

О некоторых свойствах автоматов с магазинной памятью

И. Е. Иванов

В работе доказывается свойство сохранения периодических последовательностей автоматами с магазинной памятью и исследуются оценки на длину периода выходящей последовательности в зависимости от периода входящей и характеристик автомата.

Ключевые слова: автомат с магазинной памятью, детерминированная функция, периодические последовательности.

Введение

Автомат с магазинной памятью является акцептором контекстно-свободных языков [1]. По большей части его исследование находилось в плоскости теории формальных грамматик. В работе [2] была сделана попытка найти различия конечных автоматов и автоматов с магазинной памятью в рамках задачи описания классов вычислимых функций, вычисляемых данными устройствами. Оказывается, что как преобразователи последовательностей детерминированные автоматы с магазинной памятью почти не изучались, в отличие от конечных автоматов [3].

Инициальным детерминированным автоматом с магазинной памятью будем называть «девятку»

$$P = \{A, Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0\},$$

где A — входной алфавит, Q — конечное множество состояний, B — выходной алфавит, Γ — алфавит памяти (алфавит ленты магазина), $\varphi : A \times Q \times (\Gamma \cup \lambda) \rightarrow Q$ — функция переходов, $\psi : A \times Q \times (\Gamma \cup \lambda) \rightarrow B$ — функция выхода, $\eta : A \times Q \times (\Gamma \cup \lambda) \rightarrow \Gamma^*$ — функция памяти, $q_0 \in Q$ — начальное состояние, $\gamma_0 \in \Gamma^*$ — начальная запись в магазине.

Функционирование P можно определить с помощью системы канонических уравнений, которые задают в каждый момент времени t состояние автомата $q(t)$, записанное в магазине слово $\gamma(t)$, и выход автомата $b(t)$ при подаче на вход $a(t)$:

$$\begin{cases} q(0) = q_0, \\ \gamma(0) = \gamma_0, \\ z(t) = LS(\gamma(t)), \\ q(t+1) = \varphi(a(t), q(t), z(t)), \\ \gamma(t+1) = S(\gamma(t))\eta(a(t), q(t), z(t)), \\ b(t) = \psi(a(t), q(t), z(t)), \end{cases}$$

где $LS : \Gamma^* \rightarrow \Gamma \cup \{\lambda\}$ возвращает последний символ при подаче непустого слова и $LS(\lambda) = \lambda$, а $S : \Gamma^* \rightarrow \Gamma^*$ — стирает последний символ входного слова и $S(\lambda) = \lambda$.

Автомат с магазинной памятью определяет детерминированную функцию $f : A^* \rightarrow B^*$. Обозначим $\mathcal{M}(A, B)$ множество детерминированных функций, порождаемых автоматами с магазинной памятью. Отметим, что $\mathcal{M}(A, B)$ содержит множество ограниченно-детерминированных функций.

1. Свойство сохранения периодических последовательностей

Лемма 1. Пусть фиксировано $\alpha = a(0)a(1)\dots \in A^\infty$. Тогда системы уравнений

$$\begin{cases} q(0) = q_0, \\ \gamma(0) = \gamma_0, \\ z(t) = LS(\gamma(t)), \\ q(t+1) = \varphi(a(t), q(t), z(t)), \\ \gamma(t+1) = S(\gamma(t))\eta(a(t), q(t), z(t)), \\ b(t) = \psi(a(t), q(t), z(t)) \end{cases} \quad (1)$$

и

$$\begin{cases} q'(0) = q_0, \\ \gamma'(0) = \gamma_0, \\ z'(t) = LS(\gamma'(t)), \\ q'(t+1) = \varphi(a(t), q'(t), z'(t)), \\ d(t+1) = \max\{\min_{l \geq t+1} |\gamma(l)|, 1\} - 1, \\ \gamma'(t+1) = \gamma(t+1) \lfloor_{|\gamma(t+1)| - d(t+1)}, \\ b'(t) = \psi(a(t), q'(t), z'(t)) \end{cases} \quad (2)$$

таковы, что

$$\forall t \quad q(t) = q'(t), \quad z(t) = z'(t), \quad b(t) = b'(t).$$

Доказательство. Докажем лемму по индукции. База. При $t = 0$ утверждение, очевидно, выполнено. Шаг индукции. Пусть при $t \leq k$ утверждение выполнено. Значит, $q(t) = q'(t)$, $z(t) = z'(t)$. Отсюда следует, что $q(t+1) = q'(t+1)$, $b(t+1) = b'(t+1)$. покажем, что $z(t+1) = z'(t+1)$. Если $\eta(a(t), q(t), z(t)) \neq \lambda$, то это очевидно. Пусть $\eta(a(t), q(t), z(t)) = \lambda$ и $z(t+1) \neq z'(t+1)$. Это означает, что $z'(t+1) = \lambda$ (и подавно $\gamma'(t+1) = \lambda$), так как $\gamma'(t+1)$ по определению является суффиксом $\gamma(t+1)$. То есть $|\gamma(t+1)| = \min_{l \geq t+1} |\gamma(l)|$. Следовательно, $|\gamma'(t+1)| = 1$, что противоречит тому, что $z'(t+1) = \lambda$. Значит, $z(t+1) = z'(t+1)$ и лемма доказана.

Теорема 1. Пусть $f : A^* \rightarrow B^*$ и $f \in \mathcal{M}(A, B)$. Тогда f преобразует периодические сверхслова в периодические.

Доказательство. Пусть $P = \{A, Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0\}$ автомат с магазинной памятью, порождающий f . Функционирование P задает система уравнений (1). По лемме 1 можно задавать $q(t), z(t), b(t)$ системой уравнений (2). Определим $d_k = \min_{t \geq k} |\gamma(t)|$, причем этот минимум достигается для любого k . Значит, существует возрастающая последовательность целых чисел n_k (в которых и достигается минимум) такая, что $|\gamma'(n_k)| = 1$.

Не ограничивая общности, будем считать, что все $\gamma'(n_k)$ одинаковы (иначе выберем из n_k подпоследовательность с указанным свойством и будем иметь дело с ней). Очевидно,

$$\exists i, j, N : \gamma'(n_i) = \gamma'(n_j), \quad q(n_i) = q(n_j), \quad z(n_i) = z(n_j), \quad n_j - n_i = N\tau.$$

Докажем, что $\forall t \geq n_i \quad z(t) = z(t + N\tau), q(t) = q(t + N\tau), \gamma'(t) = \gamma'(t + N\tau)$ по индукции. База доказана выше. Шаг индукции. Пусть для некоторого t выполнено $z(t) = z(t + N\tau), q(t) = q(t + N\tau), \gamma'(t) = \gamma'(t + N\tau)$, по условию $a(t) = a(t + N\tau)$. Тогда в силу канонических уравнений $z(t+1) = z(t+1 + N\tau), q(t+1) = q(t+1 + N\tau), \gamma'(t+1) = \gamma'(t+1 + N\tau)$.

Значит, последовательности $z(t), q(t)$ будут являться периодическими с периодом вида $N\tau$. Тогда будет периодическим и сверхслово $\beta = b(0)b(1)\dots \in B^\infty$ с аналогичным периодом, что и завершает доказательство теоремы.

Следствие 1. *Автономный автомат с магазинной памятью генерирует периодическую последовательность.*

Следствие 2. *Для последовательности $\gamma(t)$ автономного автомата существует 3 альтернативы:*

1. *Последовательность $\gamma(t)$ периодическая и пустое слово в ней встречается бесконечное количество раз.*
2. *Последовательность $\gamma(t)$ периодическая и пустое слово в ней встречается конечное количество раз.*
3. *Последовательность $\gamma(t)$ не является периодической.*

Из доказательства теоремы не следует никаких соотношений на длину периодов входного и выходного сверхслов. Следующую часть исследования посвятим решению этой задачи.

2. Оценки длины периода выхода

Рассмотрим автономный автомат с магазинной памятью $P = \{Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0\}$, удовлетворяющий системе канонических уравнений:

$$\begin{cases} q(0) = q_0, \\ \gamma(0) = \gamma_0, \\ z(t) = LS(\gamma(t)), \\ q(t+1) = \varphi(q(t), z(t)), \\ \gamma(t+1) = S(\gamma(t))\eta(q(t), z(t)), \\ b(t) = \psi(q(t), z(t)). \end{cases} \quad (3)$$

Обозначим $n = |Q|$, $m = |\Gamma|$, $k = \max_{(q,z) \in Q \times \Gamma \cup \{\lambda\}} |\eta(q, z)|$ и будем говорить, что $P \in \mathcal{M}(n, m, k)$. Из доказательства теоремы 1 последовательности $z(t), q(t), b(t)$ являются периодическими с наименьшей длиной периода $s = S(P)$. Далее мы будем заниматься поиском функции

$$L(n, m, k) = \max_{P \in \mathcal{M}(n, m, k)} S(P).$$

Для автомата P рассмотрим функции $\omega(q, z) : Q \times \Gamma^* \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ и $\pi(q, z) : Q \times \Gamma^* \rightarrow Q$, которые формально определим следующим образом. Пусть автомат находится в состоянии q , а в магазине лежит слово z . Если существует такое минимальное положительное количество тактов τ работы автомата, что магазин становится пустым, а автомат переходит в состояние q' , то положим, что $\omega(q, z) = \tau$, а $\pi(q, z) = q'$ иначе $\omega(q, z) = \infty$, а значение $\pi(q, z)$ не определено. Рассмотрим свойства этих функций. Пусть автомат находится в состоянии q , а в магазине лежит слово $z = z_1 z_2 \dots z_l$, где $l > 1$. Тогда выполнено

$$\omega(q, z) = \omega(q, z_1 z_2 \dots z_l) = 1 + \omega(q, z_l) + \omega(\pi(q, z_l), z_1 z_2 \dots z_{l-1})$$

и

$$\pi(q, z) = \pi(q, z_1 z_2 \dots z_l) = \pi(\pi(q, z_l), z_1 z_2 \dots z_{l-1}),$$

если $\omega(q, z_l)$ и $\omega(\pi(q, z_l), z_1 z_2 \dots z_{l-1})$ — конечны.

Далее, не ограничивая общности, будем считать, что автомат генерирует периодическую последовательность без предпериода и магазин является пустым в начале.

Лемма 2. Пусть P — автономный автомат с магазинной памятью и последовательность $\gamma(t)$ — периодическая и содержит пустое слово бесконечное количество раз. Тогда

$$L(n, m, k) \leq \sum_{i=0}^{nm} k^i.$$

Доказательство. Очевидно, что для всех достижимых пар из $Q \times \Gamma$ определены функции ω и π . Причем для каждого правила записи в магазин $\eta(q, z) = \gamma(1) \dots \gamma(l)$ можно записать, что

$$\omega(q, z) = 1 + \omega(\varphi(q, z), \gamma(l)) + \omega(q_l, \gamma(l), \gamma(l-1)) + \dots + \omega(q_1, \gamma(1)),$$

где $q_i = \varphi(q, z)$, и $q_i = \pi(q_{i+1}, \gamma(i+1))$.

Таким образом, можно составить систему линейных уравнений на значения $w(q, z)$. Пусть вектор $\vec{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_{nm})$ — решение этой системы, причем упорядоченное по возрастанию. Очевидно, что $\omega_1 = 1$, $\omega_i \leq 1 + k\omega_{i-1}$ при $i > 1$. Из этих соотношений, следует, что

$$\omega_i \leq \sum_{j=0}^{i-1} k^j.$$

Значит, длина периода $\tau = \omega(q, \lambda) \leq 1 + k\omega_1 \leq \sum_{i=0}^{nm} k^i$, что и требовалось доказать.

Лемма 3. Пусть P — автономный автомат с магазинной памятью и последовательность $\gamma(t)$ — периодическая и содержит пустое слово конечное количество раз. Тогда

$$L(n, m, k) \leq \sum_{i=0}^{nm} k^i.$$

Доказательство. Пусть τ — период последовательности γ . Рассмотрим $l = \min_{1 < t < \tau} |\gamma(t)|$. Обозначим $\gamma' = \gamma(t_0)$ и $q' = q(t_0)$, где t_0 таково, что $|\gamma(t_0)| = l$. Не ограничивая общности рассуждения, можно считать, что $\gamma_0 = \gamma'$ и $q_0 = q'$. Рассмотрим автомат P' , который получится из автомата P заменой начального слова в магазине на $LS(\gamma')$. Очевидно, что P и P' генерируют одни и те же периодические последовательности. Теперь изменим поведение автомата P' следующим образом. Тот такт работы, когда у автомата P' в магазине находится однобуквенное слово $LS(\gamma')$, а сам автомат находится в состоянии q' , разобьем на два такта: в первый такт мы стираем $LS(\gamma')$ и остаемся в том же состоянии q' , а во втором такте пишем в магазин нужное слово и переходим в следующее состояние. Таким образом, полученный автомат удовлетворяет условию предыдущей леммы, а длина периода последовательности, которую он генерирует на 1 больше, чем у изначально данного автомата P . Таким образом,

$$\tau < \sum_{i=0}^{nm} k^i,$$

что и завершает доказательство.

Лемма 4. Пусть P — автономный автомат с магазинной памятью и последовательность $\gamma(t)$ — непериодическая. Тогда

$$L(n, m, k) \leq \sum_{i=0}^{nm} k^i.$$

Доказательство. Пусть τ — период выходящей последовательности автомата P . Рассмотрим $l = \min_{1 < t < \tau} |\gamma(t)|$. Обозначим $\gamma' = \gamma(t_0)$ и $q' = q(t_0)$, где t_0 таково, что $|\gamma(t_0)| = l$. Не ограничивая общности рассуждения, можно считать, что $\gamma_0 = \gamma'$ и $q_0 = q'$. Рассмотрим автомат P' , который получится из автомата P заменой начального слова в магазине на $LS(\gamma')$. Очевидно, что P и P' генерируют одни и те же периодические последовательности. Теперь изменим поведение автомата P' следующим образом. Добавим состояние q'' . Автомат P' из состояния q' переходит в q'' , в котором опустошается магазин. При пустом магазине в состоянии q'' P' ведет себя так же, как автомат P , когда находится в состоянии q' и видит символ $LS(\gamma')$ магазина. Полученный автомат удовлетворяет условию леммы 2. Учитывая, что $\omega(q'', z) = 1$, видим, что добавленное состояние не увеличивает оценку, что и завершает доказательство.

Таким образом доказана следующая теорема:

Теорема 2. Пусть $P = \{Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0\}$ — автономный автомат с магазинной памятью. Тогда длина периода периодической последовательности, которую P генерирует не больше, чем $\sum_{i=0}^{nm} k^i$, где $n = |Q|$, $m = |\Gamma|$, $k = \max_{(q,z) \in Q \times \Gamma \cup \{\lambda\}} |\eta(q, z)|$.

3. Примеры

Пример 1. Рассмотрим автомат $P_1 = \{Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0\}$, где $Q = \{q\}$, $B = E_2$, $\Gamma = \{1, 2, \dots, m\}$, $q_0 = q$, $\gamma_0 = \lambda$. Функция переходов тривиальна. Функция выхода выдает 1, если магазин пуст; в остальных случаях — 0. Функция памяти определим следующим образом:

$$\eta(q, \gamma) = \begin{cases} 1^k, & \text{если } \gamma = \lambda, \\ (i + 1)^k, & \text{если } \gamma = i < m, \\ \lambda, & \text{если } \gamma = m. \end{cases}$$

где натуральное число $k > 1$. Для данного автомата выпишем систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega(q, \lambda) = 1 + k\omega(q, 1), \\ \omega(q, 1) = 1 + k\omega(q, 2), \\ \dots \\ \omega(q, i) = 1 + k\omega(q, i + 1), \\ \dots \\ \omega(q, m - 1) = 1 + k\omega(q, m), \\ \omega(q, m) = 1. \end{array} \right.$$

Длиной периода в данном автомате можно считать количество тактов работы автомата между пустыми состояниями магазина, то есть $\omega(q, \lambda)$. Из системы видно, что

$$\omega(q, \lambda) = \sum_{i=0}^m k^i.$$

Этот пример показывает достижимость оценки сверху из теоремы для случая $|Q| = 1$.

Пример 2. Рассмотрим автомат $P_2 = \{Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0\}$, где $Q = \{q_1, \dots, q_n\}$, $B = E_2$, $\Gamma = \{1\}$, $q_0 = q_1$, $\gamma_0 = \lambda$,

$$\varphi(q, \gamma) = \begin{cases} q_{i+1}, & \text{если } q = q_i, i < n, \gamma = \lambda \\ q_{n-1}, & \text{если } q = q_n, \gamma = \lambda \\ q_{i-1}, & \text{если } q = q_i, i > 1, \gamma = 1 \\ q_1, & \text{если } q = q_1, \gamma = 1 \end{cases},$$

$$\eta(q, \gamma) = \begin{cases} \lambda, & \text{если } q = q_i, i < n, \gamma = \lambda \\ 1^k, & \text{если } q = q_n, \gamma = \lambda \\ 1^k, & \text{если } q = q_i, i > 1, \gamma = 1 \\ \lambda, & \text{если } q = q_1, \gamma = 1 \end{cases}.$$

Функция выхода выдает 1, если магазин пуст; в остальных случаях — 0. Для данного автомата выпишем систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega(q_n, \lambda) = 1 + \omega(q_n, 1) + (k - 1)\omega(q_1, 1), \\ \omega(q_n, 1) = 1 + \omega(q_{n-1}, 1) + (k - 1)\omega(q_1, 1), \\ \dots \\ \omega(q_i, 1) = 1 + \omega(q_{i-1}, 1) + (k - 1)\omega(q_1, 1), \\ \dots \\ \omega(q_2, 1) = 1 + \omega(q_1, 1) + (k - 1)\omega(q_1, 1), \\ \omega(q_1, 1) = 1. \end{array} \right.$$

Несложно видеть, что следствием системы является:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega(q_n, \lambda) = n + (n(k - 1) + 1)\omega(q_1, 1), \\ \omega(q_1, 1) = 1. \end{array} \right.$$

Длиной периода в данном автомате можно считать $\sum_{q \in Q} \omega(q, \lambda) = n - 1 + \omega(q_n, \lambda) = n - 1 + (n + (n(k - 1) + 1)) = nk + n$.

Список литературы

- [1] Ахо А., Ульман Дж. Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции. — Том 1. М.: Мир, 1978.
- [2] Иванов И. Е. Некоторые классы функций, вычисляемые автоматами // Интеллектуальные системы — 2011. Т. 15, вып. 1–4. — С. 361–378.
- [3] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. — М.: Наука, 1985.