Итеративные пропозициональные исчисления

Г. В. Боков

В данной работе вводятся в рассмотрение итеративные пропозициональные исчисления, представляющие собой конечные множества пропозициональных формул вместе с операцией *modus ponens* и операцией суперпозиции, заданной множеством операций Мальцева. Для таких исчислений изучается вопрос разрешимости проблемы выразимости. В частности будет показано, что существуют неразрешимые итеративные исчисления. Будет предложен подход описания разрешимых итеративных исчислений, основанный на задании таких исчислений клонами k-значных логик. Кроме того, будет описана решетка клонов трёхзначной логики, порождающих итеративные исчисления, и доказана континуальность множества разрешимых итеративных исчислений.

Ключевые слова: итеративное пропозициональное исчисление, интерпретация, конечная модель, клоны трёхзначной логики.

1. Основные понятия

Пусть Σ — множество логических связок, $\mathcal{V}$ — счетное множество (пропозициональных) переменных. $\Phi_\Sigma(X)$ — множество (пропозициональных) формул над логическими связками Σ и множеством переменных $X \subseteq \mathcal{V}$. Положим $\Phi_\Sigma = \Phi_\Sigma(\mathcal{V})$.

Операции над формулами:

1) *Схемные*

$$F_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,F_m(x_1,\ldots,x_n) \;\vdash\; F_0(x_1,\ldots,x_n);$$

2) *Суперпозиция* (операции Мальцева)

$$F, G \ \vdash \ F(G).$$

Положим $[\mathcal{P}]$ — замыкание множества формул $\mathcal{P} \subseteq \Phi_\Sigma$ относительно схемных операций и суперпозиции. Замкнутые относительно оператора $[\cdot]$ множества формул будем называть *итеративными пропозициональными исчислениями.*

2. Неразрешимые итеративные исчисления

Рассмотрим проблему выразимости для итеративных исчислений, которая состоит в описании всех таких пар исчислений $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$, для которых $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2$.

Теорема 1. *Проблема выразимости для итеративных пропозициональных исчислений алгоритмически неразрешима.*

Исчисление $\mathcal{P}$ будем называть *разрешимым*, если существует алгоритм, который по произвольной формуле $F \in \Phi_\Sigma$ отвечает на вопрос: $F \in \mathcal{P}$? Как следствие из теоремы 1 получаем.

Следствие. *Существует неразрешимые итеративные пропозициональные исчисления.*

3. Разрешимые итеративные исчисления

Положим $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Обозначим через P_k^n множество всех функций k-значной логики от n переменных и через P_k — множество всех функций k-значной логики.

Всякое отображение $\varphi\colon \Sigma \to P_k$ множества логических связок Σ в множество функций k-значной логики будем называть *k-значной интерпретацией.* Каждой формуле $F \in \Phi_\Sigma$ в интерпретации φ соответствует некоторая функция из P_k, которую будем обозначать через φ_F.

Фиксируем некоторую интерпретацию φ. Каждой операции ω, заданной схемой

$$F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_m(x_1, \ldots, x_n) \ \vdash \ F_0(x_1, \ldots, x_n),$$

в интерпретации φ соответствует преобразование φ_ω на уровне функций

$$\varphi_{F_1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_{F_m}(x_1, \ldots, x_n) \ \vdash \ \varphi_{F_0}(x_1, \ldots, x_n).$$

Рассмотрим конечную алгебру $\langle E_k; \varphi; Q\rangle$ вместе с выделенным клоном операций $Q \subseteq P_k$. Будем говорить, что формула $F \in \Phi_\Sigma$ *истинна* в алгебре $\langle E_k; \varphi; Q\rangle$, если $\varphi_F \in Q$.

Пусть $\mathcal{P}$ — итеративное пропозициональное исчисление, замкнутое относительно схемных операций $\Omega = \{\omega_i\}_{i\in I}$. *Моделью* исчисления $\mathcal{P}$ будем называть всякую алгебру $\langle E_k; \varphi; Q\rangle$, для которой

1) все аксиомы $\mathcal{P}$ истинны в $\langle E_k; \varphi; Q\rangle$;
2) множество функций Q замкнуто относительно преобразований $\{\varphi_{\omega_i}\}_{i\in I}$, то есть для любой операции $\omega \in \Omega$ всякий раз, когда $\varphi_{F_i}(g_1, \ldots, g_n) \in Q$, $1 \leqslant i \leqslant m$, для некоторых $g_1, \ldots, g_n \in P_k$, результирующая функция $\varphi_{F_0}(g_1, \ldots, g_n) \in Q$.

Из определения модели следует, что всякая выводимая формула исчисления $\mathcal{P}$ истинна в любой модели $\mathcal{P}$.

Будем говорить, что исчисление $\mathcal{P}$ обладает *(конечным) модельным свойством*, если для любой формулы $F \notin [\mathcal{P}]$ существует модель $\langle E_k; \varphi; Q\rangle$ исчисления $\mathcal{P}$, в которой формула F ложна, то есть $\varphi_F \notin Q$.

Теорема 2. *Если исчисление $\mathcal{P}$ обладает конечным модельным свойством, то $\mathcal{P}$ разрешимо.*

Если фиксировать значность логики k и интерпретацию φ, то каждый клон $Q \in P_k$ однозначно задает множество формул $\mathcal{P}_Q$, истинных в модели $\langle E_k; \varphi; Q\rangle$. Если Q замкнуто относительно преобразований $\{\varphi_{\omega_i}\}_{i\in I}$, то непосредственно из определения модели следует, что $\mathcal{P}_Q$ замкнуто относительно схемных операций $\{\omega_i\}_{i\in I}$ и операции суперпозиции и, следовательно, является итеративным пропозициональным исчислением. Согласно теореме 2 имеем.

Следствие. *Каждый клон $Q \in P_k$, замкнутый относительно $\{\varphi_{\omega_i}\}_{i\in I}$, определяет разрешимое итеративное исчисление $\mathcal{P}_Q$, замкнутое относительно $\{\omega_i\}_{i\in I}$.*

Поэтому описание решетки клонов в P_k, замкнутых относительно схемных преобразований, позволяет описать часть решетки разрешимых итеративных исчислений.

4. Клоны, порождающие итеративные исчисления

Фиксируем значность логики k и интерпретацию φ. Пусть $\pi \subseteq E_k^n$ — l-местный предикат на множестве E_k. Будем говорить, что функция $f \in P_k^n$, где $n \geqslant 0$, *μ-сохраняет* предикат π, если для любых наборов $\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu \in E_k^{n \cdot l}$ таких, что $\alpha_i = (\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,n})$, $\alpha_{i,j} \in E_k^l$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, и $f(\alpha_i) \notin \pi$ для всех $i \in \{1, \ldots, \mu\}$, найдется такое $j \in \{1, \ldots, n\}$, для которого $\alpha_{i,j} \notin \pi$ для всех $i \in \{1, \ldots, \mu\}$. Множество всех таких функций обозначим через $T_{\pi,\mu}$

Рассмотрим схемную операцию ω

$$F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_m(x_1, \ldots, x_n) \ \vdash \ F_0(x_1, \ldots, x_n)$$

и ее представление φ_ω в интерпретации φ

$$\varphi_{F_1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_{F_m}(x_1, \ldots, x_n) \ \vdash \ \varphi_{F_0}(x_1, \ldots, x_n).$$

Будем говорить, что операция ω *μ-сохраняет* предикат π, если для любых наборов $\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu \in E_k^{n \cdot l}$ таких, что $\alpha_i = (\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,n})$, $\alpha_{i,j} \in E_k^l$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, и $\varphi_{F_0}(\alpha_i) \notin \pi$ для всех $i \in \{1, \ldots, \mu\}$, найдется такое $j \in \{1, \ldots, m\}$, для которого $\varphi_{F_j}(\alpha_i) \notin \pi$ для всех $i \in \{1, \ldots, \mu\}$. Множество всех таких операций обозначим через $O_{\pi,\mu}$

Теорема 3. *Если $\{\omega_i\}_{i \in I} \subseteq O_{\pi,\mu}$, то клон $T_{\pi,\mu'}$ замкнут относительно преобразований $\{\varphi_{\omega_i}\}_{i \in I}$ для любого $\mu' \leqslant \mu$.*

Как следствие из теоремы 3 имеем.

Следствие. *Каждый клон $T_{\pi,\mu}$ определяет итеративное исчисление, замкнутое относительно операций $O_{\pi,\mu'}$, $\mu' \geqslant \mu$.*

Простейшими примерами клонов $T_{\pi,\mu}$ являются классы функций двузначной логики, обладающие свойством A_μ. В этом случае предикат π является константой 1. Такие клоны замкнуты относительно преобразований:

$$x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n, y) \vdash y,$$

где f — функция обладающая свойством A_∞. Следовательно, они являются моделями для итеративных пропозициональных исчислений с операцией суперпозиции и схемными операциями данного вида. В частности, они являются моделями для итеративных исчислений с операцией *modus ponens*

$$x_1,\ x_1 \to x_2 \vdash x_2.$$

Ниже приводится описание решётки клонов $T_{2,\mu}$ в трёхзначной логике, μ-сохраняющих константу 2. Как следствие из описания решётки будет установлена континуальность множества всех разрешимых итеративных исчислений.

5. Решетка клонов трёхзначной логики, порождающая итеративные исчисления

Определим следующие предикаты, которые понадобятся для формулировки результата:

$$\begin{aligned}
\rho_{\vee,n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1 &\rightleftharpoons x_1=2\vee x_2=2\vee\ldots\vee x_n=2\\
\rho_{\to,n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1 &\rightleftharpoons x_1\neq 2\vee x_2=2\vee\ldots\vee x_n=2\\
\rho_{=,n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1 &\rightleftharpoons x_1=x_2\vee x_3=2\vee\ldots\vee x_n=2\\
\rho_{\simeq,n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1 &\rightleftharpoons x_1=x_2\vee x_1=2\vee x_2=2\vee\ldots\vee x_n=2
\end{aligned}$$

Введем обозначения для следующих классов функций:

$$\begin{array}{rclrcl}
\mathbf{P_3} &=& \mathrm{Pol}\,(\varnothing)\,, && & \\
\mathbf{T} &=& \mathrm{Pol}\,((2))\,, & \mathbf{F} &=& \mathrm{Pol}\,((0,1))\,,\\
\mathbf{M} &=& \mathrm{Pol}\,(\rho_{\sim})\,, & \mathbf{M_{01}} &=& \mathrm{Pol}\,(\rho_{\to,2})\,,\\
\mathbf{T_n} &=& \mathrm{Pol}\,(\rho_{\vee,n})\,, & \mathbf{T_\infty} &=& \mathrm{Pol}\left(\bigcup_{n\geqslant 2}\rho_{\vee,n}\right),\\
\mathbf{E} &=& \mathrm{Pol}\,(\rho_{\simeq,2}) & \mathbf{E_\infty} &=& \mathrm{Pol}\left(\bigcup_{n\geqslant 2}\rho_{\simeq,n}\right),\\
\mathbf{I} &=& \mathrm{Pol}\,(\rho_{=,3})\,, & \mathbf{S} &=& \mathrm{Pol}\,(\rho_{\to,3})\,.
\end{array}$$

Пересечение замкнутых классов Q_1, Q_2 будем обозначать через Q_1Q_2. Например,

$$\mathbf{T_\infty F M_{01}} = \mathbf{T_\infty}\cap\mathbf{F}\cap\mathbf{M_{01}}.$$

Определим семейство Θ, состоящее из всевозможных пересечений замкнутых классов

$$\mathbf{P_3},\ \mathbf{T},\ \mathbf{F},\ \mathbf{M_{01}},\ \mathbf{T_n},\ \mathbf{T}_\infty,\ \mathbf{E},\ \mathbf{E}_\infty,\ \mathbf{I},\ \mathbf{S}$$

а также замкнутых классов, задаваемых множествами предикатов $\rho_{\simeq,n}$ для произвольных $n \geqslant 2$.

Теорема 4. *Множество Θ состоит из всех замкнутых классов функций в P_3, содержащих функцию*

$$f_{2,\max}(x,y) = \begin{cases} 2, & x = 2 \vee y = 2; \\ x|y, & \textit{иначе.} \end{cases}$$

На рис. 1 схематично изображена решетка замкнутых классов семейства Θ. Решетка представляет собой граф, вершинам которого соответствуют замкнутые классы семейства Θ. Две вершины графа Q_1 и Q_2 соединены сплошным ребром, причем вершина Q_1 расположена ниже Q_2, всякий раз, когда замкнутый класс Q_1 является предполным в Q_2. Две вершины графа Q_1 и Q_2 соединены пунктирным ребром, причем вершина Q_1 расположена ниже Q_2, всякий раз, когда $Q_1 \subseteq Q_2$ и существует бесконечная последовательность различных замкнутых классов $M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \ldots$, для которых выполнены следующие условия:

1) $Q_2 \supseteq M_1$;
2) $\bigcap_{i\geqslant 1} M_i = Q_1$;
3) M_{i+1} — предполный класс в M_i для любого $i \geqslant 1$.

Две вершины графа Q_1 и Q_2 соединены пунктирным ребром, помещенным в пунктирный эллипс, причем вершина Q_1 расположена ниже Q_2, всякий раз, когда существует континуум замкнутых классов Q, которые удовлетворяют условиям:

$$Q_1 \subseteq Q \subseteq Q_2.$$

Теорема 5. *Замкнутые классы семейства Θ, которые содержат $E_\infty T_\infty F$, определяют итеративные исчисления, замкнутые относительно операции modus ponens.*

Как следствие из описания надрешетки замкнутого класса $E_\infty T_\infty F$ имеем.

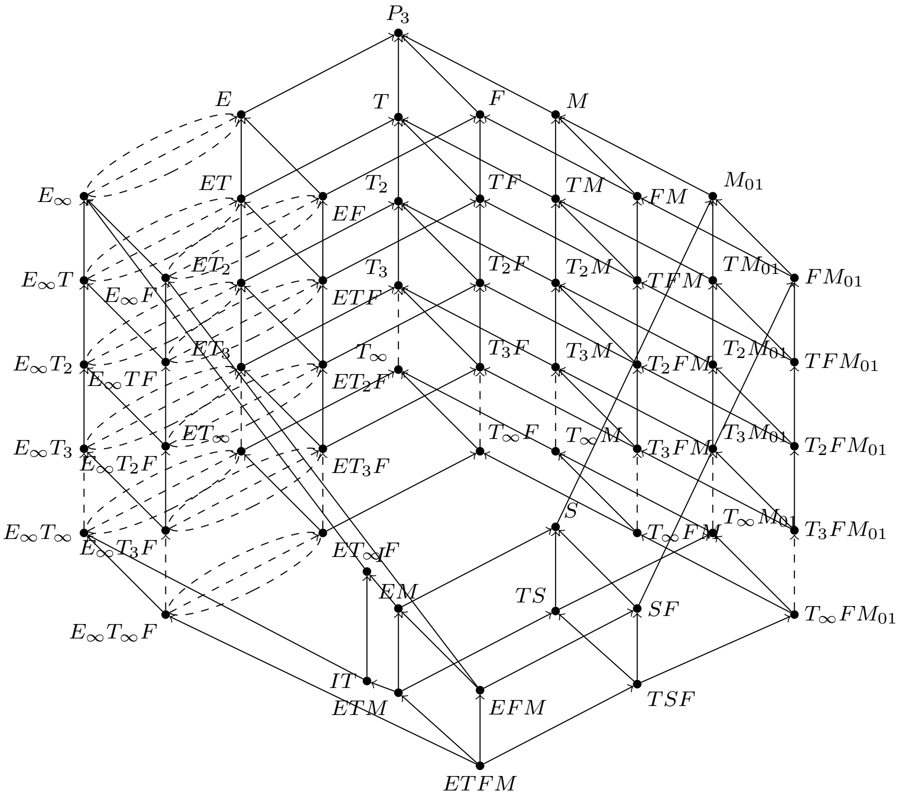

Рис. 1. Надрешётка $ETFM$.

Следствие. *Множество разрешимых итеративных исчислений имеет мощность континуума.*

Список литературы

[1] Кудрявцев В. Б. Функциональные системы. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982.

[2] Новиков П. С. Элементы математической логики. — М.: Наука, 1973.

[3] Шенфилд Д. Математическая логика. — М.: Наука, 1975. — С. 314–323.

[4] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986.