

Об инвариантности характеристик конфигураций однородных структур

К. К. Якимец

В данной статье исследуется поведение однородных структур с точки зрения сохранения ими различных целочисленных характеристик своих конфигураций. Для характеристики, являющейся суммой значений данной функции на наборах ячеек конфигурации, был построен алгоритм, вычисляющий принадлежность однородной структуры к классу однородных структур, сохраняющих эту характеристику для любой своей конфигурации.

Ключевые слова: однородная структура, конфигурация, характеристика, консервативность, однородное отображение, Ф-консервативность.

1. Введение. Основные обозначения и результаты

Однородные структуры представляют собой дискретную модель реальных пространственных процессов. Зачастую такие процессы обладают инвариантностью некоторых характеристик своих состояний — «законами сохранения». Изучение возможности алгоритмического распознавания аналогов этих законов в однородных структурах и является предметом настоящей работы.

Напомним, что однородной структурой называется набор из четырех элементов $\sigma = (\mathbb{Z}^n, E_k, V_m, f)$, где \mathbb{Z}^n — множество целочисленных n -мерных векторов (ячейки однородной структуры), E_k — множество целых чисел от нуля до $k - 1$ (состояния ячеек конфигурации), V_m — упорядоченный набор из $(\mathbb{Z}^n)^m$, называемый шаблоном соседства. Соответственно $V_m(\alpha) = (\alpha + v_1, \dots, \alpha + v_m)$. f — функция переходов однородной структуры, действующая из E_k^m в E_k и сохраняющая ноль. Конфигурацией K однородной структуры σ называется

ся отображение $\mathbb{Z}^n \rightarrow E_k$ с конечным носителем (то есть множество элементов $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ таких, что $K(\alpha) \neq 0$ конечно). Запись $K[\alpha_1, \dots, \alpha_t]$ означает набор $(K(\alpha_1), \dots, K(\alpha_t))$. Глобальная функция переходов F однородной структуры — это отображение из множества конфигураций в него же, действующее по правилу $F(K)(\alpha) = f(K[V_m(\alpha)])$. Под действием однородной структуры на конфигурацию будем понимать действие глобальной функции переходов этой однородной структуры. Соответственно, в дальнейшем будем обозначать однородную структуру и ее глобальную функцию переходов одной буквой, не забывая при этом, что исходно это все же разные понятия. Характеристика — это отображение из некоторого множества (в данном случае множества конфигураций) в некоторое множество чисел (в нашем случае будут рассматриваться целые неотрицательные).

Для некоторых нетривиальных классов характеристик существует алгоритм, позволяющий по данной однородной структуре определить, сохраняется ли под действием этой однородной структуры характеристика ее конфигураций. Введем следующие обозначения. $N(K)$ — сумма состояний ячеек в конфигурации K . За $|K|$ обозначим мощность носителя конфигурации K (то есть число ячеек на которых K принимает ненулевое значение). $|K|_t$ — число ячеек на которых K принимает значение t .

Множество всех конфигураций, действующих из \mathbb{Z}^n в E_k обозначим $\mathbb{K}(\mathbb{Z}^n, E_k)$. Пусть f — функция k -значной логики. P — характеристика конфигураций из $\mathbb{K}(\mathbb{Z}^n, E_k)$. Однородная структура $(\mathbb{Z}^n, E_k, V_m, f)$ с глобальной функцией перехода F называется P -консервативной, если для любой конфигурации K , $P(K) = P(F(K))$. Однородная структура называется консервативной, если она P -консервативна для $P = N$. Однородным отображением $\Phi = (\mathbb{Z}^n, E_k, E_l, V_m, \varphi)$, где φ — произвольное отображение $E_k^m \rightarrow E_l$, называется отображение, ставящее в соответствие произвольной конфигурации $K \in \mathbb{K}(\mathbb{Z}^n, E_k)$ конфигурацию $L \in \mathbb{K}(\mathbb{Z}^n, E_l)$ по правилу $L(\alpha) = \varphi(K[V_m(\alpha)])$ для всех $\alpha \in \mathbb{Z}^n$. Пусть Φ — однородное отображение, сохраняющее ноль. Однородная структура с глобальной функцией перехода F называется Φ -консервативной, если она P -консервативна для $P = N \circ \Phi$. Пусть φ — отображение $E_k \rightarrow E_l$, сохраняющее ноль. Однородная структура называется φ -консервативной, если она P -консервативна для $P = N \circ \Phi$, где Φ — однородное отображение $(\mathbb{Z}^n, E_k, E_l, V_1, \varphi)$. Однородная структура называется t -консервативной, если она P -консервативна для $P = |\cdot|_t$.

Теорема 1. *Существует алгоритм, распознающий консервативность произвольной однородной структуры.*

Первая теорема является обобщением на n -мерный случай соответствующей теоремы [1].

Теорема 2. *Пусть φ — сохраняющее ноль отображение $E_k \rightarrow E_l$, тогда существует алгоритм, распознающий φ -консервативность однородной структуры вида $(\mathbb{Z}^n, E_k, V_m, f)$.*

Следствие 1. *Существует алгоритм, распознающий по произвольной однородной структуре инвариантность относительно переходов числа ненулевых ячеек в конфигурациях этой однородной структуры.*

Это можно назвать 0-консервативностью, где $0(K)$ — число ненулевых ячеек конфигурации K .

Следствие 2. *Существует алгоритм, распознающий t -консервативность однородной структуры.*

Следствие 3. *Существует алгоритм, распознающий по произвольной однородной структуре инвариантность относительно переходов суммарного числа ячеек с заданными состояниями s_1, \dots, s_r в конфигурациях этой однородной структуры.*

Теорема 3. *Пусть $\Phi = (\mathbb{Z}^n, E_k, E_l, V_m, \varphi)$ — однородное отображение, сохраняющее ноль. Существует алгоритм, распознающий Φ -консервативность однородной структуры вида $(\mathbb{Z}^n, E_k, V_m, f)$.*

2. Доказательство теоремы 1

Пусть дана консервативная однородная структура $G = (\mathbb{Z}^n, E_k, V_m, g)$. Без ограничения общности можно принять $V_{(2m+1)^n}$ за n -мерный куб со сторонами длины $2m+1$ и симметричным относительно центра. Тогда состояния блока $V_{(2m+1)^n}(\alpha)$ можно изображать при помощи n -мерных квадратных (кубических) матриц, имеющих $2m+1$ ячеек в каждом направлении. Пусть X — матрица, определяющая некоторое состояние s блока $V_{(2m+1)^n}(\alpha)$, $(x_1, \dots, x_{(2m+1)^n})$ — соответствующий состоянию s набор состояний ячеек $\alpha + v_1, \dots, \alpha +$

$v_{(2m+1)^n}$, $V_{(2m+1)^n} = (v_1, \dots, v_{(2m+1)^n})$. Доопределим функцию g на матрицах: $g(X) = g(x_1, \dots, x_{(2m+1)^n})$. Введем обозначение $\lambda_{i_1, \dots, i_n}(X)$ (i_1, \dots, i_n — целые) для матрицы, получаемой из X следующими преобразованиями:

Если $i_j \geq 0$, то происходит циклический сдвиг матрицы по j -му направлению на i_j элементов в сторону возрастания индекса. После чего первые i_j гиперплоскостей забиваются нулями.

Если $i_j < 0$, то происходит циклический сдвиг матрицы по j -му направлению на $-i_j$ элементов в сторону убывания индекса. После чего последние i_j гиперплоскостей забиваются нулями.

Сопоставим каждой матрице X конфигурацию K_X , у которой состояние блока $V_{(2m+1)^n}(0)$ определяется матрицей X , а ячейки вне этого блока имеют нулевые состояния. Имеем $\sum(G(K_X)) = \sum_{r_1=-2m}^{2m} \cdots \sum_{r_n=-2m}^{2m} g(\lambda_{r_1, \dots, r_n}(X)) = \sum(K_X) = \sum_{i_1=1}^{2m+1} \cdots \sum_{i_n=1}^{2m+1} x_{i_1, \dots, i_n}$, где x_{i_1, \dots, i_n} задают матрицу X .

Обозначив $I = \{-2m, -2m+1, \dots, 2m\}^n \setminus (0, \dots, 0)$, будем далее иметь $g(X) = \sum_{i_1=1}^{2m+1} \cdots \sum_{i_n=1}^{2m+1} x_{i_1, \dots, i_n} - \sum_{(r_1, \dots, r_n) \in I} g(\lambda_{r_1, \dots, r_n}(X))$.

Подставив в эту формулу вместо матрицы X матрицу $\lambda_{-1, 0, \dots, 0}(X)$ и подставляя затем выражение для $g(\lambda_{-1, 0, \dots, 0}(X))$ снова в эту же формулу, получим, учитывая $\lambda_{r_1, r_2, \dots, r_n}(\lambda_{-1, 0, \dots, 0}(X)) = \lambda_{r_1-1, r_2, \dots, r_n}(X)$ при $r_1 \leq 0$: $g(X) = \sum_{i_2=1}^{2m+1} \cdots \sum_{i_n=1}^{2m+1} x_{1, i_2, \dots, i_n} + \sum_{(r_1, \dots, r_n) \in I, r_1 > 0} (g(\lambda_{r_1, \dots, r_n}(\lambda_{-1, 0}(X))) - g(\lambda_{r_1, \dots, r_n}(X))) - \sum_{(0, r_1, \dots, r_n) \in I} g(\lambda_{0, r_2, \dots, r_n}(X))$.

Далее, подставим уже в эту формулу матрицу $\lambda_{0, -1, \dots, 0}$ и полученное выражение для $g(\lambda_{0, -1, \dots, 0}(X))$ снова подставим в ту же формулу. Получим следующую итерацию формулы и с ней проделаем все те же манипуляции по следующему направлению. В результате таких преобразований и очевидных упрощений будем иметь основное тождество: $g(X) = x_{1, \dots, 1} + \sum_{(r_1, \dots, r_n) \in I, r_1 > 0} (g(\lambda_{r_1, \dots, r_n}(\lambda_{-1, 0, \dots, 0}(X))) - g(\lambda_{r_1, \dots, r_n}(X))) - \sum_{(r_1, \dots, r_n) \in I, r_1 > 0} (g(\lambda_{r_1, \dots, r_n}(\lambda_{-1, -1, \dots, 0}(X))) - g(\lambda_{r_1, \dots, r_n}(\lambda_{0, -1, \dots, 0}(X)))) + \cdots + (-1)^{n-1} \sum_{(r_1, \dots, r_n) \in I, r_1 > 0} (g(\lambda_{r_1, \dots, r_n}(\lambda_{-1, -1, \dots, -1}(X))) - g(\lambda_{r_1, \dots, r_n}(\lambda_{0, \dots, 0, -1}(X)))) + \cdots + \sum_{(0, \dots, 0, r_n) \in I, r_n > 0} (g(\lambda_{0, \dots, 0, r_n}(\lambda_{0, \dots, 0, -1}(X))) - g(\lambda_{0, \dots, 0, r_n}(X)))$.

Пусть теперь G — произвольная однородная структура, причем для функции g выполняется последнее полученное соотношение. Рассмотрим произвольную конфигурацию K однородной структуры G . Заметим, что для матриц X_1 и X_2 , определяемых конфигурацией K в окрестностях $V_{(2m+1)^n}(\alpha_1)$ и $V_{(2m+1)^n}(\alpha_2)$ ячеек α_1 и α_2 выполняется, в зависимости от взаимного расположения этих ячеек, следующие соотношения:

1) Если $\alpha_2 = \alpha_1 + (1, 0, \dots, 0)$, то при всех $(r_1, \dots, r_n) \in I$ таких, что $r_1 > 0$, имеет место

$$\begin{aligned} \lambda_{r_1, \dots, r_n}(\lambda_{-1, 0, \dots, 0}(X_1)) &= \lambda_{r_1, \dots, r_n}(X_2), \\ \lambda_{r_1, \dots, r_n}(\lambda_{-1, -1, \dots, 0}(X_1)) &= \lambda_{r_1, \dots, r_n}(\lambda_{0, -1, \dots, 0}(X_2)), \\ \dots \\ \lambda_{r_1, \dots, r_n}(\lambda_{-1, -1, \dots, -1}(X_1)) &= \lambda_{r_1, \dots, r_n}(\lambda_{0, \dots, 0, -1}(X_2)) \\ \dots \end{aligned}$$

п) Если $\alpha_2 = \alpha_1 + (0, \dots, 0, 1)$, то при всех $(0, \dots, 0, r_n) \in I$ таких, что $r_n > 0$, имеет место

$$\lambda_{0, \dots, 0, r_n}(\lambda_{0, \dots, 0, -1}(X_1)) = \lambda_{0, \dots, 0, r_n}(X_2).$$

Поэтому при суммировании правых частей основного тождества по всем матрицам X , определяемым конфигурацией K в окрестностях различных ячеек α , останется лишь сумма величин $x_{1, \dots, 1}$, откуда и получим $\sum(G(K)) = \sum(K)$.

Таким образом, для проверки сохранения при переходах однородной структуры G сумм состояний ячеек в ее конфигурациях достаточно проверить выполнение основного тождества. Эта проверка сводится к перебору конечного множества различных матриц X и является алгоритмически выполнимой.

3. Доказательство теоремы 2

Лемма 1. *Существует алгоритм построения по произвольной однородной структуре $G = (\mathbb{Z}^n, E_k, V, g)$ и, сохраняющему ноль, отображению $\varphi : E_k \rightarrow E_l$, однородной структуры $H = (\mathbb{Z}^n, E_{k+2l-3}, V, h)$, такой, что G φ -консервативна тогда и только тогда, когда H консервативна.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что φ достигает значения $l-1$ в точке p . Введем отображение $\pi : E_{k+2l-3} \rightarrow E_k$ следующим образом:

$$\pi(s) = 0, \text{ при } s \leq l-2$$

$$\pi(s) = s - l + 2, \text{ при } l - 2 < s < l + k - 2$$

$$\pi(s) = p, \text{ при } s \geq l + k - 2.$$

По сути своей π ставит в соответствие конфигурациям однородной структуры H конфигурации однородной структуры G , да так, что у каждой конфигурации G есть хотя бы один прообраз. Так же, как и в случае действий конфигураций (во введении), будем считать $\pi[s_1, \dots, s_t] = (\pi(s_1), \dots, \pi(s_t))$

Определим функцию h : $h(x_1, \dots, x_m) = x_1 + \varphi(g(\pi[x_1, \dots, x_m])) - \varphi(\pi(x_1))$

Функция h задана так, чтобы после действия H на свою произвольную конфигурацию K $(HK)(\alpha) - K(\alpha) = \varphi((GL)(\alpha)) - \varphi(L(\alpha))$ для соответствующей конфигурации L однородной структуры G .

Докажем корректность определения, то есть, что h действительно принимает значения из E_{k+2l-3} и только. Требуется показать, что $0 \leq x_1 + \varphi(g(\pi[x_1, \dots, x_m])) - \varphi(\pi(x_1)) < k + 2l - 3$. По определению

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi(t) \leq l - 1 \\ \varphi(0) = 0 \\ \pi(x_1) = 0, \end{cases} \quad \text{при } x_1 \leq l - 2$$

то есть

$$\begin{cases} \varphi(\pi(x_1)) = 0, & \text{при } x_1 \leq l - 2 \\ \varphi(\pi(x_1)) \leq l - 1 \end{cases}$$

значит $\varphi(\pi(x_1)) \leq x_1$, и $0 \leq x_1 + \varphi(g(\pi[x_1, \dots, x_m])) - \varphi(\pi(x_1))$. Также, $\varphi(\pi(x_1)) = l - 1$ при $x_1 \geq l + k - 2$, то есть $\varphi(g(\pi[x_1, \dots, x_m])) - \varphi(\pi(x_1)) \leq 0$ при $x_1 \geq l + k - 2$. А также, из того, что $0 \leq \varphi(t) \leq l - 1$ следует, что $\varphi(g(\pi[x_1, \dots, x_m])) - \varphi(\pi(x_1)) \leq l - 1$, при $x_1 < l + k - 2$, значит $x_1 + \varphi(g(\pi[x_1, \dots, x_m])) - \varphi(\pi(x_1)) < k + 2l - 3$. Определение корректно.

Осталось убедиться, что полученная однородная структура удовлетворяет требованиям теоремы: Пусть H консервативна, тогда она консервативна и на всех конфигурациях G (то есть на тех, на которых $\pi[x_1, \dots, x_m] = (x_1 - l + 2, \dots, x_m - l + 2)$, для всех отрезков конфигурации), значит сумма $\varphi(g(x_1, \dots, x_m))$ по всем отрезкам произвольной конфигурации однородной структуры G равна сумме $\varphi(x_1)$ по всем ячейкам этой конфигурации, что и означает по определению φ -консервативность G . И наоборот, если G φ -консервативна, то для любой конфигурации однородной структуры

H , сумма $\varphi(g(\pi[x_1, \dots, x_m]))$ равна сумме $\varphi(\pi(x_1))$, то есть сумма разностей $\varphi(g(\pi[x_1, \dots, x_m])) - \varphi(\pi(x_1))$ равна нулю, что означает, что сумма состояний начальной конфигурации равна сумме состояний конечной, то есть H консервативна.

Доказательство теоремы 2. По лемме 1, для данной однородной структуры G и отображения φ строится однородная структура H , консервативность которой эквивалентна φ -консервативности G . А консервативность однородных структур устанавливается по теореме 1.

Доказательство следствия 1. Введем отображение φ следующим образом:

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ \varphi(s) = 1, \quad \text{при } s > 0 \end{cases}$$

и заметим, что φ -консервативность данной однородной структуры — это и есть инвариантность относительно числа ненулевых ячеек.

Доказательство следствия 2. Введем отображение φ следующим образом:

$$\begin{cases} \varphi(s) = 1, \quad \text{при } s = t \\ \varphi(s) = 0, \quad \text{иначе} \end{cases}$$

Доказательство следствия 3. Введем отображение φ следующим образом:

$$\begin{cases} \varphi(s) = 1, \quad \text{при } s = s_1, \dots, s_r \\ \varphi(s) = 0, \quad \text{иначе} \end{cases}$$

4. Доказательство теоремы 3

Лемма 2. Существует алгоритм построения по произвольной однородной структуре $G = (\mathbb{Z}^n, E_k, V_m, g)$ и сохраняющему ноль, однородному отображению $\Phi = (\mathbb{Z}^n, E_k, E_l, V_r, \varphi)$, функции $\psi : E_k^{r+3l} \rightarrow E_{3l}$ и однородной структуры $H = (\mathbb{Z}^n, E_k^{r+3l}, V_s, h)$, такой, что G Φ -консервативна тогда и только тогда, когда H ψ -консервативна.

Доказательство. Определим функцию ψ . Разобьем множество чисел из E_k^{r+3l} на две группы C и B , так, что в B $3l$ элементов и ноль принадлежит B . Пронумеруем элементы B в порядке возрастания

(точнее $b_0 = 0$, а остальные как угодно), а элементы C поставим во взаимно однозначное соответствие с r -элементными наборами над $E_k : c \sim (c_1, \dots, c_r)$. Тогда:

$$\psi(b_i) = i$$

$$\psi(c) = l + \varphi(c_1, \dots, c_r)$$

Определим также $\psi^{-1} : E_{3l} \rightarrow E_k^{r+3l}$

$$\psi^{-1}(i) = b_i$$

Обозначим p — число ячеек в окрестностях V_m ячеек окрестности V_r .

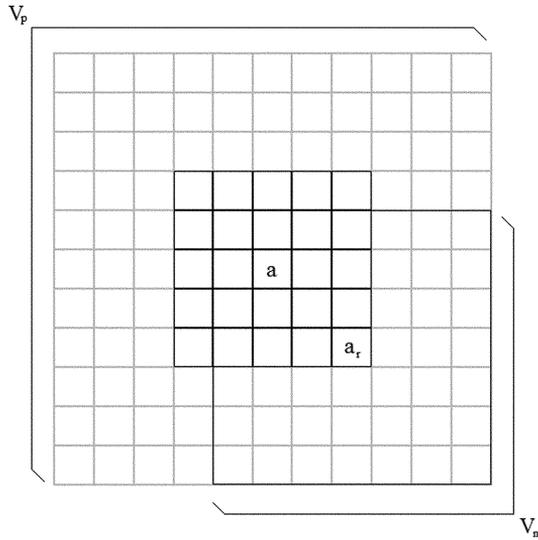


Рис. 1. Пример для двумерного случая, $m = 49$, $r = 25$ ($p = 121$).

Введем отображение $\pi : (E_{k^{r+3l}})^p \rightarrow E_k$ следующим образом:

$\pi(a_1, \dots, a_p) = 0$, если среди a_1, \dots, a_p хотя бы одно a_i принадлежит B .

$\pi(c_1, \dots, c_p) = \min(c_{i_1, k_1}, c_{i_2, k_2}, \dots, c_{i_r, k_r})$, где i_j — индекс элемента, содержащего центр в характеризуемой им окрестности, а k_j — индекс центра относительно i_j -го элемента V_r . Все шаблоны соседства, для корректности подобного определения, можно считать n -мерным кубом (симметричным относительно нуля), что, тем не менее, не ограничивает общности доказательства.

Таким образом, π позволяет произвольной конфигурации однородной структуры H поставить в соответствие конфигурацию однородной структуры G . При этом π — обычная функция с конечным

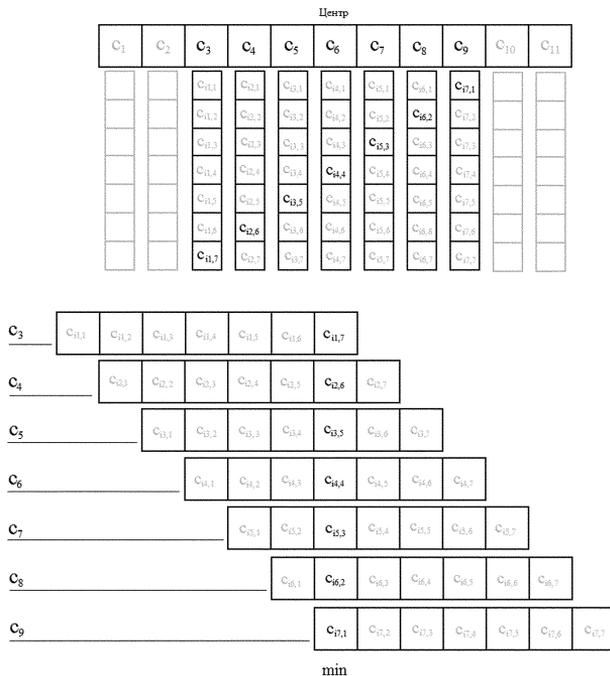


Рис. 2. Пример для одномерного случая, $m = 5$, $r = 7$ ($p = 11$).

числом переменных, а значит, ее можно спокойно использовать для определения функции h , если выбрать достаточно большой шаблон соседства V_s .

Определим функцию h : для упрощения записи будем писать $\pi[x_i]$, имея в виду $\pi[V_p(x_i)]$, где $V_p(x_i)$ — набор из p элементов, соответствующих упорядоченной окрестности x_i , и выбранных из данного на вход h набора (являющегося частью некоторой конфигурации). При этом s достаточно большое для того, чтобы $V_p(x_i)$ было определимо из (x_1, \dots, x_s) при всех i , которые будут использованы ниже. $h(x_1, \dots, x_s) = \psi^{-1}(\psi(x_1) - \varphi(\pi[x_1], \dots, \pi[x_m]) + \varphi(g(\pi[x_1], \dots, \pi[x_m]), \dots, g(\pi[x_r], \dots, \pi[x_{m+r-1}])))$

Эта конструкция по своему принципу похожа на аналогичную из теоремы 1, но необходимо сделать несколько замечаний. Во первых, x_1 — центр рассматриваемого блока, а во-вторых он входит во все наборы над которыми рассматриваются действия g . То есть каждый из наборов $(x_1, \dots, x_m), (x_2, \dots, x_{m+1}), \dots, (x_r, \dots, x_{m+r-1})$ содержит

x_1 (соответственно они не обязаны быть упорядочены интуитивным образом).

Докажем корректность определения, то есть, что выражение под ψ^{-1} не выходит за пределы E_{3l} . Достаточно показать, что $0 \leq \psi(x_1) - \varphi(\pi[x_1], \dots, \pi[x_r]) + \varphi(g(\pi[x_1], \dots, \pi[x_m]), \dots, g(\pi[x_r], \dots, \pi[x_{m+r-1}])) < 3l$. Если $x_1 \in B$, то $\pi[x_1] = \dots = \pi[x_p] = 0$, так как x_1 входит в окрестность $V_p(x_i)$ для всех $i = 1, \dots, p$.

Значит $g(\pi[x_1], \dots, \pi[x_m]) = \dots = g(\pi[x_r], \dots, \pi[x_{m+r-1}]) = 0$, так как g сохраняет ноль. Следовательно $\psi(x_1) - \varphi(\dots) + \varphi(\dots) = \psi(x_1)$, что по определению меньше $3l$ и не меньше нуля. Если же $x_1 \in C$, то $l \leq \psi(x_1) < 2l$, а $0 \leq \varphi(\dots) < l$ по определению φ , значит $0 \leq \psi(x_1) - \varphi(\dots) + \varphi(\dots) < 3l$.

Осталось убедиться, что полученная однородная структура удовлетворяет требованиям теоремы. Как уже отмечалось, π позволяет произвольной конфигурации однородной структуры H поставить в соответствие конфигурацию однородной структуры G . Пусть конфигурации K ставится в соответствие конфигурация L . Тогда для любой ячейки α , $\psi(K(\alpha)) - \psi(HK(\alpha)) = \Phi L(\alpha) - \Phi(GL)(\alpha)$. А значит, если G Φ -консервативна, то H ψ -консервативна. Аналогично каждой конфигурации однородной структуры G можно поставить в соответствие конфигурацию однородной структуры H так, что выполнено то же равенство $\psi(K(\alpha)) - \psi(HK(\alpha)) = \Phi L(\alpha) - \Phi(GL)(\alpha)$. Если L — произвольная конфигурация G , то соответствующая ей конфигурация K будет иметь вид $K(\alpha) = c \sim (c_1, \dots, c_r) = L(V_r(\alpha))$. Значит, если H ψ -консервативна, то она ψ -консервативна и на этих особых конфигурациях, а значит G Φ -консервативна.

Доказательство теоремы 3. По лемме 2, для данной однородной структуры G и однородного отображения Φ строится отображение ψ и однородная структура H , ψ -консервативность которой эквивалентна Φ -консервативности G . В свою очередь, ψ -консервативность однородных структур устанавливается по теореме 2.

Список литературы

- [1] Подколзин А. С. О поведении однородных структур // Проблемы кибернетики. — М.: Наука, 1974. — Вып. 31. — С. 133–166.