Хроматическое число бипланарных графов без треугольников

Р. А. Ищенко

Задача нахождения хроматического числа графов — одна из наиболее привлекательных и сложных задач теории графов. Известно, что для бипланарных графов (графов, реализуемых без пересечений рёбер на двух сторонах плоскости), хроматическое число не меньше 9 и не больше 12. В данной работе показывается, что хроматическое число бипланарных графов без треугольников не меньше 5 и не больше 8.

Ключевые слова: бипланарный граф, хроматическое число, граф без треугольников, граф толщины 2.

Графом $G = (V, E)$ называется упорядоченная пара множеств: конечного непустого V, элементы которого называются *вершинами* графа G, и множества E неупорядоченных пар вершин, называемых *ребрами* графа G. Если $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ и $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$, то говорят, что граф G получился *операцией объединения* графов G_1 и G_2. Эту операцию обозначают как $G = G_1 \cup G_2$. Граф G называется *бипланарным*, если существуют его подграфы G_1 и G_2, такие что G_1, G_2 — планарные и $G = G_1 \cup G_2$. В данной работе мы будем рассматривать бипланарные *графы без треугольников*, то есть такие графы, в которых никакие три вершины не образуют треугольник из ребер.

Правильной раскраской вершин графа $G = (V, E)$ в k цветов называется разбиение $V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k$ множества его вершин на попарно непересекающиеся непустые подмножества, состоящие из попарно несмежных вершин. Наименьшее k, при котором граф G допускает такую раскраску, называется *хроматическим числом* графа G.

По следствию [2] из формулы Эйлера для планарных графов без треугольников с p вершинами и q ребрами справедливо неравенство $q \leqslant 2p - 4$. Имеет место

Утверждение 1. *Пусть G — бипланарный граф без треугольников, с p вершинами и q ребрами, тогда выполнено неравество $q \leqslant 4p - 8$.*

В самом деле. Пусть $G = G_1 \cup G_2$, G_1 и G_2 — планарные. Без ограничения общности будем считать, что подграфы G_1 и G_2 содержат все p вершин графа G. Пусть q_1 и q_2 соответственно число ребер графов G_1 и G_2, соответственно, тогда: $q_1 \leqslant 2p - 4$, $q_2 \leqslant 2p - 4$. Очевидно, что G_1 и G_2 — графы без треугольников, поэтому $q \leqslant q_1 + q_2 \leqslant 2p - 4 + 2p - 4 = 4p - 8$.

Утверждение 2. *В любом бипланарном графе без треугольников существует вершина степени не более 7.*

Действительно, предположим, что в бипланарном графе G без треугольников степень любой вершины не меньше 8, число вершин p, а число ребер q. Тогда $2q \geqslant 8p$, так как каждой вершине инцидентны не менее 8-ми ребер, а каждому ребру инцидентны ровно 2 вершины. Мы пришли к противоречию с утверждением 1.

Имеет место

Теорема 1. *Любой бипланарный граф без треугольников можно правильно раскрасить при помощи не более чем 8-ми цветов.*

Доказательство. Докажем индукцией по количеству вершин в графе. Очевидно, что граф из одной вершины можно раскрасить не более чем 8-ю цветами. Пусть утверждение теоремы верно для любого бипланарного графа без треугольников с не более чем $p-1$ вершинами. Докажем утверждение для бипланарного графа G без треугольников с p вершинами. Согласно утверждению 2, найдется вершина v степени не больше 7. Удалим вершину v и все инцидентные ей ребра из графа G. Полученный граф G^* можно раскрасить не более чем 8-ю цветами по предположению индукции. Добавив вершину v и все инцидентные ей ребра обратно, получим, что вершину v мы тоже сможем раскрасить, так как смежные ей вершины покрашены не более чем в 7 различных цветов. Теорема доказана.

Известно, что последовательность графов Мыцельского $\{M_i,\ i = 1, 2, \dots\}$ такова, что граф M_i не имеет треугольников, и его хроматическое число равно i. Нижняя оценка хроматического числа бипланарных графов без треугольников получается на примере графа

M_5 — пятого члена последовательности Мыцельского [3]. Имеет место

Утверждение 3. *Граф M_5 — бипланарный.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу смежности графа M_5. В таблице цифрой 1 показаны рёбра графа G_1, а цифрой 2 показаны рёбра графа G_2.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	w
v_1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	2	0	0	1	0	1	0	0	2	0	0
v_2	1	0	1	0	0	2	0	1	0	0	0	1	0	2	0	0	1	0	0	1	0	0	0
v_3	0	1	0	1	0	0	2	0	1	0	0	0	1	0	2	0	0	2	0	1	0	0	0
v_4	0	0	1	0	1	0	0	2	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	2	0	1	0	0
v_5	1	0	0	1	0	2	0	0	2	0	0	2	0	0	1	0	2	0	0	2	0	0	0
v_6	0	2	0	0	2	0	0	0	0	0	1	0	2	0	0	2	0	0	0	0	0	1	0
v_7	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	2	0
v_8	0	1	0	2	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	2	0	0	0	0	0	0	2	0
v_9	0	0	1	0	2	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	2	0	0	0	0	0	2	0
v_{10}	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
v_{11}	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0
u_1	0	1	0	0	2	0	1	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
u_2	2	0	1	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
u_3	0	2	0	1	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
u_4	0	0	2	0	1	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
u_5	1	0	0	1	0	2	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
u_6	0	1	0	0	2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
u_7	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
u_8	0	1	0	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
u_9	0	0	1	0	2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
u_{10}	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
u_{11}	0	0	0	0	0	1	2	2	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
w	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	0

Граф M_5 является объединением двух планарных графов G_1 и G_2. Эти графы приведены на рисунках 1 и 2, соответственно.

Утверждение 3 доказано. Получилась

Теорема 2. *Хроматическое число любого бипланарного графа без треугольников не менее 5 и не более 8.*

Работа выполнена на кафедре математической теории интеллектуальных систем под руководством профессора Бабина Д. Н.

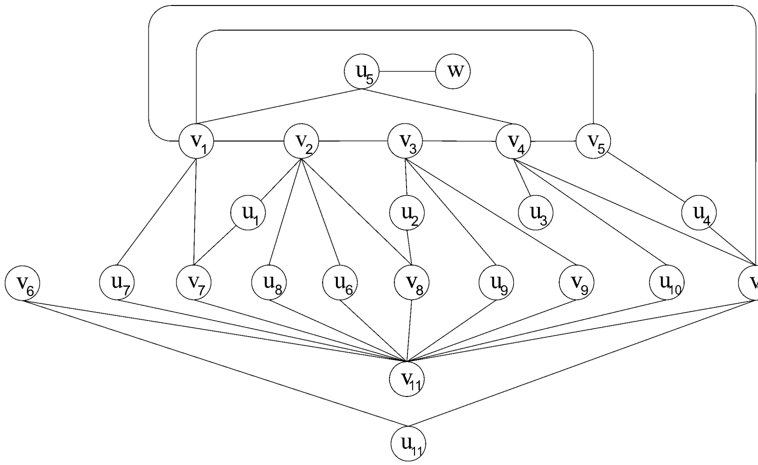

Рис. 1. Планарный граф G_1.

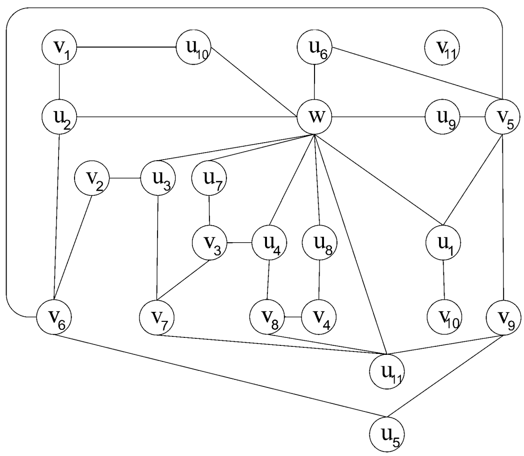

Рис. 2. Планарный граф G_2.

Список литературы

[1] Hutchinson J. P. Coloring ordinary maps, maps of empires, and maps of the moon // Mathematics Magazine. — 1993. — 66. — P. 215–217.

[2] Харари Ф. Теория графов. — М.: Мир, 1973.

[3] Mycielski J. Sur le coloriage des graphes // Colloquium Mathematicum. — 1995. — 3. — P. 161–162.