# Об алгоритмической неразрешимости некоторых проблем распознавания для пропозициональных исчислений

Г. В. Боков

В данной работе мы рассмотрим пропозициональные исчисления, формулы которых образованы логическими связками, содержащими классическую импликацию, а правилами вывода выступают операции modus ponens и подстановка. Известно, что в общем случае проблема распознавания выразимости одних исчислений через другие алгоритмически неразрешима. В данной работе будут рассмотрены частные случаи этой проблемы: распознавание аксиоматизации, распознавание расширения и распознавание полноты. В частности будет показано, что проблема распознавания расширения алгоритмически неразрешима для любого исчисления, а проблемы распознавания аксиоматизации и полноты алгоритмически неразрешимы для любого исчисления, из которого выводима формула $x \to (y \to x)$.

**Ключевые слова:** классическое и интуиционистское исчисления высказываний, импликативное исчисление, разрешимость распознавание аксиоматизации, расширения и полноты, тэг система.

## 1. Введение

В общем виде пропозициональное исчисление представляет собой пару: множество формул над некоторым множеством логических связок и конечное множество операций над формулами. Для данных исчислений естественным образом возникают много интересных и важных проблем. Например, *распознавание аксиоматизации*, когда по произвольному конечному множеству формул требуется определить, являются ли формулы данного множества аксиомами некоторого фиксированного пропозиционального исчисления, *распознавание расширения*, когда по произвольному конечному множеству формул требуется определить, можно ли из данного множества вывести все формулы некоторого фиксированного пропозиционального исчисления, *распознавание полноты*, когда по произвольному конечному подмножеству формул некоторого фиксированного пропозиционального исчисления требуется определить, можно ли из данного множества вывести все формулы этого исчисления. Впервые вопрос об алгоритмической разрешимости данных проблем был поставлен Тарским в 1946 году [11]. В данной работе мы рассмотрим только пропозициональные исчисления с операциями modus ponens и подстановки.

Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для классического исчисления высказываний была доказана Линиалом и Постом в 1949 году [7]. Следует отметить, что они рассматривали только формулы над логическими связками $\{\neg, \vee\}$, при этом операция modus ponens была определена соответствующим образом. Линиал и Пост опубликовали лишь идею доказательства, которое было восстановлено значительно позже Дэвисом [4, стр. 137–142] и Интемой [13]. Как следствие данного результата проблема распознавания аксиоматизации и расширения также алгоритмически неразрешимы для классического исчисления высказываний.

Для интуиционистского исчисления высказываний со связками $\{\neg, \vee, \&, \rightarrow\}$ те же результаты были получены Кузнецовым в 1963 году [3]. Он получил более сильный результат, согласно которому проблемы распознавания аксиоматизации, расширения и полноты алгоритмически неразрешимы для любого суперинтуиционистского исчисления высказываний, то есть конечного расширения интуиционисткого исчисления высказываний.

В своей работе Кузнецов отмечает, что в 1961 году А. А. Марков предложил рассмотреть те же проблемы для импликативного исчисления высказываний, то есть фрагмента классического исчисления высказываний, формулы которого образованы лишь с помощью одной связки $\rightarrow$. В 1994 году Марчинковски [8] доказал, что проблема распознавания полноты для импликативного исчисления алгоритмически неразрешима. Кроме того, он доказал следующий результат: пусть $A$ импликативная тавтология, не представимая в виде $B \rightarrow B$ для некоторой формулы $B$, тогда проблема выводимости формулы

$A$ из данного конечного множества импликативных формул алгоритмически неразрешима.

Тарский в 1925 году [12] доказал, что каждое суперинтуиционистское исчисления высказываний имеет систему аксиом, состоящую из одной формулы, поэтому как следствие из теоремы Марчинковского следует алгоритмическая неразрешимость проблемы расширения любого импликативного интуиционистского исчисления высказываний.

В 2013 году Золиным [14] был доказан результат Линиала и Поста для суперинтуиционистских исчислений над логическими связками $\{\wedge, \to\}$ и $\{\vee, \to\}$. Его доказательство основано на так называемых «тэг» системах, введенных Постом [10] и предложенных в 2009 году Боковым [1] для доказательства теоремы Линиала и Поста. Кроме того Золин в [14] дал детальный исторический обзор результатов, связанных с данной темой.

Цель данной работы доказать те же результаты для пропозициональных исчислений, логические связками которых содержат символ импликации $\to$. В частности, будет показано, что проблема распознавания расширения алгоритмически неразрешима для любого такого исчисления, а проблемы распознавания аксиоматизации и полноты алгоритмически неразрешимы для любого исчисления, из которого выводима тавтология $x \to (y \to x)$.

## 2. Основные понятия и результаты

Пусть $\mathcal{V}$ — счетное множество переменных и $\Sigma$ — конечное множество логических связок. Буквами $x, y, z, u$ будем обозначать переменные. Как правило, логические связки унарные или бинарные, например, $\neg$, $\vee$, $\wedge$ или $\to$.

*Пропозициональные формулы* или $\Sigma$-*формулы* строятся из логических связок $\Sigma$ и переменных $\mathcal{V}$ обычным образом. Заглавные буквы $A, B, C$ будут использоваться для обозначения формул. Далее условимся опускать внешние скобки, а также скобки, однозначно восстанавливаемые из частичного порядка логических связок.

В данной работе будут рассматриваться лишь множества логических связок, содержащих бинарную связку импликации $\to$. Согласно с [5] можно предполагать, что множество логических связок $\Sigma$ не содержит символа $\to$, но существует формула от двух переменных $x, y$, которая выражает утверждение «$x$ влечет $y$». В этом случае данную формулу будем обозначать через $x \to y$.

*Пропозициональное исчисление* $P$ над множеством логических связок $\Sigma$ (или $\Sigma$-*исчисление*) это пара, состоящая из конечного множества $\Sigma$-формул $P$, называемых *аксиомами*, и двух правил вывода:

1) *modus ponens*

$$A, A \to B \vdash B;$$

2) *подстановка*

$$A \vdash \sigma A,$$

где $\sigma A$ это подстановочный вариант $A$, то есть результат подстановки $\sigma$ в формулу $A$.

Обозначим через $[P]$ множество выводимых (или доказуемых) формул исчисления $P$. *Вывод* в $P$ из аксиом с помощью правил вывода определяется обычным образом. Выводимость формулы $A$ из $P$ будем обозначать через $P \vdash A$.

Определим на множестве всех пропозициональных исчислений предпорядок. Определим $P_1 \leqslant P_2$ (или $P_2 \geqslant P_1$), если каждая выводимая в $P_1$ формула также выводима в $P_2$, то есть $[P_1] \subseteq [P_2]$. Обозначим $P_1 \sim P_2$ и будем говорить, что исчисления $P_1$ и $P_2$ *эквивалентны*, если $[P_1] = [P_2]$. И наконец, обозначим $P_1 < P_2$, если $[P_1] \subsetneq [P_2]$.

Теперь определим формально проблемы распознавания *аксиоматизации* (**Axm**), *расширения* (**Ext**) и *полноты* (**Cmpl**) для некоторого $\Sigma$-исчисления $P_0$:

(**Axm**) *дано $P$, требуется определить $P_0 \sim P$;*
(**Ext**) *дано $P$, требуется определить $P_0 \leqslant P$;*
(**Cmpl**) *дано $P \leqslant P_0$, требуется определить $P_0 \leqslant P$.*

Обозначим через $\mathbf{Cl}_\Sigma$ классическое исчисление высказываний над множеством логических связок $\Sigma$ и через $\mathbf{Int}_\Sigma$ интуиционистское исчисление высказываний над множеством логических связок $\Sigma$ [6].

Упомянутые выше результаты можно представить в следующем виде.

**Теорема 1** (Линиал и Пост, 1949)**.** ***Axm, Ext*** *и* ***Cmpl*** *алгоритмически неразрешимы для* $\mathbf{Cl}_{\{\neg,\vee\}}$.

**Теорема 2** (Кузнецов, 1963)**.** *Пусть $\Sigma \supseteq \{\neg, \vee, \&, \to\}$, тогда* ***Axm, Ext*** *и* ***Cmpl*** *алгоритмически неразрешимы для любого $\Sigma$-исчисления $P_0 \geqslant \mathbf{Int}_{\{\neg,\vee,\&,\to\}}$.*

**Теорема 3** (Марчинковски, 1994)**.** *Для любой $\{\to\}$-формулы $A$, не представимой в виде $B \to B$ для некоторой формулы $B$, проблема* ***Ext*** *алгоритмически неразрешима для $\{\to\}$-исчисления $\{A\}$.*

Рассмотрим интуиционистское импликативное исчисление высказываний $\mathbf{Int}_{\{\to\}}$, которое задается следующими аксиомами [2, стр.69]:

$$
\begin{array}{ll}
(\mathrm{A}_1) & x \to (y \to x), \\
(\mathrm{A}_2) & (x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)).
\end{array}
$$

Классическое импликативное исчисление высказываний $\mathbf{Cl}_{\{\to\}}$ можно получить из $\mathbf{Int}_{\{\to\}}$ добавлением закона Пирса $((x \to y) \to x) \to x$ [12, стр.52]. Как показали Лукасевич [15] и Мередич [9], импликативные исчисления $\mathbf{Cl}_{\{\to\}}$ и $\mathbf{Int}_{\{\to\}}$ можно задать с помощью следующих аксиом:

$$
\begin{array}{r}
\mathbf{Cl}_{\{\to\}} \sim \{((x \to y) \to z) \to ((z \to x) \to (u \to x))\} \\
\mathbf{Int}_{\{\to\}} \sim \{((x \to y) \to z) \to (u \to ((y \to (z \to v)) \to (y \to v)))\}
\end{array}
$$

Поэтому верен следующий результат.

**Следствие.** ***Axm, Cmpl*** *алгоритмически неразрешимы для $\mathbf{Cl}_{\{\to\}}$ и* ***Ext*** *алгоритмически неразрешима для $\mathbf{Cl}_{\{\to\}}$ и $\mathbf{Int}_{\{\to\}}$.*

В 1930 году Тарский [12] доказал, что каждое пропозициональное исчисление, содержащее формулы $x \to (y \to x)$ и $x \to (y \to ((x \to (y \to z)) \to z))$, может быть аксиоматизировано с помощью одной формулы, поэтому в качестве следствия из теоремы Марчинковского имеем.

**Следствие.** *Для любого $\Sigma \supseteq \{\to\}$ проблема* ***Ext*** *алгоритмически неразрешима для любого $\Sigma$-исчисления $P_0 \geqslant \{x \to (y \to x),\ x \to (y \to ((x \to (y \to z)) \to z))\}$.*

В частности, это верно для любого исчисления $P_0 \geqslant \mathbf{Int}_{\{\to\}}$, так как формулы $x \to (y \to x)$ и $x \to (y \to ((x \to (y \to z)) \to z))$ выводимы в $\mathbf{Int}_{\{\to\}}$.

**Теорема 4** (Золин, 2013). *Для любого $\Sigma \supseteq \{\wedge, \to\}$ проблемы **Axm**, **Ext** и **Cmpl** алгоритмически неразрешимы для любого $\Sigma$-исчисления $P_0 \geqslant \mathbf{Int}_{\{\wedge,\to\}}$.*

Следующая теорема является главным результатом данной работы.

**Теорема 5.** *Для любого $\Sigma \supseteq \{\to\}$ выполнено*
(1) ***Ext*** *алгоритмически неразрешима для любого $\Sigma$-исчисления $P_0$;*
(2) ***Cmpl*** *алгоритмически неразрешима для любого $\Sigma$-исчисления $P_0 \geqslant \{x \to (y \to x)\}$.*

Как следствие проблема распознавания аксиоматизации алгоритмически неразрешима.

**Следствие.** *Для любого $\Sigma \supseteq \{\to\}$ проблема **Axm** алгоритмически неразрешима для любого $\Sigma$-исчисления $P_0 \geqslant \{x \to (y \to x)\}$.*

Более того, если взять $P_0 = \{A\}$ для произвольной $\Sigma$-формулы $A$, то алгоритмически неразрешимой окажется проблема выводимости.

**Следствие.** *Для любого $\Sigma \supseteq \{\to\}$ и любой $\Sigma$-формулы $A$ следующая проблема алгоритмически неразрешима:*

*дано $P$, требуется определить $P \vdash A$.*

В частности, это выполнено и для формулы $A$ вида $B \to B$ из теоремы Марчинковского.

## Список литературы


[1] Боков Г. В. Проблема полноты в исчислении высказываний // Интеллектуальные системы. — 2009. — Т. 13, вып. 1–4. — С. 165–181.

[2] Гильберт Д., Бернайс П. Логические исчисления и формализация арифметики. — М.: Наука, 1979.

[3] Кузнецов А. В. Неразрешимость общих проблем полноты, разрешимости и эквивалентности для исчислений высказываний // Алгебра и логика. — 1963. — Т. 2, № 4. — С. 47–66.

[4] Davis M. Computability & unsolvability. — McGraw-Hill, 1958.

[5] Gladstone M. D. Some Ways of Constructing a Propositional Calculus of Any Required Degree of Unsolvability // Transactions of the American Mathematical Society. — 1965. — Vol. 118. — P. 192–210.

[6] Kleene S. C. Mathematical Logic. — Dover Publications, 2002.

[7] Linial S., Post E. L. Recursive unsolvability of the deducibility, Tarski's comleteness, and independence of axioms problems of the propositional calculus // Bulletin of the American Mathematical Society. — 1949. — Vol. 55. — P. 50.

[8] Marcinkowski J. A Horn clause that implies an undecidable set of Horn clauses // Selected papers of the 7th Workshop on Computer Science Logic (CSL '93). — 1994. — Vol. 832. — P. 223–237.

[9] Meredith C. A single axiom of positive logic // Journal of Computing Systems. — 1953. — Vol. 1. — P. 169–170.

[10] Post E. L. Formal reduction of the general combinatorial decision problem // American Journal of Mathematics. — 1943. — Vol. 65. — P. 197–215.

[11] Sinaceur H. Address at the Princeton University bicentennial conference on problems of mathematics (December 17–19, 1946), by Alfred Tarski // Bulletin of Symbolic Logic. — 2000. — Vol. 6, no. 1. — P. 1–44.

[12] Tarski A., Corcoran J. Logic, Semantics, Metamathematics: Papers from 1923 to 1938. — Hackett Publishing Company, Inc., 1983.

[13] Yntema M. K. A detailed argument for the Post-Linial theorems // Notre Dame Journal of Formal Logic. — 1964. — Vol. 5, no. 1. — P. 37–50.

[14] Zolin E. Undecidability of the Problem of Recognizing Axiomatizations of Superintuitionistic Propositional Calculi // Studia Logica. — 2013. — P. 1–19.

[15] Łukasiewicz J. The shortest axiom of the implicational calculus of propositions // Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences. — 1948. — Vol. 52. — P. 25–33.