из векторов $\overline{a'_s}$ и $\overline{a'_{s+1}}$ первая координата больше нуля. Значит хотя бы один из векторов $\overline{a'_{\left[\frac{k\,(m+k)}{t^2}\right]+2}}$ и $\overline{a'_{\left[\frac{k\,(m+k)}{t^2}\right]+3}}$ полностью удовлетворяет системе (3). А значит:

$$j \leqslant \left[\frac{k\,(m+k)}{t^2}\right] + 3 \leqslant \frac{k\,(m+k)}{t^2} + 3 = \frac{m\,k + k^2 + t^2}{t^2} + 2 =$$
$$= \frac{2\,m\,k + 2\,k^2 + 2\,t^2}{2\,t^2} + 2 \leqslant \frac{2\,m\,k + k^2 + t^2 + m^2}{2\,t^2} + 2 =$$
$$= \frac{(t^2 + (k+m)^2)\,m^2}{2\,t^2\,m^2} + 2 = \frac{D^2}{2\,r^2} + 2.$$

2. В данном случае обе точки находят в одном квадранте плоскости относительно координатных осей. Заведомо хотя бы один из векторов $\overline{a'_1}$ или $\overline{a'_2}$ не лежит на границе этого квадранта, следовательно, образовывает острый угол с векторами $(m;0)$ и $(k;t)$. Отсюда оба скалярных произведения больше нуля. Итого шагов не более двух, что не больше чем $\frac{D^2}{2\,r^2} + 2$.

3. В данном случае достаточно одного шага, что не больше чем $\frac{D^2}{2\,r^2} + 2$.

Теорема 2 доказана.

Следствие 1. *Теоремы 1 и 2 обобщаются на случай формулировки теоремы Новикова*[2] *из учебного пособия [1].*

---

[2]Принципиальные отличия формулировки из [1] заключаются в том, что точки принадлежат n-мерному евклидову пространству, и каждый вектор встречается

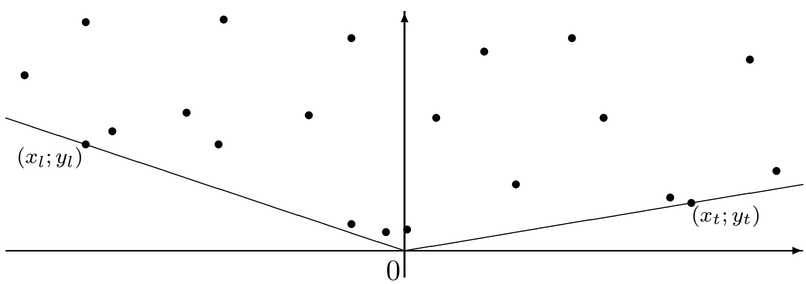
Доказательство. Для множества, построенного в теореме 1, не меняются фактическое число шагов и оценка числа шагов при каноническом вложении плоскости в $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$). Начиная со второго шага, добавляемый вектор определен однозначно. Следовательно, порядок обучающей последовательности не влияет на количество шагов, так как шагов заведомо не меньше двух.

Любое множество в $\mathbb{R}^n$, состоящее из двух точек и строго отделимое от нуля, поворотами вокруг координатных осей и симметриями относительно $(n-1)$-мерных гиперплоскостей, содержащих $(0;\ldots;0)$, сводится к множеству одного из трех видов:

1) $X' = \{(m;0;0;\ldots;0);(-k;t;0;\ldots;0)\}$, где $m,k,t > 0$ и $m \geqslant \sqrt{k^2+t^2}$;
2) $X' = \{(m;0;0;\ldots;0);(k;t;0;\ldots;0)\}$, где $m,t > 0$ и $k \geqslant 0$;
3) $X' = \{(m;0;0;\ldots;0);(k;0;0;\ldots;0)\}$, где $m,k > 0$.

Далее доказывается аналогично доказательству теоремы 2.

Замечание. Для любого множества $X = \big\{(x_1;y_1);\ldots;(x_k;y_k)\big\}$ на плоскости, строго отделимого от нуля, найдутся такие две точки $(x_l;y_l)$ и (x_t,y_t), принадлежащие этому множеству, что прямая, построенная алгоритмом Новикова для этих двух точек, будет строго отделять и оригинальное множество.



Список литературы

[1] Кудрявцев В. Б., Гасанов Э. Э., Подколзин А. С. Введение в теорию интеллектуальных систем. — М.: Изд-во ф-та ВМиК МГУ, 2006.

в обучающей последовательности бесконечное число раз, но порядок следования векторов не строго определен.