

# Свойства модели Марковица при задании параметров средствами теории нечетких множеств

А. Н. Тимирова

В работе представлена модель оценки доходности и риска в анализе формирования инвестиционных портфелей. Доходность ценных бумаг оценивается как нечеткое число, а риск — как мера неопределенности доходности.

**Ключевые слова:** нечеткие числа, степень нечеткости, модель Марковица, инвестиционный портфель.

## 1. Введение

Неопределенность является важным свойством рынка ценных бумаг. Частые изменения в экономических циклах, развитии технологий, политической ситуации и другие факторы одновременно влияют на характеристику доходности активов.

Управление инвестициями происходит в условиях неопределенности относительно будущего состояния как самих финансовых активов, так и экономического окружения. Неопределенность порождает риск неэффективного управления — такого, что намеченные цели управления не достигаются. Например, решение об инвестициях, первоначально признанное экономически обоснованным, может перестать быть таковым вследствие ухудшения рыночной ситуации.

В 1952 г. Гарри Марковиц опубликовал фундаментальную работу, которая является основой подхода к инвестициям с точки зрения современной теории формирования портфеля. Проблема выбора инвестиционного портфеля является классической и наиболее важной

проблемой в различных областях инвестирования и финансовых исследованиях.

По Марковицу, инвестор должен считать уровень доходности портфеля нормальной случайной переменной с ожидаемым значением и стандартным отклонением. Однако, инвестор получает информацию из реального мира, а также опирается на субъективные прогнозы, основанные не только на статистическом анализе исторических данных, но и на многолетнем личном опыте инвестирования.

Поэтому, даже если инвестор располагает достаточной и надежной информацией из области инвестирования, очень сложно представить будущее случайным распределением каждой ценной бумаги. Поэтому, следует учитывать не только статистику рынка, но и субъективные прогнозы инвестора в проблеме выбора инвестиционного портфеля. Для моделирования субъективных оценок используется аппарат нечетких множеств [1].

В работе рассматривается обобщение модели Марковица, в рамках которого доходность формализуется как нечеткое число, а риск — как мера нечеткости доходности. Введение нечетких параметров позволяет оценивать портфели при отсутствии информации о распределениях случайных величин, определяющих доходности ценных бумаг: в качестве источника информации для оценки портфеля выступают прогнозы экспертов.

## 2. Модель Марковица. Классический случай

Подход Марковица начинается с предположения, что инвестор в момент времени  $t = 0$  имеет конкретную сумму денег для инвестирования [2]. Эти деньги будут инвестированы на определенный промежуток времени  $T$ , который называется периодом владения. Есть  $n$  типов ценных бумаг. Начальный капитал расходуется полностью на ценные бумаги типа  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , цена покупки которых определена. В конце периода владения инвестор продает ценные бумаги, которые были куплены в начале периода, после чего либо использует полученный доход на потребление, либо реинвестирует доход в различные ценные бумаги (либо делает и то, и другое одновременно).

Поскольку портфель представляет собой набор различных ценных бумаг, инвестиционное решение эквивалентно выбору оптимального портфеля из набора возможных портфелей. Такую проблему называют проблемой выбора инвестиционного портфеля.

В рамках модели Марковица, инвестор должен считать уровень доходности, связанный с любым из портфелей, случайной переменной, при этом математическое ожидание является аналогом ожидаемой доходности, а стандартное отклонение служит мерой риска. Марковиц утверждает, что инвестор должен основывать свое решение по выбору портфеля исключительно на ожидаемой доходности и стандартном отклонении. Это означает, что инвестор должен оценить ожидаемую доходность и стандартное отклонение каждого портфеля, а потом выбрать «лучший» из них, основываясь на соотношении этих двух параметров. Ожидаемая доходность может быть представлена как мера потенциального вознаграждения, связанная с конкретным портфелем, а стандартное отклонение — как мера риска, связанная с данным портфелем. Таким образом, после того, как каждый портфель был исследован в смысле потенциального вознаграждения и риска, инвестор должен выбрать портфель, который является для него наиболее подходящим.

Предполагается, что инвестор в выборе портфеля из двух портфелей с одинаковой ожидаемой доходностью предпочтет портфель с меньшим риском. Инвестор, стремясь одновременно максимизировать ожидаемую доходность и минимизировать неопределенность (риск), имеет две противоречащие друг другу цели, которые должны быть сбалансированы. Подход Марковица дает возможность учесть обе эти цели.

Введем основные обозначения:

$n$  — всего типов ценных бумаг в портфеле,  $n \in \mathbb{N}$ ;

$N_i$  — количество ценных бумаг  $i$ -го типа в портфеле,  $i \in \overline{1, n}$ ;

$N$  — количество всех ценных бумаг в портфеле,  $N = \sum_{i=1}^n N_i$ ;

$x_i = \frac{N_i}{N}$  — доля ценной бумаги  $i$ -го типа в портфеле,  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ ,

$0 \leq x_i \leq 1$ ;

$r_i$  — ожидаемая доходность ценной бумаги  $i$ -го типа;

$c_i$  — цена ценной бумаги  $i$ -го типа на момент приобретения  $t = 0$ ;

$c'_i$  — ожидаемая цена ценной бумаги  $i$ -го типа на конец периода  $t = T$

$$c'_i = c_i(1 + r_i);$$

$$K_0 = \sum_{i=1}^n x_i c_i \text{ — начальный капитал портфеля};$$

$$K_1 = \sum_{i=1}^n x_i c'_i \text{ — капитал портфеля в конце периода};$$

$$y_i = \frac{x_i c_i}{\sum_{i=1}^n x_i c_i} \text{ — доля начального капитала портфеля, инвестирован-}$$

ная в ценную бумагу  $i$ -го типа,  $\sum_{i=1}^n y_i = 1$ ,  $0 \leq y_i \leq 1$ ;

$R_p$  — ожидаемая доходность портфеля

Вычисление ожидаемой доходности портфеля производится с использованием начального капитала и капитала на конец периода:

$$R_p = \frac{K_1 - K_0}{K_0}.$$

Из набора  $n$  типов ценных бумаг можно сформировать большое число портфелей. В рамках модели оценку всех портфелей производить нет необходимости. Объяснение того факта, что инвестор должен рассмотреть только некоторое подмножество возможных портфелей, содержится в теореме об эффективном множестве: Инвестор выберет свой оптимальный портфель из множества эффективных портфелей [2].

Эффективным множеством или эффективной границей называется набор портфелей, каждый из которых удовлетворяет следующим условиям:

1. Обеспечивает максимальную ожидаемую доходность для некоторого уровня риска.

2. Обеспечивает минимальный риск для некоторого значения ожидаемой доходности.

Достижимое множество — это комбинация всех портфелей из группы  $N$  ценных бумаг. Это означает, что все портфели могут ле-

жать либо внутри достижимого множества, либо на его границе. Из достижимого множества может быть выделено эффективное множество [2].

Для выбора наиболее желательного портфеля используют так называемые кривые безразличия. Эти кривые отражают отношение инвестора к риску и доходности и представляются как двухмерный график, где по горизонтальной оси откладывается риск, мерой которого является стандартное отклонение, а по вертикальной оси — вознаграждение, мерой которого является ожидаемая доходность портфеля  $R_p$ . Каждая кривая отображает одну кривую безразличия инвестора и представляет все комбинации портфелей, которые обеспечивают заданный уровень желаний инвестора, то есть соотношение доходность/риск; все портфели, лежащие на одной заданной кривой безразличия, является равноценным для инвестора.

В рамках модели Марковица изучаются кривые безразличия и доказывается, что инвестор будет считать любой портфель, лежащий на кривой безразличия, которая находится выше и левее, более привлекательным, чем любой портфель, лежащий, на кривой безразличия, которая находится ниже и правее. Из множества эффективных портфелей инвестор будет выбирать оптимальный для себя. Все остальные достижимые портфели являются неэффективными портфелями

При использовании подхода Марковица делаются два предположения:

- ненасыщаемость — инвестор предпочитает более высокий уровень конечного благосостояния более низкому его уровню;
- избегание риска — инвестор выбирает портфель с меньшим стандартным отклонением; у разных инвесторов разная степень избегания риска.

Таким образом:

- 1) Подход Марковица к проблеме выбора портфеля предполагает, что инвестор старается решить две проблемы: максимизировать ожидаемую доходность при заданном уровне риска и минимизировать неопределенность (риск) при заданном уровне ожидаемой доходности.

- 2) Ожидаемая доходность служит мерой потенциального вознаграждения, связанного с портфелем. Стандартное отклонение рассматривается как мера риска портфеля.
- 3) Кривая безразличия представляет собой различные комбинации риска и доходности, которые инвестор считает равноценными.
- 4) Предполагается, что инвесторы рассматривают любой портфель, лежащий на кривой безразличия выше и левее, как более ценный, чем портфель, лежащий на кривой безразличия, проходящей ниже и правее.
- 5) Ожидаемая доходность портфеля является средневзвешенной ожидаемой доходностью ценных бумаг, входящих в портфель. В качестве весов служат относительные пропорции ценных бумаг, входящих в портфель.

### 3. Необходимые понятия и факты теории нечетких множеств

Основные понятия нечетких множеств были введены Лотфи Заде в 1965 году [3]. Ниже нам понадобятся следующие из них.

Линейными функциями принадлежности  $L - R$ -типа называются функции принадлежности вида:

$$\mu_A(u) = \begin{cases} 0 & \text{при } u \leq a_L; \\ \frac{u-a_L}{a'-a_L} & \text{при } a_L \leq u \leq a'; \\ 1 & \text{при } a' \leq u \leq a''; \\ \frac{a_R-u}{a_R-a''} & \text{при } a'' \leq u \leq a_R; \\ 0 & \text{при } u \geq a_R. \end{cases} \quad (1)$$

Линейные функции принадлежности  $L - R$ -типа при  $a' < a''$  называются трапецидальными, обозначаются  $\tilde{A} = (a^L, a', a'', a^R)$ , при  $a' = a'' = a$  — треугольными, обозначаются  $\tilde{A} = (a^L, a, a^R)$ .

#### 3.1. Степень нечеткости множества

Пусть  $\tilde{A}$  — нечеткое множество в универсальном множестве  $U$ .

$\mu_{\tilde{A}}(u)$  — степень принадлежности элемента  $u$  к  $\tilde{A}$ ,  $|U|$  — мощность универсального множества [1].

**Определение 1.** Степенью нечеткости множества называется величина

$$\xi(\tilde{A}) = \frac{1}{|U|} \int_U (1 - |2\mu_{\tilde{A}}(u) - 1|) du.$$

**Утверждение 1.** Пусть  $\tilde{a} = (a - \alpha_L, a, a + \alpha_R)$  — нечеткое треугольное число в универсальном множестве  $U$ . Тогда его степень нечеткости равна:

$$\xi(\tilde{a}) = \frac{\alpha_L + \alpha_R}{2|U|}.$$

**Доказательство** утверждения 1 приведено в [1].

**Следствие 1.** Степени нечеткости двух нечетких треугольных чисел с одинаковыми основаниями равны:

$\tilde{a} = (a - \alpha_L, a, a + \alpha_R)$ ,  $\tilde{b} = (b - \beta_L, b, b + \beta_R)$  — нечеткие треугольные числа и  $\alpha_L + \alpha_R = \beta_L + \beta_R$ .

Тогда

$$\xi(\tilde{a}) = \xi(\tilde{b}).$$

### 3.2. Свойства степени нечеткости треугольных нечетких чисел

Докажем некоторые свойства для треугольных нечетких чисел. Далее будем считать, что для  $U = [U_L, U_R]$ , и для любых нечетких чисел  $\tilde{a} = (a - \alpha_L, a, a + \alpha_R)$  и  $\tilde{b} = (b - \beta_L, b, b + \beta_R)$ , константы  $y \in \mathbb{R}$  выполнено:

$$\begin{aligned} a + b + (\alpha_R + \beta_R) &\leq U_R, & ya + y\alpha_R &\leq U_R \\ a + b - (\alpha_L + \beta_L) &\geq U_L, & ya - y\alpha_L &\geq U_L \end{aligned}$$

**Определение 2.** Для двух нечетких треугольных чисел  $\tilde{a} = (a - \alpha_L, a, a + \alpha_R)$ ,  $\tilde{b} = (b - \beta_L, b, b + \beta_R)$  и константы  $k \in \mathbb{R}$  определены следующие операции:

1. Сумма двух нечетких треугольных чисел

$$\tilde{c} = \tilde{a} + \tilde{b} = (a + b - (\alpha_L + \beta_L), a + b, a + b + (\alpha_R + \beta_R)).$$

2. Умножение нечеткого числа на константу

$$k \cdot \tilde{a} = \begin{cases} (ka - k\alpha_L, ka, ka + k\alpha_R), k \geq 0; \\ (ka + k\alpha_R, ka, ka - k\alpha_L), k < 0. \end{cases}$$

**Утверждение 2.** Пусть даны два нечетких треугольных числа  $\tilde{a} = (a - \alpha_L, a, a + \alpha_R)$ ,  $\tilde{b} = (b - \beta_L, b, b + \beta_R)$  и константа  $y \in \mathbb{R}$ . Тогда

1. Степень нечеткости суммы двух треугольных чисел равна сумме степеней нечеткости этих чисел:

$$\xi(\tilde{a} + \tilde{b}) = \xi(\tilde{a}) + \xi(\tilde{b}).$$

2. Степень нечеткости произведения треугольного числа на константу равна:

$$\xi(k\tilde{a}) = |k|\xi(\tilde{a}).$$

**Доказательство.** 1. По определению  $\tilde{a} + \tilde{b} = (a + b - (\alpha_L + \beta_L), a + b, a + b + (\alpha_R + \beta_R))$ . Тогда:

$$\xi(\tilde{a} + \tilde{b}) = \frac{(\alpha_L + \beta_L) + (\alpha_R + \beta_R)}{2|U|} = \frac{\alpha_L + \alpha_R}{2|U|} + \frac{\beta_L + \beta_R}{2|U|} = \xi(\tilde{a}) + \xi(\tilde{b}).$$

2. Рассмотрим  $k\tilde{a}$  для  $k \geq 0$  и  $k < 0$ :

$$k \cdot \tilde{a} = \begin{cases} (ka - k\alpha_L, ka, ka + k\alpha_R), k \geq 0; \\ (ka + k\alpha_R, ka, ka - k\alpha_L), k < 0. \end{cases}$$

1) Для  $k \geq 0$  справедливо:

$$\xi(k\tilde{a}) = \frac{k\alpha_L + k\alpha_R}{2|U|} = \frac{k(\alpha_L + \alpha_R)}{2|U|} = k\xi(\tilde{a}).$$

2) Для  $k < 0$  справедливо:

$$\xi(k\tilde{a}) = \frac{-k\alpha_L - k\alpha_R}{2|U|} = \frac{-k(\alpha_L + \alpha_R)}{2|U|} = -k\xi(\tilde{a}).$$

В итоге получили, что

$$\xi(k\tilde{a}) = |k|\xi(\tilde{a}).$$

Утверждение доказано.

**Теорема 1.** Пусть  $\tilde{a}_i = (a_i - \alpha_i^L, a_i, a_i + \alpha_i^R)$  – нечеткие треугольные числа,  $k_i \in \mathbb{R}$  – константы,  $i = \overline{1, n}$ . Тогда

$$\xi\left(\sum_{i=1}^n k_i \tilde{a}_i\right) = \sum_{i=1}^n |k_i| \xi(\tilde{a}_i).$$

**Доказательство** теоремы следует из утверждений 1 и 2.

## 4. Модель Марковица. Нечеткий случай

Определим основные понятия модели Марковица на языке теории нечетких множеств.

Рассмотрим случай, когда доходность ценной бумаги представлена в виде нечеткого треугольного числа:  $\tilde{r}_i = (r_i - \alpha_i^L, r_i, r_i + \alpha_i^R)$

По определению, нечеткая цена  $i$ -ой ценной бумаги в конце периода  $\tilde{c}'_i$  выражается через цену в начале периода  $c_i$ :  $\tilde{c}'_i = c_i(\tilde{1} + \tilde{r}_i)$ .

**Утверждение 3.** а) Нечеткая доходность  $i$ -ой ценной бумаги равна  $\tilde{r}_i = (r_i - \alpha_i^L, r_i, r_i + \alpha_i^R)$ , а ее степень нечеткости:

$$\xi(\tilde{r}_i) = \frac{\alpha_i^L + \alpha_i^R}{2|U|}.$$

б) Нечеткая цена  $i$ -ой ценной бумаги в конце периода равна:

$$\tilde{c}'_i = (c'_i - c_i \alpha_i^L, c'_i, c'_i + c_i \alpha_i^R).$$

Степень нечеткости цены  $i$ -ой ценной бумаги в конце периода равна:

$$\xi(\tilde{c}'_i) = c_i \xi(\tilde{r}_i).$$

**Доказательство.** а) Следует из утверждения 1.

б) Справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \tilde{c}'_i &= c_i \left( (1, 1, 1) + (r_i - \alpha_i^L, r_i, r_i + \alpha_i^R) \right) = c_i (1 + r_i - \alpha_i^L, 1 + r_i, \\ &1 + r_i + \alpha_i^R) = (c_i(1 + r_i) - c_i \alpha_i^L, c_i(1 + r_i), c_i(1 + r_i) + c_i \alpha_i^R) = (c'_i - \\ &c_i \alpha_i^L, c'_i, c'_i + c_i \alpha_i^R). \end{aligned}$$

В итоге получаем:  $\tilde{c}'_i = (c'_i - c_i \alpha_i^L, c'_i, c'_i + c_i \alpha_i^R)$ .

Теперь вычислим степень нечеткости:

$$\xi(\tilde{c}'_i) = \frac{c_i \alpha_i^L + c_i \alpha_i^R}{2|U|} = c_i \frac{\alpha_i^L + \alpha_i^R}{2|U|} = c_i \xi(\tilde{r}_i).$$

Утверждение доказано.

Аналогично классическому случаю (раздел 2) определим **нечеткую доходность портфеля**  $\tilde{R}_p$  следующим образом:

$$\tilde{R}_p = \frac{\tilde{K}_1 - K_0}{K_0},$$

где  $K_0$  — начальный капитал портфеля,  $\tilde{K}_1$  — капитал портфеля в конце периода.

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** а) *Нечеткая доходность портфеля равна:*

$$\tilde{R}_p = \sum_{i=1}^n y_i \tilde{r}_i = \left( \sum_{i=1}^n y_i r_i - \sum_{i=1}^n y_i \alpha_i^L, \sum_{i=1}^n y_i r_i, \sum_{i=1}^n y_i r_i + \sum_{i=1}^n y_i \alpha_i^R \right).$$

б) *Степень нечеткости доходности портфеля равна:*

$$\xi(\tilde{R}_p) = \sum_{i=1}^n y_i \xi(\tilde{r}_i).$$

**Доказательство.** а) Найдем нечеткую доходность портфеля

$$\tilde{R}_p = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \tilde{c}'_i - \sum_{i=1}^n x_i c_i}{\sum_{i=1}^n x_i c_i} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i (\tilde{c}'_i - c_i)}{\sum_{i=1}^n x_i c_i} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i c_i \tilde{r}_i}{\sum_{i=1}^n x_i c_i}.$$

Так как  $y_i = \frac{x_i c_i}{\sum_{i=1}^n c_i x_i}$  — доля начальной стоимости портфеля, ин-

вестированная в ценную бумагу, тогда нечеткая доходность портфеля запишется в следующем виде:

$$\tilde{R}_p = \sum_{i=1}^n y_i \tilde{r}_i = \sum_{i=1}^n y_i (r_i - \alpha_i^L, r_i, r_i + \alpha_i^R) = \sum_{i=1}^n y_i (r_i - \alpha_i^L, r_i, r_i + \alpha_i^R).$$

После преобразований получаем:

$$\tilde{R}_p = \left( \sum_{i=1}^n y_i r_i - \sum_{i=1}^n y_i \alpha_i^L, \sum_{i=1}^n y_i r_i, \sum_{i=1}^n y_i r_i + \sum_{i=1}^n y_i \alpha_i^R \right).$$

b) Вычислим степень нечеткости доходности портфеля.

Так как  $0 \leq y_i \leq 1$ , то  $|y_i| = y_i$ . Используя теорему 1 и полученную формулу для нечеткой доходности портфеля  $\tilde{R}_p = \sum_{i=1}^n y_i \tilde{r}_i$ , вычисляем степень нечеткости доходности портфеля:

$$\xi(\tilde{R}_p) = \sum_{i=1}^n y_i \xi(\tilde{r}_i).$$

Теорема доказана.

Таким образом, риск портфеля является линейной комбинацией рисков входящих в него ценных бумаг с учетом долей ценных бумаг в начальном капитале портфеля. Эта теорема позволяет получить верхние и нижние оценки риска портфеля.

**Утверждение 4.** Пусть

$\bar{\xi}(\tilde{r}) = \max_{1 \leq i \leq n} \xi(\tilde{r}_i)$  — максимальная степень нечеткости среди ценных бумаг,

$\underline{\xi}(\tilde{r}) = \min_{1 \leq i \leq n} \xi(\tilde{r}_i)$  — минимальная степень нечеткости среди ценных бумаг

Тогда

$$\underline{\xi}(\tilde{r}) \leq \xi(\tilde{R}_p) \leq \bar{\xi}(\tilde{r}).$$

**Доказательство.** С одной стороны имеем:

$$\xi(\tilde{R}_p) = \sum_{i=1}^n y_i \xi(\tilde{r}_i) \leq \sum_{i=1}^n y_i \bar{\xi}(\tilde{r}) = \bar{\xi}(\tilde{r}) \sum_{i=1}^n y_i = \bar{\xi}(\tilde{r}).$$

С другой стороны:

$$\xi(\tilde{R}_p) = \sum_{i=1}^n y_i \xi(\tilde{r}_i) \geq \sum_{i=1}^n y_i \underline{\xi}(\tilde{r}) = \underline{\xi}(\tilde{r}) \sum_{i=1}^n y_i = \underline{\xi}(\tilde{r}).$$

Утверждение доказано.

Таким образом для каждого портфеля существуют границы риска, определяемые степенью нечеткости входящих в него бумаг.

## Список литературы

- [1] Рыжов А. П. Элементы теории нечетких множеств и измерения нечеткости. М.: Диалог-МГУ, 1998.
- [2] Шарп У., Александер Г., Бэйли Дж. Инвестиции / Пер. с англ. М.: ИНФРА-М, 2001.
- [3] Zadeh L. A. Fuzzy sets // Information and Control. 8 (1). 1965. P. 338–353.