Математическое моделирование субъективных суждений в теории измерительно-вычислительных систем

Д. А. Балакин, Б. И. Волков, Т. Г. Еленина,
А. С. Кузнецов, Ю. П. Пытьев

Рассмотрены методы моделирования неполного и недостоверного знания модели $M(x)$ объекта, зависящей от неизвестного $x \in X$, выраженного в форме субъективных суждений исследователя. Математическая модель субъективных суждений определена как неопределенный элемент $\widetilde{x}$, канонический для пространства $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ с мерами правдоподобия и доверия, который характеризует субъективные суждения исследователя об истинности каждого значения $x \in X$ значениями правдоподобия $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ равенства $\widetilde{x} = x$ и доверия $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$ неравенства $\widetilde{x} \neq x$. Приведены примеры исследования неопределенных моделей измерительно-вычислительного преобразователя, радиозондирования ионосферы и маятника Максвелла.

Ключевые слова: субъективные суждения, правдоподобие, доверие, интеграл, мера, случайный неопределенный элемент, интеллектуальный диалог, измерительно-вычислительные системы.

Предисловие

Согласно точке зрения на математическое моделирование как на информационную технологию получения новых знаний непременным требованием к математической модели объекта исследования является ее адекватность цели исследования. Это означает, что его математическая модель должна обеспечивать достаточно точное прогнозирование результатов измерений **свойств** объекта при контролируемых условиях выполнения измерительного эксперимента, которым при измерениях должен удовлетворять объект исследования (если это является целью исследования), и/или модель должна на основе данных измерительного эксперимента с требуемой точностью позволять оценивать значения указанных модельером-исследователем (м.-и.) характеристик объекта, причем — не измеряемого объекта, характеристики которого искажены в измерительном эксперименте, а объекта исследуемого, **свойства которого не искажены** процессом измерения (если это является целью исследования) [1].

Разумеется, для построения такой модели м.-и. должен использовать все доступные ему формализованные знания из соответствующей предметной области. Но неформализованные, неполные и недостоверные знания м.-и., свой научный опыт и интуицию м.-и. учесть при построении модели непросто.

Эту ситуацию достаточно точно отражают следующие цитаты из [2]:

> «Как известно, наука и техника до сих пор отвергают субъективизм, хотя хорошо известен и тот факт, что новые открытия и изобретения, как правило, — результат деятельности правого полушария (головного мозга), основанной на субъективном опыте и интуиции учёного, а объективизация и логическое обоснование — результат деятельности левого полушария, определяющей вторичные, вспомогательные средства передачи идеи людям... Более того, известно, что и в процессе объективизации субъективных соображений правое полушарие играет важную роль.»

и [3]:

> «Вопрос „какова наилучшая мера неопределённости, неясности и неточности“ на сегодня остаётся без убедительного ответа и ждёт серьёзного обсуждения.».

Обе цитаты актуальны и в настоящее время. Более того, следует добавить, что в научной, технической и прочей исследовательской и творческой деятельности невозможно исключить использование неполной, недостоверной и противоречивой информации, в том числе — выраженной в форме субъективных суждений.

В настоящей работе, следуя [4], рассмотрены методы математического моделирования подобной **неформализованной** информации, выраженной в форме субъективных суждений. Приведены элементы теории мер правдоподобия $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$, доверия $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$ и интегрирования относительно этих мер как математической основы моделирования субъективных суждений. Рассмотрено понятие неопределенного элемента $\widetilde{x}$, моделирующего, как неопределенная высказывательная переменная, субъективные суждения м.-и. о возможных значениях неизвестного параметра $x \in X$ модели $M(x)$ объекта исследования и их модальности значениями мер правдоподобия $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} = x)$ истинности равенства $\widetilde{x} = x$ и доверия $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \neq x)$ истинности неравенства $\widetilde{x} \neq x$. Пространство $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ с мерами правдоподобия и доверия определяет математическую модель «интеллектуального диалога» исследователя с моделью $M(x)$ объекта исследования, в которой значение параметра $x \in X$ неизвестно, позволяющую вычислить правдоподобие и доверие истинности любых суждений м.-и. о любых свойствах объекта исследования, обусловленных его моделью $M(x)$, $x \in X$, [4]. Рассмотрена компьютерная реализация «интеллектуального диалога» исследователя с моделью измерительно-вычислительного преобразователя первого порядка.

1. Альтернативные методы моделирования субъективных суждений

1.1. Байесовский подход

В байесовском подходе [5, 6] задается априорное распределение вероятности $\mathrm{Pr}^{\widetilde{x}}(\cdot)$ неизвестного параметра $\widetilde{x}$, принимающий значения в множестве X. Значения плотности $\mathrm{pr}^{\widetilde{x}}(\cdot)$ этого распределения относительно меры $\mu(\cdot)$, определенной на σ-алгебре подмножеств X, интерпретируются как степени уверенности в истинности значений параметра. Это распределение затем уточняется по результатам наблюдений при помощи формулы Байеса. Случай полного незнания моделируется одним из следующих способов:

- на основе принципа недостаточного основания — равномерным распределением вероятности, которое может быть ненормируемым в случае бесконечного множества элементарных событий,

- на основе принципа максимальной энтропии [7] — таким распределением вероятности $\mathrm{Pr}_H^{\widetilde{x}}(\cdot)$, плотность $\mathrm{pr}_H^{\widetilde{x}}(\cdot)$ которого есть $\underset{\mathrm{pr}(\cdot)}{\mathrm{argmax}}(-\int\limits_X \mathrm{pr}(x)\ln \mathrm{pr}(x)\mu(dx))$,

- априорным распределением Джеффриса [8]: пусть экспериментально наблюдается случайная величина η, переходное распределение которой зависит от значения x параметра $\widetilde{x}$, тогда распределением Джеффриса $\mathrm{Pr}_J^{\widetilde{x}}(\cdot)$ является такое распределение, что $\forall x \in X\, \mathrm{pr}_J^{\widetilde{x}}(x) \propto \sqrt{\det \mathcal{I}_\eta(x)}$, где $\mathcal{I}_\eta(\cdot)$ — информация Фишера для η. Это распределение может быть ненормируемым.

Моделью полного знания является такое распределение вероятности, что истинное значение параметра имеет единичную вероятность.

Эмпирическое восстановление модели неизвестного параметра по результатам наблюдений осуществляется при помощи формулы Байеса, в которой в качестве априорного распределения берется модель полного незнания. Согласие модели с данными наблюдений характеризуется значением плотности вероятности полученных результатов наблюдений: чем она больше, тем больше данные наблюдений подтверждают модель.

Недостатком этого подхода является проблема выбора априорного распределения (часто семейство распределений выбирается из соображений удобства вычислений — принадлежащим к семейству распределений, сопряженных семейству переходных распределений наблюдаемой случайной величины), особенно неинформативного априорного распределения: распределение значений биективной функции от неизвестного параметра с равномерным распределением, вообще говоря, не является равномерным, то есть следствие модели полного незнания — не модель полного незнания. Априорное распределение вероятности Джеффриса свободно от этого недостатка, но существенно зависит от распределения переходной вероятности наблюдаемой случайной величины, поэтому, например, при наблюдении двух взаимно независимых случайных величин η_1, η_2, переходные распределения которых различны и зависят от параметра $\widetilde{x}$, о котором нет априорной информации, апостериорное распределение $\widetilde{x}$ будет зависеть от порядка учета наблюдений.

1.2. Теория Демпстера – Шеффера

В теории Демпстера – Шеффера [9] неопределенная величина характеризуется весовой функцией $m(\cdot) : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$, $\sum\limits_{A\subset X} m(A) = 1$, по которой определяются (внутренняя) мера доверия Bel (как сумма весов подмножеств рассматриваемого множества) и (внешняя) мера правдоподобия Pl (как сумма весов всех множеств, пересекающихся с рассматриваемым). Величина $m(A)$, $A \in \mathcal{P}(A)$, интерпретируется как уверенность в том, что неопределенная величина $\widetilde{x}$ принадлежит A, при отсутствии уверенности в принадлежности $\widetilde{x}$ какому-либо из подмножеств A, $\mathrm{Bel}(A)$ — как уверенность в том, что $\widetilde{x} \in A$ с учетом подмножеств A, $\mathrm{Pl}(A)$ — как степень сомнения в том, что $\widetilde{x} \notin A$ ($\mathrm{Bel}(A) \leqslant \mathrm{Pl}(A)$).

Полное незнание моделируется весовой функцией, значение которой есть 1 для всего множества элементарных событий и 0 для его непустых собственных подмножеств, при этом для любого собственного подмножества множества элементарных событий его доверие и правдоподобие равны соответственно 0 и 1. Полное знание моделируется весовой функцией, значение которой есть 1 для истинного значения параметра и 0 для любого другого события.

Недостатком этого метода является правило комбинирования весовых функций, полученных от разных экспертов, приводящее к нелогичным результатам при значительном противоречии мнений экспертов [10]: если множество элементарных событий $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, согласно первому эксперту $m_1(\{x_1\}) = \epsilon_1$, $m_1(\{x_2\}) = 1 - \epsilon_1$, $\epsilon_1 \in (0,1)$, $m_1(A) = 0$ для $\forall A \in \mathcal{P}(X) : A \neq \{x_1\}, A \neq \{x_2\}$, согласно второму эксперту $m_2(\{x_1\}) = \epsilon_2$, $m_2(\{x_3\}) = 1 - \epsilon_2$, $\epsilon_2 \in (0,1)$, $m_1(A) = 0$ для $\forall A \in \mathcal{P}(X) : A \neq \{x_1\}, A \neq \{x_3\}$, то для комбинированной массовой функции $m_{12}(\{x_1\}) = 1$, $m_{12}(A) = 0$, $\forall A \in \mathcal{P}(X) : A \neq \{x_1\}$. Кроме этого, в [11] показано, что базовые постулаты теории Демпстера – Шеффера на самом деле противоречивы, а также предлагается вариант «спасения» теории, но этот вариант неприменим, если пересечение носителей переходных распределений вероятностей наблюдаемой случайной величины является неограниченным. Существуют и другие правила комбинирования весовых функций (например, правило Ягера [12], правило Инагаки [13], правила Дюбуа и Прада [14]), применимость которых зависит от требуемых свойств операции комбинирования. **В** [15] приведен способ комбинирования весовых функций, объединяющий различные правила комбинирования, но для применения этого способа требуется дополнительная информация (в частности, о надежности источников весовых функций), которая фактически также субъективна, но не моделируется как субъективная.

Способ эмпирического восстановления модели неизвестного параметра зависит от правила комбинирования весовых функций [16], поскольку для любого разбиения множества всех данных наблюдений весовая функция, соответствующая этому множеству, должна быть результатом комбинирования весовых функций, соответствующих элементам разбиения. В частности, описанный в [11] способ эмпирического восстановления модели неприменим, если пересечение носителей переходных распределений вероятностей наблюдаемой случайной величины является неограниченным. Согласие модели с данными наблюдений характеризуется значениями меры доверия и меры правдоподобия данных наблюдений, причем чем больше значение меры доверия, тем больше данные наблюдений свидетельствуют в пользу модели, чем меньше значение меры правдоподобия, тем больше данные наблюдений свидетельствуют против модели.

1.3. Субъективная логика

В субъективной логике [17, 18, 19] для каждого события $A \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing, X\}$ задается его субъективный вес $b(A)$, интерпретируемый как уверенность в принадлежности значения x неизвестного параметра $\widetilde{x}$ множеству A при отсутствии знаний о принадлежности x какому-либо из собственных подмножеств A, для элементарных событий $x' \in X$ задаются их базовые частоты $a(x')$, а также задается общий для всех элементарных событий вес неопределенности u, интерпретируемый как степень незнания о принадлежности значения $\widetilde{x}$ какому-либо из подмножеств X, сумма весов всех событий и веса неопределенности равна единице, сумма базовых частот равна единице.

Полное незнание моделируется нулевыми весами событий, единичным весом неопределенности и равными друг другу базовыми частотами. Полное знание моделируется равными единице субъективным весом и базовой частотой истинного значения параметра, нулевыми субъективными весами других событий, нулевыми базовыми частотами других значений параметра и нулевым весом неопределенности.

Согласие модели с данными наблюдений характеризуется значением субъективного веса данных наблюдений, причем чем больше субъективный вес, тем больше данные наблюдений свидетельствуют в пользу модели.

Недостатки: описанное в [18] правило комбинирования мнений и соответствующий способ эмпирического восстановления модели по данным наблюдений основаны на соответствии между субъективными весами и распределениями байесовской вероятности и поэтому зависит от выбора семейства байесовских вероятностей. При формировании субъективного мнения исследователя с помощью субъективного мнения эксперта результат зависит от того, как интерпретируется недоверие к эксперту: как неопределенность, как дезинформация или как соотношение неопределенности и дезинформации, определяемое базовой вероятностью правоты эксперта. Рассматриваются только конечные множества элементарных событий.

Общий недостаток, присущий подходам, моделирующим субъективное знание распределением вероятности или распределением интервальной оценки вероятности — трудность точной формализации знаний эксперта в случае субъективных вероятностей, отличных от 0 и 1. Теоретически можно оценить субъективную вероятность события, соответствующую знанию исследователя, сколь угодно точно даже если она не равна 0 или 1 (например, бинарным поиском, рассматривая две игры, в первой из которых выигрыш происходит, если происходит событие $A \subset X$, а во второй — если происходит случайное событие с вероятностью pr, если обе игры одинаково предпочтительны для исследователя, то $\mathrm{Pr}^{\widetilde{x}}(A) = pr$), но практически для достаточно короткого интервала значений вероятности альтернативы будут неразличимы для исследователя, поэтому интервальная оценка кажется более соответствующей знаниям исследователя. Но он может сомневаться и в том, входит ли значение вероятности в выбранный им интервал, границы которого, таким образом, также оказываются размытыми, и так далее.

1.4. Нечеткая модальная логика

В нечеткой модальной логике [20, 21] истинность высказываний принимает значения, принадлежащие некоторой фиксированной полной решетке $(\mathcal{B}, \leqslant)$, $0 \stackrel{\text{def}}{=} \inf \mathcal{B}$, $1 \stackrel{\text{def}}{=} \sup \mathcal{B}$, в которой для $\forall a, b \in \mathcal{B}$ определен элемент $a \to b$, для которого $\forall c \in \mathcal{B}\ c \leqslant (a \to b) \Leftrightarrow \min(a, c) \leqslant b$ и который может интерпретироваться как мера истинности высказывания «$a \leqslant b$», и вводится модальный оператор $\Box$, для которого формула $\Box_a A$ может, например, интерпретироваться как высказывание «мера убедительности факта, выражаемого формулой A, равна a». Случай полного незнания моделируется такой оценкой элементарных высказываний, для которой $\Box_0 A_x$ истинно в нечеткой модели для всех высказываний $A_x = \bigwedge\limits_{x' \in X : x' \neq x} x'$, где X — множество элементарных высказываний. Недостатком этого метода является отсутствие способа эмпирического восстановления истинностей элементарных высказываний по данным экспериментальных наблюдений и способа комбинирования субъективных знаний, полученных из разных источников — рассматривается только определение истинности высказываний, если истинности всех элементарных высказываний уже оценены.

2. Меры правдоподобия и доверия, интегралы и их свойства

В настоящей работе используется способ формализации учета неопределенной и субъективной информации, предложенный в [4], который позволяет решить все вопросы, связанные с методами математического моделирования субъективных суждений, в частности:

- модель «полного незнания» свойств модели объекта исследования универсальна, в частности, не зависит от модели измерений и от мощности множества элементарных событий (как и в теории Демпстера–Шеффера [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15], субъективной логике [17, 18, 19] и нечеткой модальной логике [20, 21] в отличие от байесовского подхода [5, 6, 7, 8]), и модель любого следствия модели «полного незнания» является моделью «полного незнания»;
- модель «полного знания» свойств модели объекта исследования и модель любого следствия модели «полного знания» является моделью «полного знания» (выполняется для всех рассмотренных методов моделирования субъективных суждений);

- содержит методы эмпирического оценивания и эмпирической верификации модели субъективных суждений, предложенной исследователем (как и байесовский подход [5, 6, 7, 8], теория Демпстера–Шеффера [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15], субъективная логика [17, 18, 19] в отличие от нечеткой модальной логики [20, 21]);
- для формулировки модели субъективных суждений исследователю достаточно упорядочить правдоподобия элементарных событий, а не численно оценить их (в отличие от остальных рассмотренных методов, кроме нечеткой модальной логики [20, 21]).

Следуя работе [4], рассмотрим методы математического моделирования неполного и недостоверного знания модели $M(x)$ объекта исследования, выраженного в форме субъективных суждений м.-и. о возможных значениях неизвестного параметра $x \in X$. Математическая модель субъективных суждений м.-и. и их модальностей определена в [4] как пространство $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ с мерами правдоподобия $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\cdot) : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{L}$ и доверия $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\cdot) : \mathcal{P}(X) \to \widehat{\mathcal{L}}$, в котором X — множество возможных значений параметра x модели $M(x)$, $\mathcal{P}(X)$ — класс всех подмножеств X, $\widetilde{x}$ — неопределенный элемент (н.э.) со значениями в X, моделирующий неизвестный параметр $x \in X$, меры $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$ характеризуют модальности субъективных суждений м.-и. об истинности каждого значения $x \in X$ параметра $M(x)$ их значениями $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} = x)$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \neq x)$, $x \in X$, $\mathcal{L} = ([0,1], \leqslant, +, \times)$, $\widehat{\mathcal{L}} = ([0,1], \widehat{\leqslant}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ суть шкалы значений мер $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$, в которых операции сложения $+$, $\widehat{+}$ и умножения $\times$, $\widehat{\times}$ определены согласно равенствам $a + b = \max\{a, b\}$, $a \widehat{+} b = \min\{a, b\}$, $a \times b = \min\{a, b\}$, $a \widehat{\times} b = \max\{a, b\}$, и неравенство $a \leqslant b$ эквивалентно $b \widehat{\leqslant} a$, $a, b \in [0, 1]$. Для любого $E \in \mathcal{P}(X)$ меры $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$, $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$ определены равенствами

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(E) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in E) = \sup_{x \in E} t^{\widetilde{x}}(x),\ E \neq \varnothing; \quad \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\varnothing) \stackrel{\text{def}}{=} 0, \\
\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(E) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in E) = \inf_{x \in X \setminus E} \widehat{t}^{\widetilde{x}}(x),\ E \neq X; \quad \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(X) \stackrel{\text{def}}{=} 1,
\end{aligned} \tag{1}
$$

где

$$
t^{\widetilde{x}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} = x), \quad \widehat{t}^{\widetilde{x}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \neq x), \quad x \in X. \tag{2}
$$

Функции $t^{\widetilde{x}}(\cdot) : X \to \mathcal{L}$ и $\widehat{t^{\widetilde{x}}}(\cdot) : X \to \widehat{\mathcal{L}}$ называются распределениями правдоподобий и доверий значений $\widetilde{x}$, их значения $t^{\widetilde{x}}(x)$ и $\widehat{t^{\widetilde{x}}}(x)$ определяют правдоподобие истинности равенства $\widetilde{x} = x$ и соответственно доверие истинности неравенства $\widetilde{x} \neq x$, $x \in X$, значения $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(E)$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(E)$ суть правдоподобие и доверие истинности включения $\widetilde{x} \in E \in \mathcal{P}(X)$. Пространство $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$, в свою очередь, вполне характеризует н.э. $\widetilde{x}$ и далее называется его моделью.

2.1. Свойства мер $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$, $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$ и шкал $\mathcal{L}$ и $\widehat{\mathcal{L}}$ их значений

Определения (1), (2) и их содержательная интерпретация суть следствия того, что м.-и., основываясь на своих, как правило, ассоциативных, интуитивных и других неполных и недостоверных знаниях свойств объекта исследования, *может предложить* модель $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ н.э. $\widetilde{x}$, указав в (2), насколько, по его мнению, относительно правдоподобны равенства $\widetilde{x} = x$, $x \in X$, и насколько следует относительно доверять неравенствам $\widetilde{x} \neq x$, $x \in X$, где «относительно» означает, что [4]

1) *численные значения мер* $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(E)$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(E)$, $E \in \mathcal{P}(X)$, в (1), отличные от нуля и единицы, не могут быть содержательно истолкованы, а существенна лишь их упорядоченность;
2) меры $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и $\mathrm{Pl}'^{\widetilde{x}}$ ($\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$ и $\mathrm{Bel}'^{\widetilde{x}}$) считаются эквивалентными, если существует функция $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ такая, что для всех $E \in \mathcal{P}(X)$ $\gamma(\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(E)) = \mathrm{Pl}'^{\widetilde{x}}(E)$ (существует функция $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ такая, что для всех $E \in \mathcal{P}(X)$ $\gamma(\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(E)) = \mathrm{Bel}'^{\widetilde{x}}(E)$), где Γ — класс непрерывных, строго монотонных функций $\gamma(\cdot) : [0,1] \to [0,1]$, $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$, образующих группу относительно групповой операции «$\circ$», $(\gamma \circ \gamma')(a) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \gamma(\gamma'(a))$, $a \in [0,1]$. В частности, если $\gamma \circ \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(E) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \gamma(\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(E))$, $E \in \mathcal{P}(X)$, $(\gamma \circ \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(E) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \gamma(\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(E))$, $E \in \mathcal{P}(X))$, то меры $\gamma \circ \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$, $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ ($\gamma \circ \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$, $\gamma(\cdot) \in \Gamma$) *взаимно* эквивалентны, каждая определяет вариант меры правдоподобия (доверия), каждое из *взаимно* эквивалентных распределений $\gamma \circ t^{\widetilde{x}}$, $\gamma(\cdot) \in \Gamma$, правдоподобий (доверий $\gamma \circ \widehat{t^{\widetilde{x}}}$, $\gamma(\cdot) \in \Gamma$) значений $\widetilde{x}$ определяет вариант распределения правдоподобий (доверий).

Условия 1), 2) в терминах свойств шкал $\mathcal{L}$ и $\widehat{\mathcal{L}}$ означают, что класс Γ функций $\gamma(\cdot) : [0,1] \to [0,1]$:

1) *определяет группу* $\overline{\Gamma}$ *автоморфизмов* $\gamma : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ и $\gamma : \widehat{\mathcal{L}} \to \widehat{\mathcal{L}}$, $\gamma \in \overline{\Gamma}$, шкал $\mathcal{L} = ([0,1], \leqslant, +, \times)$ и $\widehat{\mathcal{L}} = ([0,1], \widehat{\leqslant}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ значений мер $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\cdot) : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{L}$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\cdot) : \mathcal{P}(X) \to \widehat{\mathcal{L}}$. Это означает, что $\forall\, \gamma(\cdot) \in \Gamma\ \gamma([0,1]) = [0,1]$, $\forall\, a, b \in [0,1]\ \gamma(a * b) = \gamma(a) * \gamma(b)$, где $*$ — символ любой из бинарных операций: сложения $+$, $\widehat{+}$ и умножения $\times$, $\widehat{\times}$, и для бинарных отношений $\leqslant$, $\widehat{\leqslant}$: $a \leqslant b \Leftrightarrow \gamma(a) \leqslant \gamma(b)$, $a \,\widehat{\leqslant}\, b \Leftrightarrow \gamma(a) \widehat{\leqslant} \gamma(b)$. *Из этого и требований: непрерывности операций* $* : [0,1]^2 \to [0,1]$, *их коммутативности, эквивалентности* $a \leqslant b \Leftrightarrow b \widehat{\leqslant} a$, $a, b \in [0,1]$, *и свойств* 0 *и* 1*:* $a + 0 = a \widehat{\times} 0 = a \times 1 = a \widehat{+} 1 = a\ a + 1 = a \widehat{\times} 1 = 1$, $a \times 0 = a \widehat{+} 0 = 0$, $a \in [0,1]$ *следуют равенства* $a + b = a \widehat{\times} b = \max\{a, b\} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max(a, b)$, $a \times b = a \widehat{+} b = \min\{a, b\} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \min(a, b)$, $a, b \in [0,1]$ [4];

2) *определяет группу изоморфизмов*, обозначим и ее $\overline{\Gamma}$, $\gamma : \mathcal{L} \to \gamma\mathcal{L}$, $\gamma : \widehat{\mathcal{L}} \to \gamma\widehat{\mathcal{L}}$, $\gamma \in \overline{\Gamma}$. Это означает, что $\forall\, \gamma(\cdot) \in \Gamma\ \forall a \in \mathcal{L}, \widehat{\mathcal{L}} \Rightarrow \gamma(a) \in \gamma\mathcal{L}, \gamma\widehat{\mathcal{L}}$, *определены* бинарные операции $*$ и бинарные отношения $\leqslant, \widehat{\leqslant}$ в шкалах $\gamma\mathcal{L}$ и $\gamma\widehat{\mathcal{L}}$, изоморфных $\mathcal{L}$ и $\widehat{\mathcal{L}}$: $a * b \Rightarrow \gamma(a * b) = \gamma(a) * \gamma(b)$, $a \leqslant b \Leftrightarrow \gamma(a) \leqslant \gamma(b)$, $a \widehat{\leqslant} b \Leftrightarrow \gamma(a) \widehat{\leqslant} \gamma(b)$, $a, b \in [0,1]$; здесь и далее символы $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$ означают «влечет» и «эквивалентно».

В терминах операций сложения в шкалах $\mathcal{L}$ и $\widehat{\mathcal{L}}$ в равенствах (1) $\forall E \in \mathcal{P}(X)$

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(E) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in E) = \mathop{+}_{x \in E} t^{\widetilde{x}}(x), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\varnothing) = \mathop{+}_{x \in \varnothing} t^{\widetilde{x}}(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 0,$$

$$\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(E) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in E) = \mathop{\widehat{+}}_{x \in X \setminus E} \widehat{t}^{\widetilde{x}}(x), \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(X) = \mathop{\widehat{+}}_{x \in \varnothing} \widehat{t}^{\widetilde{x}}(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 1,$$

причем для $E = X$ и $E = \varnothing$ принимаются не зависящие от выбора шкал $\gamma\mathcal{L}$ и $\gamma\widehat{\mathcal{L}}$, $\gamma \in \overline{\Gamma}$, условия нормировки:

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(X) = \mathop{+}_{x \in X} t^{\widetilde{x}}(x) = 1,\ \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\varnothing) = \mathop{\widehat{+}}_{x \in X} \widehat{t}^{\widetilde{x}}(x) = 0, \tag{3}$$

в случае конечного X означающие, что среди значений $x \in X$ есть истинное.

2.2. Интегрирование относительно мер правдоподобия Pl и доверия Bel

Рассмотрим, следуя [4], конструкции pl- и bel-интегралов, согласованных соответственно с мерами Pl и Bel, позволяющие получить определения (1), (2), (3) как следствия. Обозначим $\mathcal{L}(X)$ ($\widehat{\mathcal{L}}(X)$) — класс функций $g(\cdot) : X \to [0,1]$($\widehat{g}(\cdot) : X \to [0,1]$) с операциями $(g_1 * g_2)(x) = g_1(x) * g_2(x)$ ($(\widehat{g_1}\widehat{*}\widehat{g_2})(x) = \widehat{g_1}(x)\widehat{*}\widehat{g_2}(x)$), $x \in X$, $* \in \{+, \times\}$($\widehat{*} \in \{\widehat{+}, \widehat{\times}\}$). Факт включения $g(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ ($g(\cdot) \in \widehat{\mathcal{L}}(X)$) обозначим как $g(\cdot) : X \to \mathcal{L}$ ($\widehat{g}(\cdot) : X \to \widehat{\mathcal{L}}$). Далее $\mathcal{L}(X)$ и $\widehat{\mathcal{L}}(X)$ суть классы *всех* функций с операциями сложения и умножения $+$, $\times$ и $\widehat{+}$, $\widehat{\times}$ и отношениями $\leqslant$ и $\widehat{\leqslant}$ соответственно.

Определение 1. Назовем pl-(bel-) интегралом функцию $\mathrm{pl}(\cdot) : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$ ($\mathrm{bel}(\cdot) : \widehat{\mathcal{L}}(X) \to \widehat{\mathcal{L}}$),

- однородную: $\forall a \in [0,1]$, $\forall g(\cdot) : X \to \mathcal{L}$ $\mathrm{pl}((a \times g)(\cdot)) = a \times \mathrm{pl}(g(\cdot))$, где в левой части равенства $a(\cdot) : X \to \mathcal{L}$, $a(x) = a, x \in X$, ($\forall a \in [0,1]$, $\forall g(\cdot) : X \to \widehat{\mathcal{L}}$ $\mathrm{bel}((a \widehat{\times} g)(\cdot)) = a \widehat{\times}\, \mathrm{bel}(g(\cdot))$), и
- *вполне* аддитивную: $\forall g_j(\cdot) : X \to \mathcal{L}, j \in J$, $\mathrm{pl}(\underset{j \in J}{+} g_j(\cdot)) = \underset{j \in J}{+} \mathrm{pl}(g_j(\cdot))$ ($\forall g_j(\cdot) : X \to \widehat{\mathcal{L}}, j \in J$, $\mathrm{bel}(\underset{j \in J}{+} g_j(\cdot)) = \underset{j \in J}{+} \mathrm{bel}(g_j(\cdot))$), где J — произвольное множество индексов.

Определим меры правдоподобия $\mathrm{Pl}(\cdot) : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{L}$ и доверия $\mathrm{Bel}(\cdot) : \mathcal{P}(X) \to \widehat{\mathcal{L}}$) равенствами $\forall E \in \mathcal{P}(X)$ $\mathrm{Pl}(E) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{pl}(\chi_E(\cdot))$ и $\mathrm{Bel}(A) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{bel}(\chi_A(\cdot))$, где $\chi_E(\cdot)$, $\widehat{\chi}_E(\cdot)$ суть индикаторные функции E, $\chi_E(x) = \widehat{\chi}_E(x) = 1, x \in E$, $\chi_E(x) = \widehat{\chi}_E(x) = 1, x \in X \setminus E$

Теорема 1 ([4]). $\forall\, \mathrm{pl}(\cdot) : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$ $\exists t(\cdot) : X \to \mathcal{L}$ $\forall g(\cdot)$*:*

$$\mathrm{pl}(g(\cdot)) = \sup_{x \in X} \min\{t(x), g(x)\} \equiv \underset{x \in X}{+} (t(x) \times g(x)) \overset{def}{=} \mathrm{pl}_t(g(\cdot)),$$

$\forall\, \mathrm{bel}(\cdot) : \widehat{\mathcal{L}}(X) \to \widehat{\mathcal{L}}$ $\exists \widehat{t}(\cdot) : X \to \widehat{\mathcal{L}}$ $\forall \widehat{g}(\cdot) : X \to \widehat{\mathcal{L}}$

$$\mathrm{bel}(\widehat{g}(\cdot)) = \inf_{x \in X} \max(\widehat{t}(x), \widehat{g}(x)) \equiv \underset{x \in X}{\widehat{+}} (\widehat{t}(x) \widehat{\times} \widehat{g}(x)) \overset{def}{=} \mathrm{bel}_{\widehat{t}}(\widehat{g}(\cdot)).$$

Следствие 1. *Из определения* pl- *и* bel- *интегралов и теоремы 1 следуют:*

1) Равенства (1), (2)*:* $\forall E \in \mathcal{P}(X)$

$$\mathrm{Pl}(E) = \mathrm{pl}_t(\chi_E(\cdot)) \overset{def}{=} \mathrm{Pl}_t(E) = \underset{x \in E}{+} t(x),$$

$$\mathrm{Bel}(E) = \mathrm{bel}_{\widehat{t}}(\chi_E(\cdot)) \overset{def}{=} \mathrm{Bel}_{\widehat{t}}(E) = \underset{x \in X \setminus E}{\widehat{+}} \widehat{t}(x);$$

2) Полная аддитивность мер Pl_t *и* $\mathrm{Bel}_{\widehat{t}}$*:*

$$\mathrm{Pl}_t(\underset{j\in J}{\cup} E_j) \overset{def}{=} \mathrm{pl}_t(\chi_{\underset{j\in J}{\cup} E_j}(\cdot)) \equiv \mathrm{pl}_t(\underset{j\in J}{+} \chi_{E_j}(\cdot)) = \underset{j\in J}{+} \mathrm{Pl}_t(E_j),$$

$$\mathrm{Bel}_{\widehat{t}}(\underset{j\in J}{\cap} E_j) \overset{def}{=} \mathrm{bel}_{\widehat{t}}(\chi_{\underset{j\in J}{\cap} E_j}(\cdot)) \equiv \mathrm{bel}_{\widehat{t}}(\underset{j\in J}{\widehat{+}} \chi_{E_j}(\cdot)) = \underset{j\in J}{\widehat{+}} \mathrm{Bel}_{\widehat{t}}(E_j).$$

Свойства pl- и bel-интегралов, формально эквивалентных p- и n-интегралам, и мер Pl и Bel, формально эквивалентных мерам возможности P и необходимости N, могут быть охарактеризованы методами теории возможностей [1], где показано, в частности, что p- и n-интегралы суть P- *и* N-*интегралы Лебега.*

В заключение охарактеризуем н.э. $\widetilde{x}$, канонический для $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}_t, \mathrm{Bel}_{\widehat{t}})$ [22], следующими распределениями

$$t^{\widetilde{x}}(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} = x) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Pl}_t(\{x\}) = t(x), x \in X,$$

$$\widehat{t^{\widetilde{x}}}(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \neq x) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Bel}_{\widehat{t}}(X \setminus \{x\}) = \widehat{t}(x), x \in X,$$

согласно которым $\forall E \in \mathcal{P}(X)$:

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(E) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in E) = \mathrm{Pl}_t(E) = \underset{x\in E}{+} t^{\widetilde{x}}(x),$$

$$\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(E) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in E) = \mathrm{Bel}_{\widehat{t}}(E) = \underset{x\in X\setminus E}{\widehat{+}} \widehat{t^{\widetilde{x}}}(x)$$

и $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}_t, \mathrm{Bel}_{\widehat{t}}) \equiv (X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}_{t^{\widetilde{x}}}, \mathrm{Bel}_{\widehat{t^{\widetilde{x}}}})$.

2.3. «Координатные представления» шкал $\mathcal{L}$ и $\widehat{\mathcal{L}}$

Поскольку согласно 2) в §2.1 шкалы $\gamma\,\mathcal{L}$, $\gamma \in \overline{\Gamma}$, и шкалы $\widehat{\gamma}\,\widehat{\mathcal{L}}$, $\widehat{\gamma} \in \overline{\Gamma}$, называемые «координатными представлениями» шкал $\mathcal{L}$ и $\widehat{\mathcal{L}}$(«координата» $a \in [0,1]$ в $\mathcal{L}$, $\widehat{\mathcal{L}}$ представлена «координатой» $\gamma(a) \in [0,1]$ в $\gamma\mathcal{L}$, $\gamma\widehat{\mathcal{L}}$), им изоморфны, каждый м.-и. как его неопределенные высказывания сообразно своим предпочтениям может выбрать любую пару $\gamma\mathcal{L}$ и $\widehat{\gamma}\mathcal{L}$, $\gamma, \widehat{\gamma} \in \overline{\Gamma}$, координатных представлений шкал $\mathcal{L}$ и $\widehat{\mathcal{L}}$ для формулировки модели неопределенного элемента $\widetilde{x}$. При этом, будучи сформулированными в некоторых парах шкал $\mathcal{L}'$, $\widehat{\mathcal{L}}'$ и $\mathcal{L}''$, $\widehat{\mathcal{L}}''$, *модели считаются эквивалентными, если существует пара шкал* $\mathcal{L} = \gamma'\mathcal{L}' = \gamma''\mathcal{L}''$ *и* $\widehat{\mathcal{L}} = \widehat{\gamma}'\widehat{\mathcal{L}}' = \widehat{\gamma}''\widehat{\mathcal{L}}''$, $\gamma', \gamma'', \widehat{\gamma}', \widehat{\gamma}'' \in \overline{\Gamma}$, *в которых их формулировки совпадают, а содержательно истолкованы* *могут быть только те, формулировки которых не зависят от выбора шкал $\mathcal{L}$, $\widehat{\mathcal{L}}$, то есть одинаковы для всех м.-и.* Далее условимся считать, что «выбор координатного представления шкалы $\mathcal{L}$ ($\widehat{\mathcal{L}}$)» $\equiv$ «выбор шкалы $\mathcal{L}$ ($\widehat{\mathcal{L}}$)».

2.4. Правдоподобие и доверие истинности субъективных суждений как неопределенных высказываний

В рассматриваемом контексте н.э. $\widetilde{x}$ моделирует субъективные суждения м.-и. о возможных значениях $x \in X$ и их модальности. Такая интерпретация н.э. основана на теоретико-множественном представлении логики высказываний [4], согласно которому в $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ X — множество элементарных высказываний (э.в.), любое высказывание a взаимно однозначно представлено множеством $A \in \mathcal{P}(X)$ э.в. $x \in X$, каждое из которых влечет a: $a \leftrightarrow A = \bigcup\limits_{\substack{x\in X\\ x\to a}} \{x\} \equiv \{x \in X,\ x \to a\}$, где $\leftrightarrow$ и $\to$ суть символы взаимно однозначного соответствия и логической импликации. Каждое э.в. $x \in X$ *представлено* в X одноточечным множеством $\{x\}$, $x \leftrightarrow \{x\}$, и выделено среди всех высказываний условием: любое э.в. $x \in X$ не следует ни из какого высказывания, кроме x и всегда ложного $\mathbf{0}$.

При таком представлении если $a \leftrightarrow A$, $b \leftrightarrow B$, то конъюнкция $a \,\&\, b \leftrightarrow A \cap B$, дизъюнкция $a \vee b \leftrightarrow A \cup B$, отрицание $\neg a \leftrightarrow X \setminus A$, всегда истинное высказывание $\mathbf{1} \leftrightarrow X$, всегда ложное $\mathbf{0} \leftrightarrow \varnothing$, а меры $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\cdot)$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\cdot)$ следует интерпретировать как модальные операторы, определенные на множестве всех высказываний $\mathcal{P}(X)$ и принимающие значения в шкалах $\mathcal{L}$ и $\widehat{\mathcal{L}}$ соответственно.

Поэтому правдоподобие $t^{\widetilde{x}}(x) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} = x)$ ($\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in E)$) интерпретируется как правдоподобие истинности субъективного суждения как неопределенного высказывания, согласно которому $\widetilde{x} = x$ ($\widetilde{x} \in E$), где $x \leftrightarrow \{x\}$ ($e \leftrightarrow E$), доверие $\widehat{t^{\widetilde{x}}}(x) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \neq x)$ ($\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in E)$) — доверие истинности субъективного суждения как неопределенного высказывания $\widetilde{x} \in X \setminus \{x\}$ ($\widetilde{x} \in E$), где $\neg x \leftrightarrow X \setminus \{x\}$ ($e \leftrightarrow E$), $x \in X$.

2.5. Правдоподобия и доверия истинности следствий неопределенной модели

Пусть $\varphi(\cdot) : X \to Y$ — некоторая функция, задающая н.э. $\widetilde{y} = \varphi(\widetilde{x})$ со значениями в пространстве $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{y}})$, в котором $\mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(A) =$

$\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\varphi(\widetilde{x}) \in A) = \sup\limits_{y \in A} t^{\widetilde{y}}(y)$, $\mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(A) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\varphi(\widetilde{x}) \in A) = \inf\limits_{y \in Y \setminus A} \widehat{t^{\widetilde{y}}}(y)$, $A \in \mathcal{P}(Y)$, где

$$t^{\widetilde{y}}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(\widetilde{y} = y) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\varphi(\widetilde{x}) = y) = \sup_{\substack{x \in X, \\ \varphi(x) = y}} t^{\widetilde{x}}(x), \tag{4}$$

$$\widehat{t^{\widetilde{y}}}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(\widetilde{y} \neq y) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\varphi(\widetilde{x}) \neq y) = \inf_{\substack{x \in X, \\ \varphi(x) = y}} \widehat{t^{\widetilde{x}}}(x), \tag{5}$$

суть правдоподобие и доверие истинности субъективных суждений м.-и., согласно которым $\varphi(\widetilde{x}) = y$ и, соответственно, $\varphi(\widetilde{x}) \neq y$, $y \in Y$, причем $\sup\limits_{y \in Y} t^{\widetilde{y}}(y) = 1$, $\inf\limits_{y \in Y} \widehat{t^{\widetilde{y}}}(y) = 0$, ибо $\varphi^{-1}(Y) = X$.

Пусть $A^{\cdot} : X \to \mathcal{P}(Y)$ и $A_{\cdot} : Y \to \mathcal{P}(X)$ — взаимно обратные отображения: $\forall x \in X\ A^x = \{y \in Y, x \in A_y\}$, $\forall y \in Y A_y = \{x \in X, y \in A^x\}$. Назовем неопределенным множеством [4], заданным на $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ со значениями в $\mathcal{P}(Y)$ образ $A^{\widetilde{x}}$ н.э. $\widetilde{x}$, его индикаторными функциями одноточечного покрытия назовем

$$\begin{aligned} t^{A^{\widetilde{x}}}(y) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(y \in A^{\widetilde{x}}) \equiv \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in A_y), \\ \widehat{t}^{A^{\widetilde{x}}}(y) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(y \in A^{\widetilde{x}}) \equiv \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in A_y). \end{aligned} \tag{6}$$

В данном случае $t^{A^{\widetilde{x}}}(y)$ и $\widehat{t}^{A^{\widetilde{x}}}(y)$ суть правдоподобие и доверие истинности субъективного суждения, согласно которому $y \in A^{\widetilde{x}}$ или, что эквивалентно, $\widetilde{x} \in A_y$.

Эти факты позволяют м.-и., исходя из модели $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ н.э. $\widetilde{x}$, определить правдоподобия и доверия истинности *любых* (его) субъективных суждений о значениях *любых* характеристик объекта исследования, обусловленных его неопределенной моделью $\widetilde{M} \stackrel{\text{def}}{=} M(\widetilde{x})$. Действительно, для любой неопределенной характеристики последнего $\varphi(\widetilde{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(M(\widetilde{x}))$ и $A^{\widetilde{x}} = F(M(\widetilde{x}))$ правдоподобия и доверия истинности субъективных суждений м.-и., согласно которым $\varphi(\widetilde{x}) = y$, $\varphi(\widetilde{x}) \neq y$ и $y \in A^{\widetilde{x}}$, $y \in Y$ определены в (4), (5) и в (6).

В случае, если исследователь задал распределения правдоподобий и доверий $\widetilde{y} = \varphi(\widetilde{x})$, то меры $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$ могут быть однозначно восстановлены только на σ-алгебре прообразов значений функции $\varphi(\cdot)$.

2.6. Модели полного незнания и полного знания модели объекта исследования

Случай полного незнания модели $M(x), x \in X$, определяется инвариантными относительно выбора шкал $\gamma\mathcal{L}$ и $\gamma\widehat{\mathcal{L}}$, $\gamma \in \overline{\Gamma}$, распределениями $t^{\widetilde{x}}(x) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} = x) = 1$ и $\widehat{t^{\widetilde{x}}}(x) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \neq x) = 0$, $x \in X$, согласно которым все значения $\widetilde{x} = x$, $x \in X$, равноправдоподобны и любому неравенству $\widetilde{x} \neq x$ доверять нельзя.

В этом случае такое же распределение в (4), (5) будет иметь любая функция $\varphi(\widetilde{x}) = \widetilde{y}$, а именно $t^{\widetilde{y}}(y) = 1$, $\widehat{t^{\widetilde{y}}}(y) = 0$, $y \in Y$.

В случае полного знания модели

$$t^{\widetilde{x}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = x_0, \\ 0, & \text{если } x \neq x_0 \end{cases}, \quad \widehat{t^{\widetilde{x}}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = x_0, \\ 1, & \text{если } x \neq x_0 \end{cases}, \quad x \in X,$$

то есть x_0 — единственное правдоподобное значение параметра $x \in X$ модели $M(x)$ и любому другому значению доверять нельзя.

В этом случае такое же распределение в (4), (5) будет иметь любая функция $\varphi(\widetilde{x}) = \widetilde{y}$, а именно

$$t^{\widetilde{y}}(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y = \varphi(x_0), \\ 0, & \text{если } y \neq \varphi(x_0) \end{cases}, \quad \widehat{t^{\widetilde{y}}}(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y = \varphi(x_0), \\ 1, & \text{если } y \neq \varphi(x_0) \end{cases}, \quad y \in Y.$$

Это означает, что м.-и. *в любом случае может предложить модель* $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ *неопределенного элемента* $\widetilde{x}$ [4].

2.7. Эмпирическое построение математической модели субъективных суждений

Математическая модель «интеллектуального диалога м.-и. с моделью объекта исследования», *должна допускать* как эмпирическую верификацию, если доступны данные наблюдений за объектом исследования, так и эмпирическое построение на основе этих же данных.

Пусть $M(x) = (\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr}(\cdot; x))$, $x \in X$, модель объекта исследования, в которой x — значение н.э. $\widetilde{x}$, но теперь м.-и. доступны данные наблюдений за объектом, и он намерен использовать их как для построения *статистической модели* $\widetilde{x}(\omega^{(n)})$ н.э. $\widetilde{x}$ (то есть эмпирической модели его субъективных суждений о возможных значениях $x \in X$), так и для того, чтобы оценить, насколько реалистична модель его субъективных суждений, представленная н.э. $\widetilde{x}$. С этой целью м.-и. для каждого $x \in X$ *формулирует статистическую задачу проверки гипотезы* $H(x) = \{x\}$, конкурирующей с классом $K(x) = X \setminus \{x\}$ альтернативных $H(x)$ гипотез о возможных значениях параметра, где x — (неизвестное) значение параметра вероятности $\Pr(\cdot; x)$, контролировавшей данные наблюдений, $x \in X$.

Обозначим $\omega^{(n)} = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\} \in \Omega^n$ данные n наблюдений, $\mathrm{pr}^{(n)}(\cdot; x)$ — плотность контролировавшей наблюдения вероятности $\Pr^{(n)}(\cdot; x) : \mathcal{A}^n \to [0,1]$ относительно некоторой меры μ, не зависящей от $x \in X$, зависящая от неизвестного (фиксированного) параметра x. Задача проверки гипотезы $H(x) = \{x\}$, конкурирующей с классом $K(x) = X \setminus \{x\}$, может быть решена с помощью критерия отношения правдоподобия, согласно которому гипотеза $H(x)$ принимается, если

$$\omega^{(n)} \in \Phi(x; pr) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\{ \omega'^{(n)} \in \Omega^n : \frac{\mathrm{pr}^{(n)}(\omega'^{(n)}; x)}{\sup\limits_{x' \in X} \mathrm{pr}^{(n)}(\omega'^{(n)}; x')} \geqslant \lambda^{(n)}(pr) \right\},$$

где pr — вероятность принять гипотезу $H(x)$, когда она и на самом деле верна, а $\lambda^{(n)}(pr)$ определяется из условия $\Pr^{(n)}(\Phi(x; pr); x) = pr$. Отображение $\Phi^{-1}(\cdot; pr) : \Omega^n \to \mathcal{P}(X)$: $\Phi^{-1}(\omega^{(n)}; pr) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x' \in X : \omega^{(n)} \in \Phi(x'; pr)\}, \omega^{(n)} \in \Omega^n$ называется оценивающим множеством максимального правдоподобия. Поскольку с вероятностью единица $\Phi(x'; pr) \subset \Phi(x'; pr')$, $x' \in X$ и $\Phi^{-1}(\omega'^{(n)}; pr) \subset \Phi^{-1}(\omega'^{(n)}; pr')$, $\omega'^{(n)} \in \Omega^{(n)}$, если $pr \leqslant pr'$, то

- Чем больше минимальное значение $pr \in [0,1]$, при котором $\omega^{(n)} \in \Phi(x; pr)$ и принимается $H(x)$, тем значительнее наблюдение $\omega^{(n)}$ свидетельствует против $H(x)$ и тем менее *правдоподобно* равенство $\widetilde{x}(\omega^{(n)}) = x$,
- Чем больше максимальное значение $pr \in [0,1]$, при котором $\omega^{(n)} \in \Omega^n \setminus \Phi(x; pr)$ и отклоняется $H(x)$, тем значительнее наблюдение $\omega^{(n)}$ свидетельствует против $H(x)$ и тем менее *правдоподобно* равенство $\widetilde{x}(\omega^{(n)}) = x$.

Эти замечания позволяют м.-и. рассматривать $x \in X$ как значения случайного, зависящего от $\omega^{(n)}$, неопределенного элемента $\widetilde{x}(\omega^{(n)})$, последний считать эмпирической моделью его субъективных суждений о возможных значениях неизвестного параметра $x \in X$ модели $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr(\cdot; x))$, определившей данные наблюдений $\omega^{(n)}$ и определить *статистическую модель н.э.* $\widetilde{x}(\omega^{(n)})$ *вариантами распределений правдоподобий и доверий* [4]

$$t^{\widetilde{x}(\omega^{(n)})}(x) = 1 - \inf\{pr|pr \in [0,1], x \in \Phi^{-1}(\omega^{(n)}; pr)\},$$
$$\widehat{t}^{\widetilde{x}(\omega^{(n)})}(x) = 1 - t^{\widetilde{x}(\omega^{(n)})}(x), \quad x \in X.$$

Пример. Пусть $\omega^{(n)} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ — n независимых нормально распределеных случайных величин с математическим ожиданием x и дисперсией σ^2. При этом $\mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left[-(2\sigma^2)^{-1} \sum\limits_{i=1}^{n} (\omega_i - x)^2\right]$, поэтому $\Phi(x; pr) = \{\omega^{(n)} \in \Omega^n : \exp\left[-\frac{n}{2\sigma^2}(x - \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i)^2\right] \geqslant \lambda^{(n)}(pr)\}$, $\Phi^{-1}(\omega^{(n)}; pr) = \{x' \in X : \mathrm{erf}\left(\sqrt{\frac{n}{2\sigma^2}} \left|\frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i - x'\right|\right) \leqslant pr)\}$, где $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x \exp(-t^2)dt$, и $t^{\widetilde{x}(\omega^{(n)})}(x) = 1 - \mathrm{erf}\left(\sqrt{\frac{n}{2\sigma^2}} \left|\frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i - x\right|\right)$.

При регулярности [23] семейства распределений $\{\mathrm{pr}^{(n)}(\cdot; x)\}_{x \in X}$ и единственности при $n > n_0$ оценки максимального правдоподобия $\widehat{x}_{ML}(\omega^{(n)}) = \operatorname*{argmax}\limits_{x' \in X} \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x')$ параметра $x \in X$ вероятности, контролировавшей данные n наблюдений, распределение статистики $T(\omega^{(n)}) = -2\ln(\mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x) / \sup\limits_{x' \in X} \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x'))$ при $n \to \infty$ и верной гипотезе $H(x)$ сходится к распределению χ^2 с одной степенью свободы. $F_{\chi_1^2}(-2\ln\lambda^{(n)}(pr)) \to pr$ при $n \to \infty$, где $F_{\chi_1^2}(\cdot)$ — функция распределения χ^2 с одной степенью свободы, откуда

$$t^{\widetilde{x}(\omega^{(n)})}(x) - 1 + F_{\chi_1^2}\left(-2\ln \frac{\mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x)}{\sup\limits_{x' \in X} \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x')}\right) \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

В случае, если исследователь предложил модель неопределенного элемента
$(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ до получения результатов наблюдений, он может получить оценку правдоподобия согласия его модели с данными наблюдений [4]

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \sim \omega^{(n)}) = 1 - \inf\{pr|pr \in [0,1], \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in \Phi^{-1}(\omega^{(n)}; pr)) = 1\}.$$

3. Неопределенный измерительно-вычислительный преобразователь первого порядка

На практике широко используются измерительные преобразователи (ИП), математические модели которых описываются в терминах дифференциальных уравнений. Порядком измерительно-вычислительного преобразователя (ИВП) будем называть порядок дифференциального уравнения, описывающего ИП, который используется в качестве измерительной компоненты ИВП.

3.1. Измерительные преобразователи первого порядка

Приведем некоторые примеры ИП первого порядка [24].

Чашечный (крыльчатый) анемометр. Если пренебречь трением в частях механизма, то при достаточно больших скоростях потока динамические свойства анемометра характеризуются уравнением

$$J\frac{d\omega(t)}{dt} + r_0\omega(t) = c_0 v^2(t), \quad t > 0, \tag{7}$$

с начальным условием $\omega(0) = \omega_0$, где J — момент инерции ротора анемометра; $\omega(t)$ — скорость вращения ротора в момент времени t, r_0 — коэффициент сил вязкого трения, c_0 — постоянная, зависящая от параметров анемометра, $v(t)$ — скорость потока в момент времени t.

Контактный измерительный преобразователь температуры жидкости и газа. Основными ИП, применяющимися при измерении температуры жидкости и газа, являются термопары, термисторы и различного типа термо-сопротивления. Если термоприемник состоит из однородного материала и можно считать, что в процессе измерения в каждый момент времени температура всех точек термоприемника будет одинакова, то уравнению, определяющему динамические свойства термоприемника, можно придать вид

$$\frac{dU(t)}{dt} + \frac{\alpha_k S}{mc}U(t) = \frac{\alpha_k S}{mc}\vartheta(t), \quad t > 0, \tag{8}$$

с начальным условием $U(0) = U_0$, где $U(t)$ — температура термоприемника, S — площадь поверхности термоприемника, m — масса термоприемника, c — удельная теплоемкость материала термоприемника, α_k — коэффициент конвективного теплообмена между термоприемником и средой, температура которой подлежит измерению, $\vartheta(t)$ — измеряемая температура среды в момент времени t.

Измерительный преобразователь давления. В качестве примера ИП давления, используемых при измерении давления газового потока, приведем манометры с упругим чувствительным элементом. Если пренебречь инерционностью упругого чувствительного элемента, то уравнение динамики для этих ИП имеет вид:

$$\tau_0 \frac{dP_2(t)}{dt} + P_2(t) = P_1(t), \quad \tau_0 = \frac{128\mu_0 V_0 l_0}{\pi d^4} \frac{1}{P_2(t)}, \tag{9}$$

при начальном условии $P_2(0) = P_0$.

В уравнении (9) $P_2(t)$ — текущее значение давления газа в полости прибора, $P_1(t)$ — значение давления на входе в манометрическую трубку, μ_0 — коэффициент динамической вязкости газа, V_0 — объем газа, заключенного в полости манометра, l_0 и d — длина и диаметр трубки манометра.

Как видим, параметр τ_0 ИП содержит неизвестное давление $P_2(t)$; на практике при оценке параметра τ_0 вместо $P_2(t)$ берут некоторое предполагаемое значение P_1^*.

Измерительные преобразователи расхода. К измерительным преобразователям первого порядка относятся некоторые виды расходомеров, например крыльчато-тахометрические и тепловые. Динамические свойства крыльчато-тахометрических расходомеров определяются в основном инерционностью крыльчатки.

Если крыльчатка обтекается несжимаемой жидкостью, то уравнение движения крыльчатки **имеет вид**:

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} + DQ\omega(t) = AQ^2(t), \omega(0) = \omega_0, \tag{10}$$

где J — момент инерции крыльчатки, ω — угловая скорость вращения крыльчатки, Q — объемный расход, A, D — постоянные коэффициенты.

Заметим, что крыльчатка как динамическая система оказывается, вообще говоря, нестационарной. Лишь для режимов измерения, при которых отклонение расхода от его среднего значения невелико, крыльчатку можно считать стационарным линейным ИП.

Динамика тепловых расходомеров описывается тем же уравнением, что и динамика простейших термоприемников, то есть (8).

3.2. Элементы теории ИП первого порядка

В качестве обобщенной модели ИП с сосредоточенными параметрами рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \alpha\dot{u}(t) + \beta u(t) = g(t), \quad 0 < t < T, \\ u(0) = 0, \quad \dot{u}(t) \equiv du(t)/dt. \end{cases} \tag{11}$$

Здесь $[0, T]$ — промежуток времени, в течение которого производится измерение, $g(t)$ — входное воздействие (температура, влажность среды, разность потенциалов и т. п.) в момент времени t, $\alpha > 0$ и β — параметры ИП, в данном случае не зависящие от времени.

Задачу (11), определяющую математическую модель ИП, запишем в виде

$$Du(\cdot) = g(\cdot), \tag{12}$$

где D — формальный дифференциальный оператор $\alpha(d/dt)+\beta$, определенный на плотном в $\mathcal{L}^2[0,T]$[1] множестве $\mathcal{M}$ абсолютно непрерывных функций $u(\cdot)$, таких, что $\dot{u}(\cdot) \in \mathcal{L}^2[0,T]$ и $u(0) = 0$. **Оператор** D является замкнутым, плотно определенным (неограниченным) линейный оператор, действующий из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{L}^2[0,T]$. Его областью значений является $\mathcal{L}^2[0,T]$ и в (12) $g(\cdot) \in \mathcal{L}^2[0,T]$.

Обратный к D оператор $A = D^{-1}$, определяющий решение задачи Коши (11), **определяется** равенством

$$Ag(t) = \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^t \exp\left[-\frac{\beta}{\alpha}(t-\tau)\right] g(\tau)\,d\tau, \ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{13}$$

в котором $g(\cdot) \in \mathcal{L}^2[0,T]$, A — оператор Гильберта–Шмидта.

Заметим также, что сопряженный с D дифференциальный оператор $D^* = -\alpha(d/dt) + \beta$, определен на плотном в $\mathcal{L}^2[0,T]$ множестве $\mathcal{M}^*$ абсолютно непрерывных функций $v(\cdot)$, таких что $\dot{v}(\cdot) \in \mathcal{L}^2[0,T]$ и $v(T) = 0$. Далее считаем $T = 1$.

[1] $\mathcal{L}^2[0,T]$ — лебеговский класс измеримых на $[0,T]$ функций, квадрат которых интегрируем на $[0,T]$.

3.3. Редукция измерения на ИП первого порядка к выходному сигналу идеального ИП

Типичная схема измерения посредством ИП имеет вид [22]

$$\xi(t) = Ag(t) + \nu(t) \equiv (Ag)(t) + \nu(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{14}$$

где $\xi(\cdot) \in \mathcal{R} = \mathcal{L}^2[0,1]$ — искаженный шумом $\nu(\cdot) \in \mathcal{R}$ выходной сигнал ИП, рассматриваемый как отклик на его входной сигнал $g(\cdot) \in \mathcal{R}$, полученный в процессе взаимодействия ИП с *измеряемым объектом и средой*[2] [25].

Задача интерпретации измерения (14) заключается в извлечении из $\xi(\cdot)$ наиболее полной информации о параметрах *исследуемого объекта.* Определим эти параметры как выходной сигнал $Ug(\cdot)$ ИП U, причем в данном случае $U \in (\mathcal{R} \to \mathcal{U})$ — линейный ограниченный оператор, моделирующий «идеальный» ИП, который взаимодействует с измеряемым объектом и средой так же, как и A, но на выходе дает параметры исследуемого объекта, не возмущенного измерением. Речь идет о редукции $R\xi(\cdot) \equiv (R\xi)(\cdot)$ результата измерения $\xi(\cdot)$ (14) к виду, свойственному измерению на приборе U, то есть к виду $Ug(\cdot) \equiv (Ug)(\cdot)$.

Если в схеме измерения (14) известен оператор A, шум $\nu(\cdot)$ — случайный элемент $\mathcal{R} = \mathcal{L}^2[0,T]$ с нулевым математическим ожиданием, $\mathbf{E}\nu(\cdot) = 0$, и известным корреляционным оператором $\Sigma \in (\mathcal{R} \to \mathcal{R})$, то условимся говорить, что задана модель $[A, \Sigma]$ схемы измерения (14), изученная в [25], которую будем называть моделью ИП и писать ИП $[A, \Sigma]$.

Математически задача редукции измерения (14) к выходному сигналу идеального ИП, которую далее для краткости будем называть задачей редукции $[A, \Sigma]$ к идеальному ИП, модель которого обозначим $[U, 0]$, формулируется как задача на минимум максимальной среднеквадратичной (с.к.) ошибки интерпретации выходного сигнала[3] $R\xi(\cdot)$ ИВП $[A, \Sigma, U]$ как выходного сигнала $Ug(\cdot)$ идеального ИП $[U, 0]$, [22]:

$$h(R, U) = \sup_{g(\cdot) \in \mathcal{L}^2[0,T]} \mathbf{E}\|R\xi(\cdot) - Ug(\cdot)\|^2_{\mathcal{L}^2[0,T]} \sim \min_R. \tag{15}$$

[2] Заметим, что хотя $Ag(\cdot) \in \mathcal{M}$, $\xi(\cdot)$ и $\nu(\cdot)$ не обязаны принадлежать $\mathcal{M}$, поэтому выражение $D\xi = A^{-1}\xi$, вообще говоря, лишено смысла.

[3] $[A, \Sigma, U]$ — обозначение для модели ИВП с ИП $[A, \Sigma]$, на котором синтезируется выходной сигнал идеального ИП $[U, 0]$.

Здесь min вычисляется на множестве всех линейных операторов $R \in (\mathcal{R} \to \mathcal{U})$. Далее для простоты принято $\Sigma = \sigma^2 I$, где I — единичный оператор, если не оговорено иначе.

Как показано в [25], задача (15) разрешима в том и только том случае, когда $\overline{UA^{-1}} = \overline{UD}$ — оператор Гильберта–Шмидта (Г.–Ш.), ее решением является оператор Г.–Ш.[4] $R_* = \overline{UD}$, и с.к. погрешность редукции $R_*\xi(\cdot)$ выходного сигнала $\xi(\cdot)$ ИП $[A, \Sigma]$ к выходному сигналу $Ug(\cdot)$ идеального ИП $[U, 0]$ есть $h(R_*, U) = \mathbf{E}\|R_*\nu\|^2 = \sigma^2\|\overline{UD}\|_2^2$, где $\|\cdot\|_2$ — символ нормы Г.–Ш.; по определению, $\|\overline{UD}\|_2^2 = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \|\overline{UD}e_j(\cdot)\|_2^2$, где $\{e_j(\cdot)\}$ — некоторый ортонормированный базис $\mathcal{L}^2[\,0, T]$, [25].

Замечание 1. Оператор UD как и D определен на плотном в $\mathcal{L}^2[\,0,1]$ множестве $\mathcal{M}$. Если $\{g_j(\cdot)\}$ — ортонормированный базис $\mathcal{L}^2[\,0,1]$, содержащийся в $\mathcal{M}$, то согласно условию разрешимости задачи (15)

$$\|\overline{UD}\|_2^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|\overline{UD}g_j(\cdot)\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|UDg_j(\cdot)\|^2 < \infty. \tag{16}$$

Естественный способ продолжения UD до оператора Г.–Ш. $\overline{UD}$, определенного на $\mathcal{L}^2[\,0,1]$, состоит в следующем. Пусть $x(\cdot) \in \mathcal{L}^2[\,0,1]$ и

$$x(\cdot) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j g_j(\cdot) \tag{17}$$

— разложение $x(\cdot)$, где $x_j = (x(\cdot), g_j(\cdot)) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^1 x(x) g_j(x)\,dx$, $j = 1, 2, \ldots,$ — координаты $x(\cdot)$ в базисе $\{g_j(\cdot)\}$. Определим оператор $\overline{UD}$ равенством $\overline{UD}x(\cdot) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j UDg_j(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} x_j UDg_j(\cdot)$; $\overline{UD}x(\cdot) \in \mathcal{L}^2[\,0,1]$, ибо $||\overline{UD}x(\cdot)||^2 \leqslant ||x(\cdot)||^2 ||\overline{UD}||^2 < \infty$.

3.3.1. Собственный базис и эффективный ранг $[A, \Sigma]$

Речь пойдет об ортонормированном базисе $\mathcal{L}^2[0,1]$, состоящем из собственных функций оператора DD^*, являющихся решениями следующей краевой задачи [25]:

[4] Черта над оператором означает его замыкание. В данном случае — его продолжение по непрерывности на $\mathcal{L}^2[\,0,T]$.

$$\begin{cases} DD^*z(x) \equiv -\alpha^2 z''(x) + \beta^2 z(x) = \delta^2 z(x), \quad 0 < x < 1, \\ -\alpha z'(0) + \beta z(0) = 0, \quad z(1) = 0. \end{cases} \tag{18}$$

В (18) равенство $z(1) = 0$ следует из условия $z(\cdot) \in \mathcal{M}^*$, соответственно включение $D^*z(\cdot) \in \mathcal{M}$ влечет условие $-\alpha z(0)' + \beta z(0) = 0$. Обозначим $e_1(\cdot), e_2(\cdot), \ldots$ ортонормированный базис $\mathcal{L}^2[0,1]$, состоящий из решений задачи (18), упорядоченных согласно неравенствам $0 < \delta_1 \leqslant \delta_2 \leqslant \ldots$ для соответствующих собственных значений, и называемый базисом ИП $[A, \sigma^2 I]$ [26]. В данном случае [27]

$$e_j(x) = q_j \sin(a_j(1-x)),\ 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad \delta_j^2 = \beta^2 + \alpha^2 a_j^2,\ j = 1, 2, \ldots, \tag{19}$$

где $a_1 < a_2 < \ldots$ — положительные корни уравнения $\alpha a \cos a + \beta \sin a = 0$ и $q_j = \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha\beta}{2\delta_j^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $j = 1, 2, \ldots,$ — нормировочные постоянные. Заметим, что

$$\begin{gathered} D^*e_j(x) = \delta_j \widetilde{e}_j(x), \quad \text{где} \quad \widetilde{e}_j(x) = (-1)^{j+1} q_j \sin(a_j x), \\ D\widetilde{e}_j(x) = \delta_j e_j(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\ j = 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{20}$$

причем система $\{\widetilde{e}_j(\cdot)\}$ ортонормирована и, как и базис $\{e_j(\cdot)\}$ модели $[A, \sigma^2 I]$, образует ортонормированный базис $\mathcal{L}^2[0,1]$. С помощью этих базисов, определяющих так называемые сингулярные разложения операторов D и соответственно D^*, легко записать условие (16) на оператор U, необходимое и достаточное для разрешимости задачи редукции (15): Согласно замечанию 1 и включению $\{\widetilde{e}_j(\cdot)\} \subset \mathcal{M}$

$$\|\overline{UD}\|_2^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|UD\widetilde{e}_j(\cdot)\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j^2 \|Ue_j(\cdot)\|^2 < \infty. \tag{21}$$

Условие (21) необходимо и достаточно для разрешимости задачи редукции измерения $\xi(\cdot)$ (14) к выходному сигналу $Ug(\cdot)$ идеального ИП. Поскольку при $j \to \infty$ $\delta_j^2 \to \infty$, согласно (21) U — непременно оператор Г.–Ш., но это характерно для «белого» шума с корреляционным оператором, кратным единичному.

Отметим также, что определенный условием (21) класс идеальных ИП $[U, 0]$, выходные сигналы $Ug(\cdot)$ могут быть получены на ИВП $[A, \Sigma, U]$, не зависит от параметров α, β в (18).

Характеристическое свойство базиса $\{e_j(\cdot)\}$ (19) ИП $[A, \sigma^2 I]$, выделяющее его среди других базисов $\mathcal{L}^2[0,1]$, состоит в следующем, см. [25, 22]. Пусть оператор Π_k ортогонально проецирует в $\mathcal{L}^2[\,0,1]$ на k-мерное подпространство $\mathcal{L}_k = \mathcal{L}(e_1(\cdot), \ldots, e_k(\cdot))$, натянутое на первые k базисных векторов (19). Тогда для любого $k = 1, 2, \ldots$ $\overline{\Pi_k D}$ — оператор Г.–Ш., так как согласно равенствам (20), (21) $\|\overline{\Pi_k D}\|_2^2 = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \|\overline{\Pi_k D}\widetilde{e}_j(\cdot)\|_2^2 = \sum\limits_{j=1}^{k} \delta_j^2$. Следовательно, задача редукции измерения $\xi(\cdot)$ (14) к $\Pi_k g(\cdot) = \sum\limits_{j=1}^{k} e_j(\cdot) \int\limits_0^1 g(x) e_j(x)\, dx$ для $k = 1, 2, \ldots$ однозначно разрешима, редукция

$$R_* \xi(\cdot) = \overline{\Pi_k D} \xi(\cdot) = \sum_{j=1}^{k} \delta_j e_j(\cdot) \int_0^1 \xi(x) \widetilde{e}_j(x)\, dx,$$

а ее с. к. погрешность $h(R_*, \Pi_k) = \sigma^2 \sum\limits_{j=1}^{k} \delta_j^2$ не превосходит с. к. погрешность $h(R_*, \Pi_k')$ редукции $\xi(\cdot)$ к любой k-мерной ортогональной составляющей $\Pi_k' g(\cdot)$ сигнала $g(\cdot)$ [25].

Образно говоря, $\mathcal{L}_k$ при любом $k = 1, 2, \ldots$ поражено шумом редукции не больше, чем любое другое k-мерное подпространство $\mathcal{L}^2[\,0,1]$.

Замечание 2. Для определения оценки проекции $\Pi_k g(\cdot)$ достаточно знать ортогональную проекцию $\widetilde{\Pi}_k \xi(\cdot)$ измерения $\xi(\cdot)$, где $\widetilde{\Pi}_k$ — ортогональный проектор на $\widetilde{\mathcal{L}}_k = \mathcal{L}(\widetilde{e}_1(\cdot), \ldots, \widetilde{e}_k(\cdot))$, см. (16).

Определение 2. Эффективным рангом[5] ИП $[A, \sigma^2 I]$ первого порядка называется функция $\rho(\cdot):\ [0, \infty) \mapsto \{0, 1, \ldots\}$, значение $\rho(\varepsilon)$ которой равно максимальной размерности ортогональной составляющей в $\mathcal{L}^2[0,1]$ сигнала $g(\cdot)$, которая оценивается с с. к. погрешностью, не превосходящей $\varepsilon \geqslant 0$, [22, 28].

Лемма 1. *Если $\delta_j^2 = \beta^2 + \alpha^2 a_j^2$, $j = 1, 2, \ldots,$ — собственные значения оператора DD^* (18), где $a_1 < a_2 < \ldots$ — положительные корни уравнения $\alpha a \cos a + \beta \sin a = 0$, то эффективный ранг ИП $[A, \sigma^2 I]$ $\rho(\varepsilon) = \max\Big\{k,\ \sigma^2 \sum\limits_{j=1}^{k} \delta_j^2 \leqslant \varepsilon\Big\}, \quad \varepsilon \geqslant 0.$*

[5]Эффективный ранг ИП $[A, \Sigma] \equiv$ эффективный ранг модели $[A, \Sigma]$, [22].

Для каждого $\varepsilon \geqslant 0$ значение $\rho(\varepsilon)$ характеризует разрешающую способность ИВП первого порядка, определяя максимальное число «степеней свободы» сигнала $\Pi_{\rho(\varepsilon)} g(\cdot)$, допускающего линейное оценивание с с. к. погрешностью, не превосходящей ε.

Функции $\rho(\cdot)$ для двух значений параметра α изображены на рис. 1.

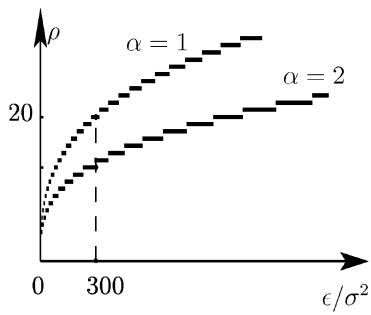

Рис. 1. Эффективный ранг ИП $[A, \sigma^2 I]$ первого порядка. При постоянном β с увеличением значения α эффективный ранг уменьшается.

Исходя из выражений (19), нетрудно получить, что зависимость δ_j^2 от номера j для ИП первого порядка квадратичная, поэтому согласно лемме 1 с добавлением каждой следующей «степени свободы» погрешность оценивания сигнала $Ug(\cdot)$ значительно увеличивается, и на практике с реально заданной точностью, как правило, может быть оценена ортогональная составляющая $Ug(\cdot)$ лишь сравнительно небольшой размерности.

Как показано на рис. 1, эффективный ранг ИП$_1$ с параметром $\alpha = 1.0$ больше, чем ИП$_2$ с $\alpha = 2.0$, поэтому, задавая, например, значение $\varepsilon = 0{,}3$ при $\sigma^2 = 0.001$, мы получаем размерность ортогональной составляющей оцениваемого с погрешностью $\leqslant 0.3$ сигнала $\rho\big|_{\alpha=1.0,\,\varepsilon=0.3} = k_1 = 20$ для ИП$_1$ и $\rho\big|_{\alpha=1.0,\,\varepsilon=0.3} = k_2 = 13$ для ИП$_2$. Это означает, что существует достаточно широкий класс сигналов, которые могут быть измерены с с. к. погрешностью, не превосходящей 0.3, лишь с помощью ИВП с ИП$_1$.

Пример такого сигнала приведен на рис. 2, *г, д, е* (пунктир), где показано, что он хорошо восстанавливается с помощью ИВП с ИП$_1$ (рис. 2, *г*) и плохо с помощью ИВП с ИП$_2$ (рис. 2, *д, е*).

Для того чтобы такой сигнал можно было измерить на ИВП с $ИП_2$, необходимо увеличить ε в три с половиной раза, при этом значение эффективного ранга также будет равно 20. На рис. 2, *е* показано, что при таком условии сигнал может быть измерен и на ИВП с $ИП_2$, но с существенно худшим качеством.

Подчеркнем, что поскольку для ИП $[A, \sigma^2 I]$ размерность оцениваемой ортогональной составляющей сигнала $g(\cdot)$ с с. к. погрешностью, не превосходящей ε, конечна при любом $\varepsilon \geqslant 0$, то согласно замечанию 2, *задача интерпретации измерения* $\xi(\cdot)$ *с погрешностью, не превосходящей* ε, *эквивалентна конечномерной задаче.*

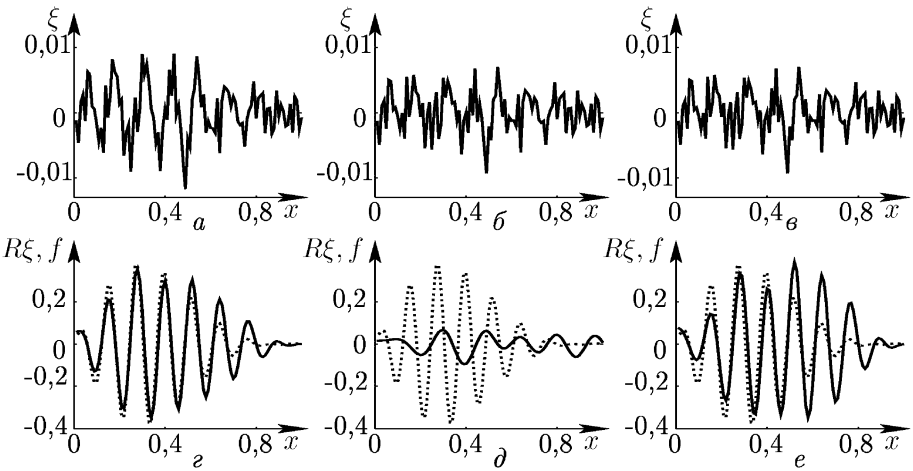

Рис. 2. (*а, б, в*) — выходные сигналы $\xi(\cdot)$ $ИП_1$ (*а*), $ИП_2$ (*б, в*), отвечающие одному и тому же входному сигналу $g(\cdot)$ $ИП_1$ и $ИП_2$, изображенному пунктиром на (*г, д, е*); (сплошные кривые *г, д, е*) — оценки ортогональных составляющих $g(\cdot)$: (*г*) — на выходе ИВП с $ИП_1$ при размерности $k_1 = 20$ (с. к. ошибка оценивания $\varepsilon = 0.3$), (*д*) — на выходе ИВП с $ИП_2$ при размерности $k_2 = 13$ (с. к. ошибка оценивания $\varepsilon = 0.3$), (*е*) — на выходе ИВП с $ИП_2$ при размерности $k_2 = 20$, которой сопутствует с. к. ошибка $\varepsilon = 1.3$

3.3.2. Качество ИВП первого порядка как средства измерения

При сравнении ИВП как средств измерений естественно отдавать предпочтение тем из них, модели которых обеспечивают синтез более широкого класса приборов U и меньшую погрешность редукции [25, 26, 22].

Рассмотрим условия, при которых ИВП с ИП $[A, \sigma^2 I]$ *равномерно не хуже* ИВП с ИП $[\widetilde{A}_1, \widetilde{\sigma}^2 I]$, то есть $[A_1, \sigma^2 I] \prec [\widetilde{A}_1, \widetilde{\sigma}^2 I]$, см. [22]. Речь идет об условиях, обеспечивающих выполнение неравенства $\sigma^2 \|\overline{UD}\|_2^2 \leqslant \widetilde{\sigma}^2 \|\overline{U\widetilde{D}}\|_2^2$ для любого ИП $[U, 0]$, выходной сигнал которого можно синтезировать на ИВП $[\widetilde{A}_1, \widetilde{\sigma}^2 I, U]$, то есть для любого U, удовлетворяющего условию $\|\overline{U\widetilde{D}}\|_2^2 < \infty$.

В монографии [25] показано, что $[A, \sigma^2 I] \prec [\widetilde{A}, \widetilde{\sigma}^2 I]$, если и только если[6] $\sigma^2 DD^* \leqslant \widetilde{\sigma}^2 \widetilde{D}\widetilde{D}^*$. Поскольку множество ИП $[U, 0]$, выходные сигналы которых могут быть синтезированы на ИВП первого порядка, не зависит от параметров ИП, качество ИВП $[A, \sigma^2 I, U]$ как конкретного ИП $[U, 0]$ определяется только величиной $\sigma^2 \|\overline{UD}\|_2^2$ с.к. погрешности редукции (15), а именно, чем меньше $\sigma^2 \|\overline{UD}\|_2^2$, тем лучше ИВП $[A, \sigma^2 I, U]$ как ИП $[U, 0]$. В частности, как ИП $[U, 0]$ ИВП $[A, \sigma^2 I, U]$ лучше, чем ИВП $[\widetilde{A}, \widetilde{\sigma}^2 I, U]$, если $\sigma^2 \|\overline{UD}\|_2^2 < \widetilde{\sigma}^2 \|\overline{U\widetilde{D}}\|_2^2$. На практике с. к. погрешность оценивания $Ug(\cdot)$, $g(\cdot) \in \mathcal{L}^2[0, 1]$, нередко оказывается неприемлемо большой. В случае ИП $[A, \sigma^2 I]$ о сигнале $g(\cdot)$ априори ничего не известно, и исследователь готов ограничиться составляющей сигнала $Ug(\cdot)$, которую можно оценить с устраивающей его точностью. Поскольку при этом естественно выбрать составляющую $Ug(\cdot)$ максимальной размерности, допускающую такую оценку, то актуальна задача построения оценки конечномерной ортогональной составляющей $Ug(\cdot)$ максимальной размерности, допускающей оценивание с априори заданной точностью.

Эта задача решается с помощью базиса модели $[A, \sigma^2 I, U]$ ИВП, на котором синтезируется фиксированный прибор $U \in (\mathcal{L}^2[0, 1] \to \mathcal{U})$; оценка вышеуказанной составляющей $Ug(\cdot)$ дается в виде частичной суммы ряда Фурье Ug по этому базису.

---

[6] Операторное неравенство $\sigma^2 DD^* \leqslant \widetilde{\sigma}^2 \widetilde{D}\widetilde{D}^*$ означает, что для любой функции $g(\cdot)$ из области определения $\mathcal{D}(DD^*)$ $(= \mathcal{D}(\widetilde{D}\widetilde{D}^*))$ операторов DD^* и $\widetilde{D}\widetilde{D}^*$ $\sigma^2(g(\cdot), DD^* g(\cdot)) \leqslant \widetilde{\sigma}^2(g(\cdot), \widetilde{D}\widetilde{D}^* g(\cdot))$.

Базис $\{s_j(\cdot)\}$ ИВП $[A, \sigma^2 I, U]$ аналогично базису $\{e_j(\cdot)\}$ (19) ИП $[A, \sigma^2 I]$ определяется как ортонормированная система собственных функций самосопряженного оператора $\overline{UDD^*U^*}$, упорядоченных по возрастанию собственных значений: $\overline{UDD^*U^*} s_j = \gamma_j^2 s_j$, $j = 1, 2, \ldots$, $\gamma_1^2 \leqslant \gamma_2^2 \leqslant \ldots$

Для любого $\varepsilon \geqslant 0$, определяющего верхнюю границу допустимой с. к. погрешности оценивания, частичная сумма $\sum\limits_{j=1}^{k} s_j(Ug, s_j)$ разложения оценки Ug по базису s_j (сравнительно с другими ортонормированными базисами евклидова пространства $\mathcal{U}$) будет иметь наибольшее число k, зависящее от ε, слагаемых, удовлетворяющих ограничению $\sigma^2 \sum\limits_{j=1}^{k} \|D^*U^*s_j\|^2 \leqslant \varepsilon$ на с. к. погрешность редукции. *Зависимость* $\rho(\varepsilon)$, $0 \leqslant \varepsilon < \infty$, где $\rho(\varepsilon) = \max\{k, \sigma^2 \sum\limits_{j=1}^{k} \|D^*U^*s_j\|^2 \leqslant \varepsilon\}$, *называемая эффективным рангом* ИВП $[A, \sigma^2 I, U]$, может служить для оценки качества ИВП как ИП $[U, 0]$: чем выше расположен график эффективного ранга, тем выше качество.

При этом вид базисных функций, по которым разлагается составляющая Ug, позволяет исследователю судить о том, какие детали этой составляющей сигнала Ug могут быть оценены и с какой точностью.

Теорема 2. *Пусть* $h = h(\alpha, \beta, \sigma, U)$ *— с. к. погрешность синтеза* ИП $[U, 0]$ *на* ИВП $[A(\alpha, \beta), \sigma^2 I, U]$. *Тогда график погрешности* $h = h(\alpha, \beta, \sigma, U)$ *синтеза* ИП $[U, 0]$ *на* ИВП $[A1(\alpha, \beta), \sigma^2 I, U]$ ИП $[U, 0]$ *как функция* α, β, $\alpha \neq 0$, *представляет собой эллиптический параболоид с точной нижней гранью в точке* $(\alpha = 0, \beta = 0)$, *равной нулю. Линиями уровня* $h(\alpha, \beta, \sigma, U) = \mathrm{const}$ *на плоскости* $(\sigma\alpha, \sigma\beta)$ *являются подобные эллипсы с общим центром в точке* $(0, 0)$.

Следствие 2. *Для любого ИП* $[U, 0]$, *допускающего синтез на ИВП* $[A(\alpha, \beta), \sigma^2 I, U]$, *необходимым и достаточным условием того, что при изменении параметров* α, β, σ *качество ИВП* $[A(\alpha, \beta), \sigma^2 I, U]$ *как ИП* $[U, 0]$ *не ухудшается, является такое изменение параметров* α, β σ, *при котором точка* $(\sigma\alpha, \sigma\beta)$ *остается внутри или на границе эллипса* $h(\alpha, \beta, \sigma, U) = \mathrm{const}$.

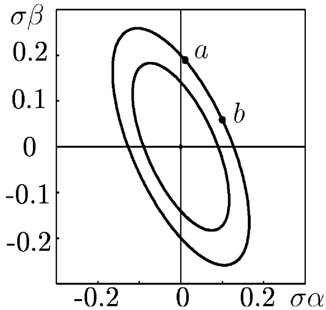

Рис. 3. Линии уровня с.к. погрешности синтеза выходного сигнала ИП $[U,0]$ на ИВП $[A,\sigma^2 I,U]$.

На рис. 3 изображены линии уровня для двух значений $h(\cdot,\cdot,\sigma,U) = h_i$, $i = 1,2$, с. к. погрешности. В качестве оператора U выбран ортогональный проектор на линейное подпространство $\mathcal{L}^2[0,1]$ функций, пропорциональных $\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)$, $x \in [0,1]$.

Подчеркнем, что каждая из двух отмеченных на рисунке точек $a \sim (\alpha = 0{,}01,\ \beta = 0{,}19)$ и $b \sim (\alpha = 0{,}1,\ \beta = 0{,}06)$ отвечает одному и тому же значению погрешности синтеза выходного сигнала ИП $[U,0]$ $(h/\sigma^2 = 0{,}04)$.

Это обстоятельство проиллюстрировано на рис. 4, где изображены результаты измерений (*а, б*) сигнала, представленного пунктирной кривой на рис. 4 *в* и *г*, а также результаты редукции $\overline{UD}\xi(\cdot)$, (*в, г* — сплошные кривые) для двух датчиков первого порядка, параметры α и β которых соответствуют точкам a (*а, в* — сплошные кривые) и b (*б, г* — сплошные кривые), отмеченным на рис. 3.

Все значения параметров $(\sigma\alpha,\sigma\beta)$ ИП $[A,\sigma^2 I]$, принадлежащие эллипсу, содержащему точки a,b на рис. 3, отвечают *одному и тому же значению с. к. погрешности*, характеризующему качество ИВП $[A(\alpha,\beta),\sigma^2 I,U]$ как ИП $[U,0]$. Вычислительный эксперимент, результаты которого представлены на рис. 4, наглядно подтверждает этот факт.

Следует обратить внимание на существенно различные результаты измерений $\xi(\cdot)$ (*а, б*) одного и того же сигнала $g(\cdot)$ (*в, г* — пунктир), выполненных на ИП, отвечающих соответственно точкам a и b на рис. 3, в то время как результаты редукции $\overline{UD}\xi(\cdot)$ для этих ИП практически совпадают (*в, г* — сплошные кривые), и близки к $g(\cdot)$ (*в, г* — пунктир).

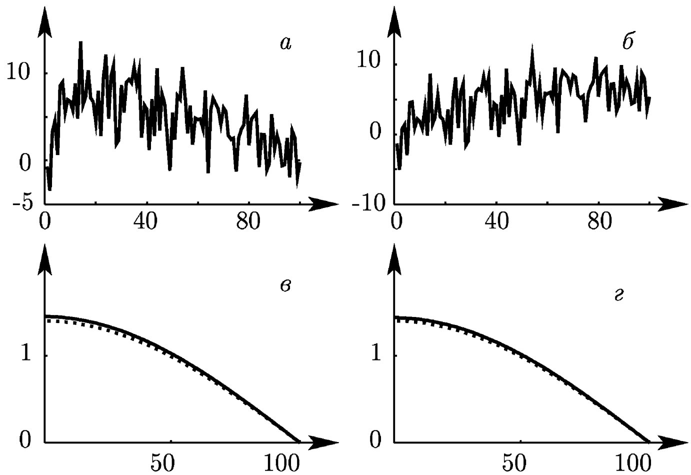

Рис. 4. Результаты (*а, б*) $\xi(\cdot)$ (14) измерений одного и того же сигнала $g(\cdot)$ (*в, г* — пунктирные кривые) и редукции измерений $R_*\xi(\cdot) = \overline{UD}\xi(\cdot)$ (*в, г* — сплошные кривые) для ИВП $[A, \sigma^2 I, U]$, отвечающих точкам a (кривые *а, в*) и b (кривые *б, г*) на рис. 3. U — ортогональный проектор на линейное подпространство $\mathcal{L}^2[0,1]$ функций, пропорциональных $\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)$, $x \in [0,1]$.

3.4. Модель неопределенного ИП $[\widetilde{A} = A(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}), \sigma^2 I]$

Пусть в (11) значения параметров ИП α и β точно неизвестны исследователю, но он может предложить распределения правдоподобий $t^{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}(\alpha, \beta)$ и доверий $\widetilde{t}^{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in [0,2]$ истинности своих суждений об их значениях, например, показанные на рис. 5, и его интересует свойства ИП как самого по себе (в частности, его эффективный ранг), так и в составе ИВП (при этом качество ИВП характеризуется среднеквадратичной погрешностью синтезируемой оценки и зависит от оператора U).

Тогда неопределенный эффективный ранг $\widetilde{\rho(\epsilon)} = \rho(\epsilon; \widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}), \epsilon \geqslant 0$ будет неопределенной функцией, причем правдоподобие ее равенства некоторой функции $r(\epsilon)$ равно правдоподобию равенства $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) =$

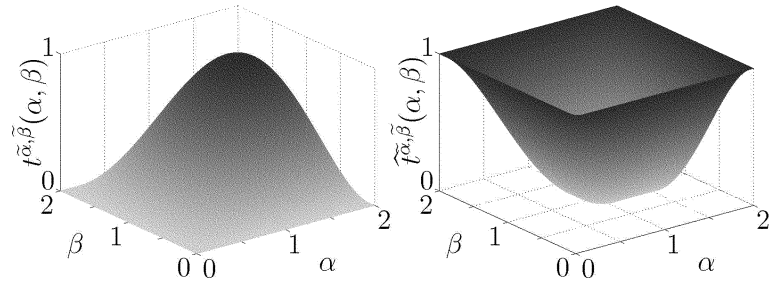

Рис. 5. Совместные распределения правдоподобий и доверий истинности суждений о значениях неопределенных элементов $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$, предложенные м.-и.

(α, β), если функция $r(\cdot)$ является эффективным рангом для этих значений параметров, и нулю, если таких значений не существует. Аналогично, доверие ее неравенства некоторой функции $r(\cdot)$ равно доверию неравенств $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \neq (\alpha, \beta)$, если функция $r(\cdot)$ является эффективным рангом для значений параметров α, β и единице, если такого значения не существует.

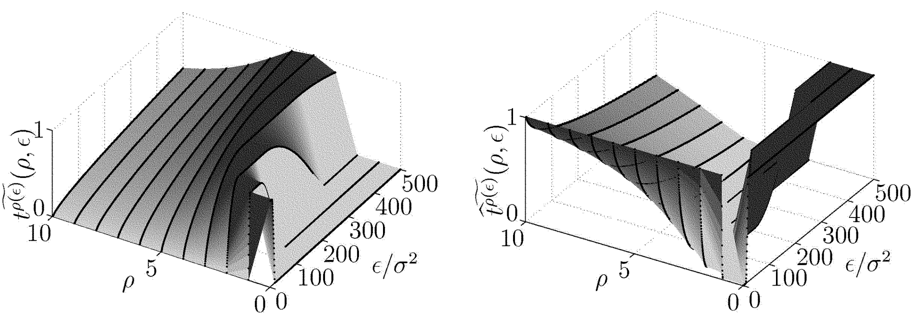

Рис. 6. Распределения правдоподобий и доверий истинности суждений о значениях неопределенного эффективного ранга ИП $\widetilde{\rho}(\epsilon), \epsilon \geqslant 0$.

На рис. 7 показаны распределения правдоподобий и доверий истинности значений неопределенных диагональных матричных элементов ковариационной матрицы шума на выходе вычислительного преобразователя при синтезе на вычислительном преобразователе ИВП оценки проекции $f(\cdot) \in \mathcal{L}^2[0, T]$ на линейную оболочку первых 7 собственных функций измерительного преобразователя.

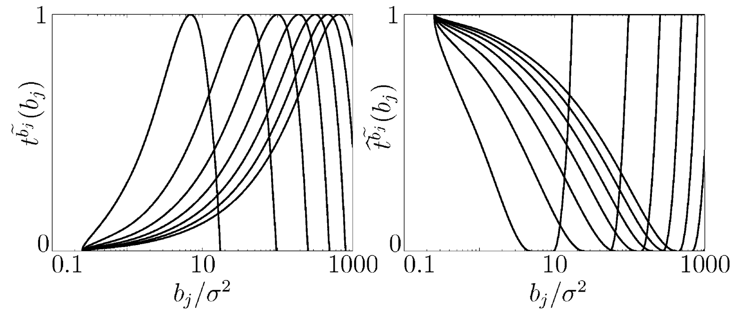

Рис. 7. Распределения правдоподобий и доверий истинности суждений о значениях неопределенных диагональных матричных элементах ковариационной матрицы оценки на выходе ИВП $\widetilde{b_j} = \mathbf{E}(\widetilde{R\xi} - \widetilde{\mathbf{E}R\xi}, \widetilde{z_j})^2 = \sigma^2\widetilde{\delta_j^2}$, слева направо $j = 1, \ldots, 7$.

Согласно теореме 2, при U — ортогональном проекторе на линейную оболочку функции $g(t) = \sin\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{t}{T}\right)$ как вектора в $\mathcal{L}^2[0,T]$ линии уровня с.к. погрешности h в зависимости от параметров ИП суть $\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha^2 A + 2\alpha\beta B + \beta^2 C = h/\sigma^2\}$, $A = \pi^2/4$, $B = C = 1$ (см. рис. 8), а распределения правдоподобий и доверий истинности значений с.к. погрешности оценки $R\xi$ будут иметь вид, показанный на рис. 9.

Распределения на рис. 9 описывают спектр шума на выходе ИВП, синтезирующего оценку сигнала на выходе фиксированного идеального ИП (в отличие от рис. 7, где идеальный ИП был выбран таким, чтобы с.к. погрешность оценивания была минимальной при заданной размерности сигнала на выходе).

Если исследователь задал распределения правдоподобий и доверий неопределенной с.к. погрешности синтеза интересующего его сигнала на выходе ИВП как на рис. 8, то меры распределений правдоподобий и доверий параметров ИВП можно однозначно восстановить только на минимальной σ-алгебре, содержащей эллипсы $\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha^2 A + 2\alpha\beta B + \beta^2 C = h/\sigma^2\}$, $h \in [0,+\infty)$, а распределения правдоподобий и доверий значений параметров, принадлежащих одному и тому же эллипсу, однозначно не восстанавливаются.

Рис. 8 и 9 позволяют исследователю определить, насколько достижимой является интересующая его точность синтезируемой ИВП

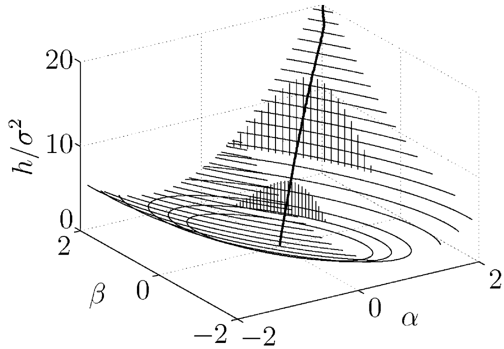

Рис. 8. Значения с.к. погрешности $h = h(\alpha, \beta, U) = \sigma^2(\pi^2\alpha^2/4 + 2\alpha\beta + \beta^2)$ синтезированного сигнала на выходе ИВП в зависимости от α и β и значения правдоподобий и доверий значений α и β при с.к. погрешности $h/\sigma^2 = 1.5$ и $h/\sigma^2 = 6$ для распределений как на рис. 5. Выделены положения максимумов правдоподобий суждений о значениях параметров ИП при фиксированных с.к. погрешностях.

оценки и при каких значениях параметров ИВП эта точность будет достигнута. Например, правдоподобие истинности суждения $A_h =$ «с.к. погрешность синтезируемой оценки ортогональной проекции $(Uf)(\cdot) = g(\cdot)(f, g)/\|g\|^2$ на линейную оболочку функции $g(\cdot) : g(t) = \sin\frac{\pi}{2}(1 - t)$ как вектора в $\mathcal{L}^2[0, T]$ не превосходит h» равно

$$\mathrm{Pl}(A_h) = \sup_{0 \leqslant h' \leqslant h} t^{\widetilde{h}}(h') = \begin{cases} t^{\widetilde{h}}(h), & \text{если}\, h < h_0, \\ 1, & \text{если}\, h \geqslant h_0, \end{cases}$$

где $h_0 = \min\{h \in [0, +\infty) : t^{\widetilde{h}}(h) = 1\}$ — минимальное значение с.к. погрешности, имеющее единичное правдоподобие.

3.5. Модель ИП $[A, \widetilde{\Sigma_\nu} = \Sigma_\nu(\widetilde{\sigma^2}, \widetilde{\lambda})]$

Теорема 3. *Пусть шум $\nu(\cdot)$ на выходе ИП первого порядка является коррелированным и $\mathbf{E}\nu(t_1)\nu(t_2) = \frac{\sigma^2}{2\lambda T}\exp(-\frac{|t_1 - t_2|}{\lambda T})$, $t_1, t_2 \in [0, T]$. Тогда собственный базис ИП и с.ф. оператора $D\Sigma_\nu D^*$ — решения задачи*

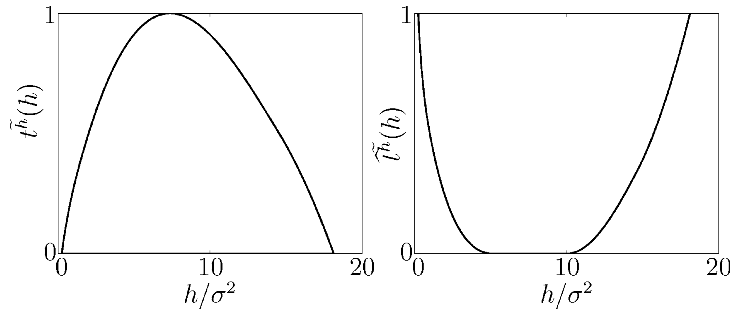

Рис. 9. Распределения правдоподобий и доверий истинности значений неопределенной с.к. погрешности $\widetilde{h} = h(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, U)$ синтезированного сигнала на выходе ИВП.

$$\begin{cases} (D\Sigma_\nu D^* z)(t) \stackrel{def}{=} \\ (\alpha T \frac{d}{dt} + \beta) \int\limits_0^T d\tau \, \frac{1}{2\lambda T} \exp(-\frac{|t-\tau|}{\lambda T})(-\alpha T z'(\tau) + \beta z(\tau)) = \delta^2 z(t), \\ \hfill t \in (0, T), \\ \int\limits_0^T d\tau \exp(-\frac{\tau}{\lambda T})(-\alpha T z'(\tau) + \beta z(\tau)) = 0, \\ z(T) = 0, \end{cases} \qquad (22)$$

суть $z_j(t) = q_j \sin a_j(1 - \frac{t}{T})$, $\delta_j^2 = \frac{\beta^2 + \alpha^2 a_j^2}{1 + \lambda^2 a_j^2}$, $j = 1, 2, \ldots$, *где* a_j *— положительный* j*-й по возрастанию при* $\frac{\alpha^2}{\beta^2} \geqslant \lambda^2$ *и по убыванию при* $\frac{\alpha^2}{\beta^2} \leqslant \lambda^2$ *корень уравнения* $a(\alpha - \beta\lambda)(\cos a - \exp(-1/\lambda)) + (\beta + a^2 \alpha\lambda) \sin a = 0$, $q_j = (\frac{T}{2} - \frac{T \sin 2a_k}{4a_k})^{-\frac{1}{2}}$.

Доказательство. Пусть $y(t) = \beta z(t) - \alpha T z'(t)$, $u(t) = \int\limits_0^t d\tau \, \exp(-\frac{t-\tau}{\lambda T}) y(\tau)$, $v(t) = \int\limits_t^T d\tau \, \exp(\frac{t-\tau}{\lambda T}) y(\tau)$. Тогда

$$\begin{aligned} (D\Sigma_\nu D^* z)(t) = (\alpha T \frac{d}{dt} + \beta)(\frac{u(t)}{2\lambda T} + \frac{v(t)}{2\lambda T}) = \beta(\frac{u(t)}{2\lambda T} + \frac{v(t)}{2\lambda T}) + \\ + \alpha T(-\frac{u(t)}{2\lambda^2 T^2} + \frac{v(t)}{2\lambda^2 T^2}) = \frac{(\beta\lambda - \alpha)u(t) + (\beta\lambda + \alpha)v(t)}{2\lambda^2 T} = \delta^2 z(t). \end{aligned} \qquad (23)$$

После двукратного дифференцирования (23) по t получаем

$$\frac{(\beta\lambda-\alpha)u(t)+(\beta\lambda+\alpha)v(t)-2\lambda^2T(\beta y(t)+\alpha Ty'(t))}{2\lambda^4T^3}=\delta^2 z''(t),$$

где $\beta y(t)+\alpha Ty'(t)=(DD^*z)(t)=-\alpha^2z''(t)+\beta z(t)$ и первые два слагаемых в числителе согласно (23) равны $2\lambda^2T\delta^2z(t)$, откуда

$$\delta^2z(t)+\alpha^2T^2z''(t)-\beta^2z(t)=\lambda^2T^2\delta^2z''(t).$$

Решения этого уравнения с учетом условия $z(T)=0$ имеют вид $z(t)=q\sin a(1-\frac{t}{T})$, где $a=\sqrt{\frac{\delta^2-\beta^2}{\alpha^2-\lambda^2\delta^2}}$, поэтому $\delta^2=\frac{\beta^2+\alpha^2a^2}{1+\lambda^2a^2}$. При этом условие $\int\limits_0^T d\tau\exp(-\frac{\tau}{\lambda T})(-\alpha Tz'(\tau)+\beta z(\tau))=0$ принимает вид $a(\alpha-\beta\lambda)(\cos a-\exp(-1/\lambda))+(\beta+a^2\alpha\lambda)\sin a=0$. Теорема доказана.

В отличие от собственных значений аналогичной задачи для ИП с белым шумом, последовательность собственных значений $\{\delta_k^2\}_{k\in\{1,2,\ldots\}}$ не возрастает неограниченно, а ограничена и имеют предельную точку $\frac{\alpha^2}{\lambda^2}$.

При предельном переходе $\lambda\to0$ решения уравнения $a(\alpha-\beta\lambda)(\cos a-\exp(-1/\lambda))+(\beta+a^2\alpha\lambda)\sin a=0$ стремятся к решениям уравнения $a\alpha\cos a+\beta\sin a=0$, $\delta_j^2=\frac{\beta^2+\alpha^2a_j^2}{1+\lambda^2a_j^2}\to\beta^2+\alpha^2a_j^2$, что соответствует случаю некоррелированности.

Пусть значения параметров ИП $\alpha=1$ и $\beta=1$ точно известны исследователю, а значения параметров σ^2 и λ — нет, и он может предложить распределения правдоподобий $t^{\widetilde{\lambda},\widetilde{\sigma^2}}(\lambda,\sigma^2)$ и доверий $\widehat{t}^{\widetilde{\lambda},\widetilde{\sigma^2}}(\lambda,\sigma^2)$ их значений, например, показанные на рис. 10.

Тогда эффективный ранг $\widetilde{\rho(\epsilon)}=\rho(\epsilon;\widetilde{\lambda},\widetilde{\sigma^2}),\epsilon\geqslant0$ будет неопределенной функцией, причем, аналогично случаю неопределенных параметров α и β, правдоподобие ее равенства некоторой функции $r(\epsilon)$ равно правдоподобию равенства $(\widetilde{\lambda},\widetilde{\sigma^2})=(\lambda,\sigma^2)$, если функция $r(\cdot)$ является эффективным рангом для этих значений параметров, и нулю, если таких значений не существует, доверие ее неравенства некоторой функции $r(\cdot)$ равно доверию неравенства $(\widetilde{\lambda},\widetilde{\sigma^2})\neq(\lambda,\sigma^2)$, если функция $r(\cdot)$ является эффективным рангом для значений параметров λ, σ^2 и единице, если такого значения не существует.

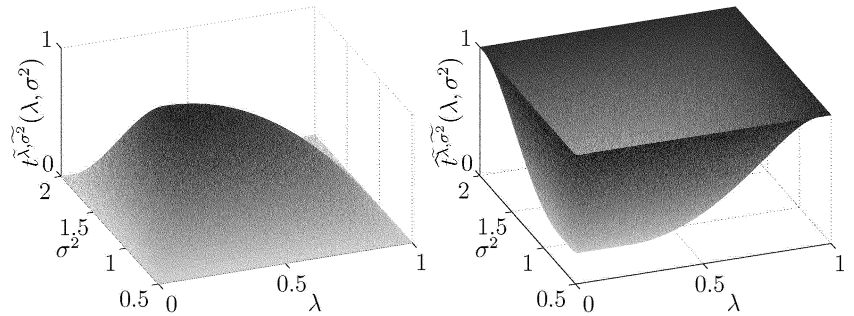

Рис. 10. Совместные распределения правдоподобий и доверий истинности суждений о значениях неопределенных элементов $\widetilde{\lambda}$ и $\widetilde{\sigma^2}$.

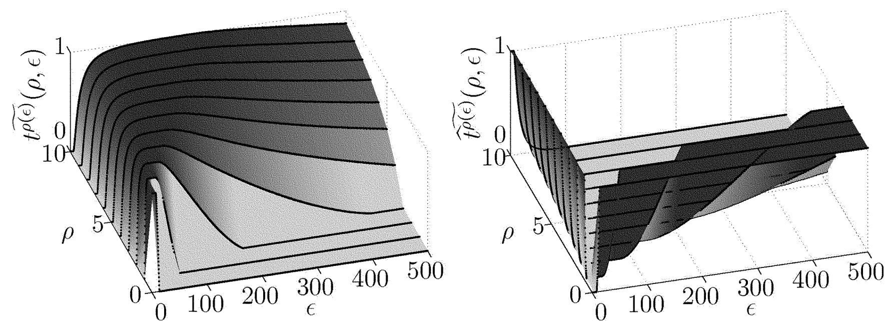

Рис. 11. Распределения правдоподобий и доверий истинности истинности суждений о значениях неопределенного эффективного ранга ИП $\widetilde{\rho}(\epsilon), \epsilon \geqslant 0$.

На рис. 12 показаны распределения правдоподобий и доверий неопределенных диагональных матричных элементов ковариационной матрицы шума на выходе вычислительного преобразователя при синтезе на вычислительном преобразователе ИВП оценки проекции $f(\cdot) \in \mathcal{L}^2[0,T]$ на линейную оболочку первых 7 собственных функций измерительного преобразователя.

В случае идеального ИП, описываемого таким линейным оператором U, что замыкание оператора $UD\Sigma_\nu^{1/2}$ — оператор Гильберта–Шмидта, величина с.к. погрешности синтезируемой оценки $R\xi$ величины Uf равна $h(\alpha,\beta,\lambda,\sigma^2,U) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \delta_j^2 \|Uz_j\|^2$.

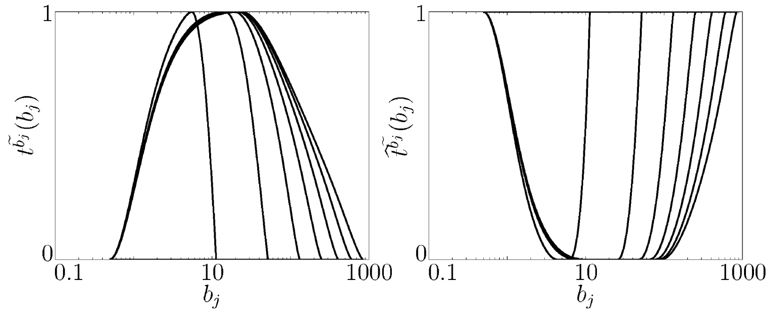

Рис. 12. Распределения правдоподобий и доверий истинности суждений о неопределенных диагональных матричных элементах ковариационной матрицы оценки на выходе ИВП $\widetilde{b_j} = \mathbf{E}(\widetilde{R\xi} - \widetilde{\mathbf{E}R\xi}, \widetilde{z}_j)^2 = \sigma^2\widetilde{\delta_j^2}$, слева направо $j = 1, \ldots, 7$.

Распределения правдоподобий и доверий неопределенной с.к погрешности оценки проекции на линейную оболочку функции $g(\cdot)$: $g(t) = \sin\frac{\pi}{2}(1 - \frac{t}{T})$ как вектора в $\mathcal{L}^2[0, T]$ показаны на рис. 13.

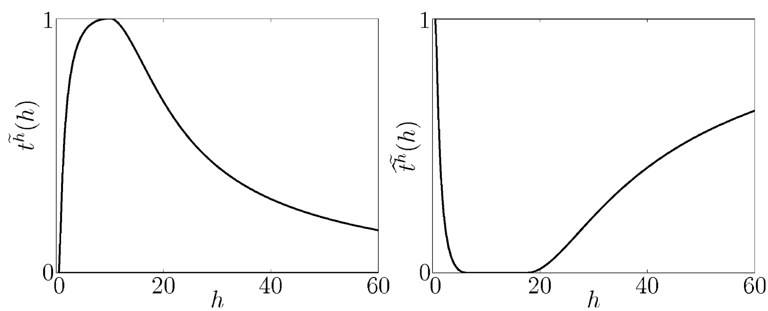

Рис. 13. Распределения правдоподобий и доверий истинности значений неопределенной с.к. погрешности $\widetilde{h} = h(\alpha, \beta, \widetilde{\lambda}, \widetilde{\sigma^2}, U)$ синтезированного сигнала на выходе ИВП.

4. Восстановление профиля электронной концентрации по ионограмме при неопределенной высоте «нижней границы ионосферы»

При радиозондировании ионосферы измеряются действующие высоты, пропорциональные временам вертикального распространения радиоимпульсов до высоты их отражения и обратно для заданного набора несущих частот $\{f_i\}, i \in I$. Если считать ионосферу плоскослоистой, то в приближении геометрической оптики действующие высоты $h_{eff}(\cdot)$ зависят от «профиля электронной концентрации» в ионосфере следующим образом [29]:

$$h_{eff}(f_i) = \int\limits_0^{z_{ref}(f_i)} n_{gr}(f_i, f_{pl}(z))dz, i \in I, \tag{24}$$

где $f_{pl}(z) = \sqrt{\frac{N(z)e^2}{\pi m_e}}$ — плазменная частота электронов на высоте z, $N(z)$ — концентрация электронов на высоте z, $n_{gr}(f_i, f_{pl})$ — вещественная часть группового показателя преломления (отношения скорости света к групповой скорости) для радиоимпульса, имеющего несущую частоту f_i, и слоя плазмы с плазменной частотой f_{pl}, $z_{ref}(f_i) = \inf\{z \in [0, +\infty) : n_{ph}(f_i, f_{pl}(z)) = 0\}$ — высота отражения радиоимпульса, имеющего несущую частоту f_i, $n_{ph}(f_i, f_{pl})$ — вещественная часть фазового показателя преломления для радиоволны, имеющей частоту f_i, и слоя плазмы с плазменной частотой f_{pl}.

По этим данным наблюдений необходимо восстановить зависимость концентрации электронов в ионосфере от высоты. При этом, как правило, произвольно низкие частоты при зондировании использовать невозможно (в частности, из-за существенного изменения условий излучения, отражения и приема длинных радиоволн), поэтому действующие высоты измеряются для частот, превышающих нижний предел частоты ионосферной станции.

Пусть концентрация электронов строго возрастает при увеличении высоты, и нужно оценить по ионограмме высоты отражений радиоимпульсов с частотами $\{f_i\}$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда уравнения (24) подстановкой $z = z_{ref}(f)$ приводятся к виду

$$h_{eff}(f_i) = z_0 + \int\limits_0^{f_i} n_{gr}(f_i, f_{pl}) \frac{dz_{ref}}{df_{pl}} df_{pl} = z_0 + \sum_{j=1}^{i} \int\limits_{f_{j-1}}^{f_j} n_{gr}(f_i, f_{pl}) \frac{dz_{ref}}{df_{pl}} df_{pl}, \tag{25}$$

где z_0 — высота, для которой $f_{pl}(z) = 0\ \forall z \in [0, z_0]$ («высота нижней границы ионосферы»), $f_0 = 0$, $z_{ref}(f_0) \stackrel{\text{def}}{=} z_0$. Пусть $A_{ion} : \mathcal{L}^2[0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор, заданный равенством

$$(A_{ion} h(\cdot))_i = \int\limits_0^{f_i} n_{gr}(f_i, f_{pl}) \frac{dh}{df_{pl}} df_{pl},$$

тогда уравнение (25) принимает вид $\xi = A_{ion} z_{eff}$, где $\xi_i = h_{eff}(f_i) - z_0$. Уравнение (25) может быть решено относительно $\{z_{ref}(f_i)\}$ с помощью метода тонких слоев [29], в котором предполагается, что между высотами $z_{ref}(f_{j-1})$ и $z_{ref}(f_j)$ зависимость плазменной частоты от высоты является линейной. Тогда

$$h_{eff}(f_i) = z_0 + \sum_{j=1}^{i} (z_{ref}(f_j) - z_{ref}(f_{j-1})) \frac{1}{f_j - f_{j-1}} \int\limits_{f_{j-1}}^{f_j} n_{gr}(f_i, f_{pl}) df_{pl}. \tag{26}$$

Это уравнение линейно по $\{z_{ref}(f_i)\}$.

Пусть используются только данные об отражении обыкновенной волны (волны, поляризованной так, что высота ее отражения не зависит от силы магнитного поля), гиромагнитная частота $f_H = 1.2$ МГц, радиоволны распространяются под углом $23^\circ 16'$ к силовым линиям магнитного поля, действительная зависимость плазменной частоты от высоты показана на рис. 15 и исследователь задал распределения правдоподобий и доверий значений высот нижней границы ионосферы как на рис. 14.

Тогда распределения правдоподобий и доверий высот отражений для частот 1, 1.4, 2 МГц, полученных в результате решения уравнения (25) будут иметь вид, показанный на рис. 16. Исследователь может сравнить полученные распределения (для частот, для которых отраженные сигналы непосредственно наблюдаются) со своими

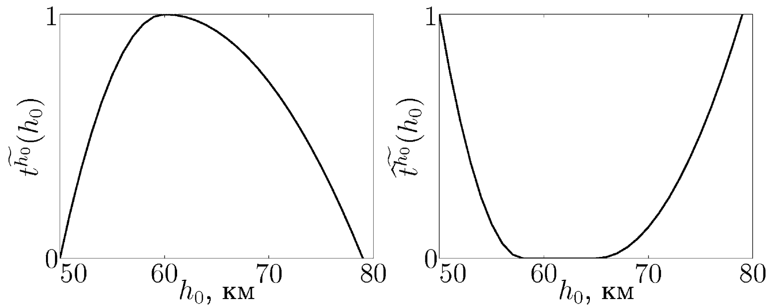

Рис. 14. Распределения правдоподобий и доверий неопределенного элемента — высоты нижней границы ионосферы $\widetilde{h_0}$.

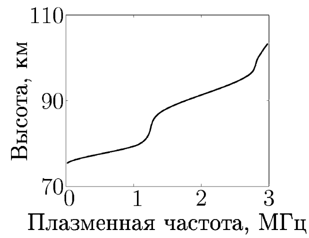

Рис. 15. Зависимость плазменной частоты от высоты.

априорными представлениями о правдоподобии значений высот отражений и скорректировать их и исходное распределение. Таким образом он может частично скомпенсировать отсутствие наблюдений при низких частотах.

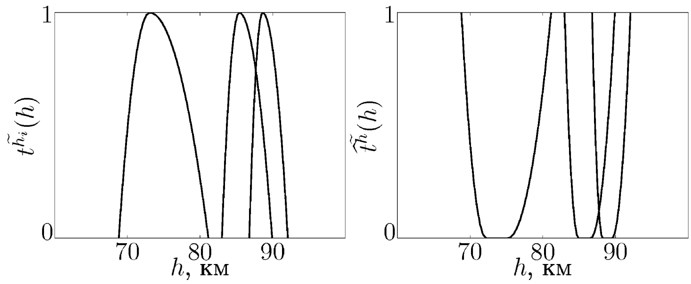

Рис. 16. Распределения правдоподобий и доверий истинностей высот отражений h_i радиоволн с частотами 1, 1.6, 2 МГц (слева направо).

5. Маятник Максвелла, имеющий неопределенный момент инерции

Маятник Максвелла представляет собой диск массы m, ось которого имеет радиус r и подвешена на двух накрученных на нее нерастяжимых нитях. При наматывании нитей на ось диска маятник поднимается вверх. Если маятник отпустить, он будет совершать возвратно-поступательное движение в вертикальной плоскости при одновременном вращении диска маятника вокруг горизонтальной оси. Пусть момент инерции маятника Максвелла определяется с помощью измерения времени его опускания:

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}\left(\frac{J}{mr^2} + 1\right)},$$

где J — момент инерции, h — величина перемещения маятника, T — время опускания, g — ускорение свободного падения.

Если исследователь может предложить распределения правдоподобий и доверий момента инерции как на рис. 17, то распределения правдоподобий и доверий значений времени опускания будут иметь вид, показанный на рис. 18.

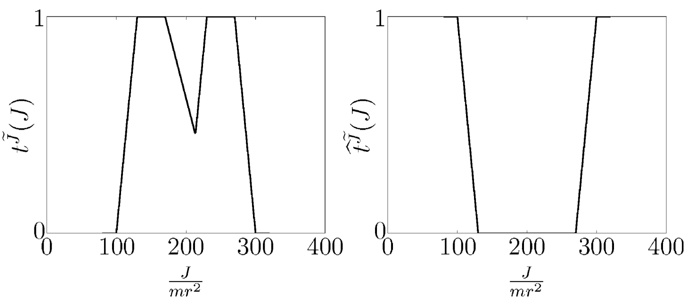

Рис. 17. Распределения правдоподобий и доверий истинностей суждений о значениях J момента инерции маятника Максвелла.

Пусть время опускания измеряется со случайной погрешностью, имеющей нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией σ^2 (то есть в терминах ИВП $\xi_i = A(J) + \nu$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, где n — число измерений, $A(J) = T = \sqrt{\frac{2h}{g}(\frac{J}{mr^2} + 1)}$,

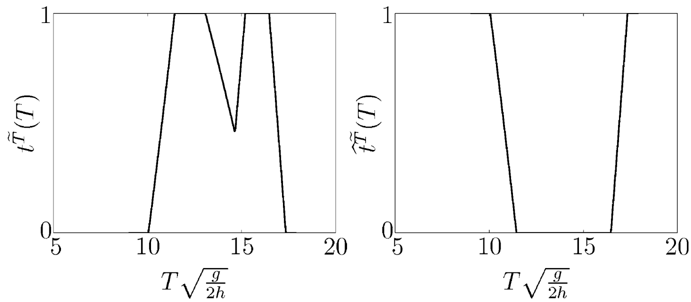

Рис. 18. Распределения правдоподобий и доверий истинностей суждений о времени T опускания маятника Максвелла.

ковариационный оператор шума $\Sigma_\nu = \sigma^2 I$), и исследователь хочет построить статистическую модель неопределенного элемента $\widetilde{J}$ по данным наблюдений в качестве эмпирической модели его субъективных суждений о возможных значениях J. Такая модель может быть построена с помощью оценивающих множеств максимального правдоподобия:

$$t^{\widetilde{J}}(J) = 1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{n}{2\sigma^2}}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i - \sqrt{(\frac{J}{mr^2}+1)\frac{2h}{g}}\right|\right),$$

где n — число измерений, T_i — результат i-го измерения, $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x \exp(-t^2)dt$. При этом оценка максимального правдоподобия

$$J_{ML} = mr^2\left(-1 + \frac{g}{2h}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} T_i\right)^2\right)$$

всегда будет иметь правдоподобие 1. Если исследователь построил модель неопределенного элемента $\widetilde{J}$ до наблюдений и считает, что согласие его модели неопределенного элемента с результатами наблюдений удовлетворительное, то он может использовать статистическую модель неопределенного элемента $x(\omega^{(n)})$ для коррекции своей модели, применив методы построения «коллективной экспертизы» [1].

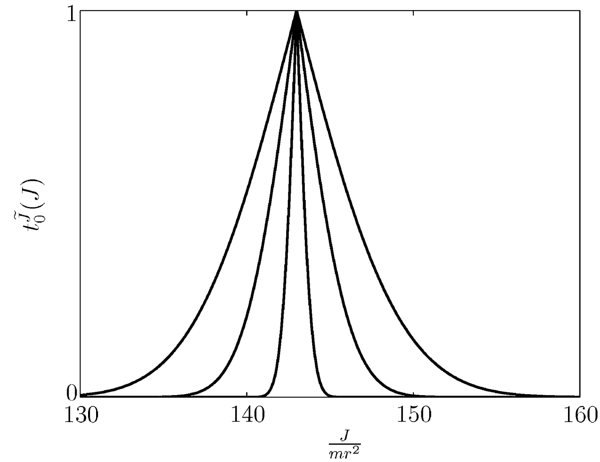

Рис. 19. Распределение правдоподобий истинности суждений о моменте инерции, восстановленное по результатам наблюдений. $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} T_i = 6$ с, $\frac{2h}{g} = 0.25$ с^2, $\sigma = 0.1$ с, $n = 1, 4, 50$. Полученная статистическая модель неопределенного элемента $\widetilde{J}$ может быть использована для коррекции исходных представлений исследователя о правдоподобиях различных значений момента инерции маятника Максвелла.

Список литературы

[1] Пытьев Ю. П. Возможность как альтернатива вероятности. — 2 изд. — М.: Физматлит, 2013.

[2] Терано Т., Асаи К., Сугэно М. Прикладные нечеткие системы. — М.: Мир, 1993.

[3] Танака К. Итоги рассмотрения факторов неопределенности и неясности в инженерном искусстве // Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения. Ред. Р. Ягер. — М.: Радио и связь, 1986. — С. 37–50.

[4] Пытьев Ю. П. Моделирование субъективных суждений модельера-исследователя о модели объекта исследования // Математическое моделирование. — 2013. Т. 25, № 4. — С. 102–125.

[5] Cowell R. G., Dawid A. P., Lauritzen S. L., Spiegelhalter D. J. Probabilistic Networks and Expert Systems. — New York: Springer-Verlag, 1999.

[6] Тулупьев А. Л., Николенко С. И., Сироткин А. В. Байесовские сети: Логико-вероятностный подход. — СПб.: Наука, 2006.

[7] Jaynes E. T. Prior Probabilities // IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics. — 1968. Vol. 4, N 3. — P. 227–241.

[8] Jeffreys H. An Invariant Form for the Prior Probability in Estimation Problems // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. — 1946. Vol. 186, N 1007. — P. 453–461.

[9] Shafer G. A Mathematical Theory of Evidence. — Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1976.

[10] Zadeh L. A simple view of the Dempster – Shafer Theory of Evidence and its implication for the rule of combination // The AI Magazine. — 1986. Vol. 7, N 2. — P. 85–90.

[11] Wang P. A Defect in Dempster – Shafer Theory // Proceedings of the Tenth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI-94). — San Francisco, CA, 1994. — P. 560–566.

[12] Yager R. R. On the Dempster – Shafer framework and new combination rules // Inf. Sci. — 1987. Vol. 41, N 2. — P. 93–137.

[13] Inagaki T. Interdependence between safety-control policy and multiple-sensor schemes via Dempster – Shafer theory // IEEE Transactions on Reliability. — 1991. Vol. 40, N 2. — P. 182–188.

[14] Dubois D., Prade H. On the Combination of Evidence in Various Mathematical Framework // Reliability Data Collection and Analysis / Ed. by J. Flamm, T. Luisi. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992. — P. 213–241.

[15] Smarandache F. Unification of Fusion Theories (UFT) // International Journal of Applied Mathematics & Statistics. — 2004. Vol. 2., N D04. — P. 1–14.

[16] Kłopotek M. A., Wierzchoń S. T. Empirical Models for the Dempster – Shafer Theory // Studies in Fuzziness and Soft Computing. — 2002. Vol. 88: Belief Functions in Business Decisions. — P. 62–112.

[17] Josang A. A Logic for Uncertain Probabilities // International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems. — 2001. Vol. 9, N 3. — P. 279–311.

[18] Josang A., Hankin R. Interpretation and Fusion of Hyper Opinions in Subjective Logic // 15th International Conference on Information Fusion (FUSION 2012). — Singapore, 2012. — P. 1225–1232.

[19] Josang A. Multi-Agent Preference Combination using Subjective Logic // 11th Workshop on Preferences and Soft Constraints (SofT'11). — Perugia, 2011. — P. 61–75.

[20] Bhavsar V. C., Mironov A. M. Fuzzy modal logics // Proceedings of Workshop on Multi-Valued Logic Programming and Applications (MVLPA 2006). — Seattle, WA, 2006. — P. 73–88.

[21] Миронов А. М. Нечеткие модальные логики // Интеллектуальные системы. — 2007. Т. 11, вып. 1–4. — С. 219–260.

[22] Пытьев Ю. П. Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем. — 3 изд. — М.: Физматлит, 2012.

[23] Уилкс С. Математическая статистика. — М.: Наука, 1967.

[24] Азизов А. М., Гордов А. Н. Точность измерительных преобразователей. — Л.: Энергия, 1975.

[25] Пытьев Ю. П. Математические методы интерпретации эксперимента. — М.: Высшая школа, 1989.

[26] Пытьев Ю. П. Измерительно-вычислительный преобразователь как средство измерения // Автоматика и телемеханика. — 2010. № 2. — С. 141–158.

[27] Пытьев Ю. П. К теории измерительно-вычислительных систем минимаксного типа // Математическое моделирование. — 1991. Т. 3, № 10. — С. 65–79.

[28] Бондаренко С. П., Пытьев Ю. П. Об эффективной размерности модели линейных измерений с ошибкой // ЖВМиМФ. — 1995. Т. 35, № 1. — С. 6–23.

[29] Дэвис К. Радиоволны в ионосфере. — М.: Мир, 1973.