Критерий сводимости задачи об опасной близости к одномерным задачам для полиномиальных законов движения

Е. А. Снегова

В статье рассматривается задача об опасной близости в случае, когда законы движения объектов и запросов принадлежат классу полиномов конечной степени. Для этого случая приводится критерий сводимости задачи об опасной близости к одномерным задачам — задаче о прокалывании и задаче одномерного интервального поиска.

Ключевые слова: базы данных движущихся объектов, пространственно-временные базы данных, информационный граф, сложность.

1. Постановка задачи и формулировка результата

В статье [1] из данного сборника приводятся понятие задачи об опасной близости и критерий ее сводимости к одномерной задаче о прокалывании, поэтому мы не будем повторять здесь приводимые там понятия. В [2] показывается, что аналогичный критерий верен и для сводимости задачи о близости к одномерному интервальному поиску. Приведем здесь его формулировку без доказательства.

Утверждение. *Задача об опасной близости* (f, f_q, ρ) *сводится к задаче одномерного интервального поиска тогда и только тогда, когда существуют функции* $\psi, \psi_L, \psi_R : [0,1] \to \mathbb{R}$ *такие, что для любой* *пары (x, y), для которой выполнено условие $F_L(x, y) \leqslant 0$, верно, что*

$$F_L(x, y) = \psi(y) + \psi_L(x), \tag{1}$$

а для любой пары (x, y), такой, что $F_R(x, y) \leqslant 0$, верно, что

$$F_R(x, y) = \psi(y) + \psi_R(x). \tag{2}$$

При этом если выполнены условия (1) и (2) и

$$\psi^*(y) = \begin{cases} \psi(y), & \text{если } y \in Y_L, \\ F_L(0,1), & \text{если } y \notin Y_L, \end{cases} \tag{3}$$

$$\psi_R^*(x) = \begin{cases} \psi_R(x), & \text{если } x \in X_R, \\ F_R(0,1), & \text{если } x \notin X_R, \end{cases} \tag{4}$$

$$\psi_L^*(x) = \begin{cases} \psi_L(x), & \text{если } x \in X_L, \\ F_L(0,1), & \text{если } x \notin X_L, \end{cases} \tag{5}$$

то функции сведения $(\varphi, \varphi_1, \varphi_2)$ имеют вид

$$\varphi(t_i, y_i) = t_i - \psi^*(y_i), \tag{6}$$

$$\varphi_1(t_q, x) = t_q + \psi_L^*(x), \tag{7}$$

$$\varphi_2(t_q, x) = t_q + \psi_R^*(x). \tag{8}$$

Утверждения критериев сводимости не дают полного представления о том, какие законы движения удовлетворяют условиям критериев сводимости.

Для полиномиальных законов движения удалось конкретизировать критерии сводимости и явно указать классы, принадлежность к которым для функций f и f_q является необходимым и достаточным условием сводимости задачи об опасной близости к одномерным задачам о прокалывании и интервального поиска.

Теорема 1. *Пусть законы движения f, f_q — многочлены. Тогда задача об опасной близости (f, f_q, ρ) сводится к задаче одномерного интервального поиска или задаче о прокалывании тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из четырех условий*

Условие 1. *1) Если* $(x,y) \in [\rho, 1+\rho] \times [0,1] : f_q^{-1}(y) - f^{-1}(x) \leqslant 0$, *то* $(f_q^{-1}(y))' \leqslant (f^{-1}(x))'$*;*

2) Если $F_L(x,0) \leqslant 0$, *то* $\rho \in \arg\min\limits_{\xi\in[0,\rho]} F_L(x,0,\xi)$*;*

3) Если $F_R(x,1) \leqslant 0$, *то* $-\rho \in \arg\max\limits_{\xi\in[-\rho,0]} F_L(x,1,\xi)$*;*

4) Если $(x,y) \in [0,2\rho] \times [0,1] : F_R(x,y) \leqslant 0$, *то* $-\rho \in \arg\max\limits_{\xi\in[-\rho,0]} F_R(x,y,\xi)$*;*

5) Если $(x,y) \in [0,\rho] \times [0,1] : F_L(x,y) \leqslant 0$, *то* $\rho \in \arg\min\limits_{\xi\in[0,\rho]} F_L(x,y,\xi)$.

Условие 2. *1) Если* $(x,y) \in [0,1] \times [-\rho, 1-\rho] : f_q^{-1}(y) - f^{-1}(x) \leqslant 0$, *то* $(f_q^{-1}(y))' \geqslant (f^{-1}(x))'$*;*

2) Если $F_L(0,y) \leqslant 0$, *то* $0 \in \arg\min\limits_{\xi\in[0,\rho]} F_L(0,y,\xi)$*;*

3) Если $F_R(1,y) \leqslant 0$, *то* $0 \in \arg\max\limits_{\xi\in[-\rho,0]} F_R(1,y,\xi)$*;*

4) Если $(x,y) \in [0,1] \times [1-\rho,1] : F_R(x,y) \leqslant 0$, *то* $0 \in \arg\max\limits_{\xi\in[-\rho,0]} F_R(x,y,\xi)$*;*

5) Если $(x,y) \in [0,1] \times [1-\rho,1] : F_L(x,y) \leqslant 0$, *то* $0 \in \arg\min\limits_{\xi\in[0,\rho]} F_L(x,y,\xi)$.

Условие 3. f *— линейный многочлен.*

Условие 4. f_q *— линейный многочлен.*

2. Доказательство основного результата

Обозначим:

$$F_L(x,y,\xi) = f_q^{-1}(y+\xi-\rho) - f^{-1}(x+\xi),$$
$$F_R(x,y,\xi) = f_q^{-1}(y+\xi+\rho) - f^{-1}(x+\xi),$$
$$F_L(x,y) = \min_{\xi\in[0,\rho]} F_L(x,y,\xi),$$
$$F_R(x,y) = \max_{\xi\in[-\rho,0]} F_R(x,y,\xi),$$

$$L = \{(x,y) \in [0,1]^2 : F_L(x,y) \leqslant 0\},$$
$$R = \{(x,y) \in [0,1]^2 : F_R(x,y) \leqslant 0\},$$
$$A = \{(x,y) \in L : \rho \in \arg \min_{\xi \in [0,\rho]} F_L(x,y,\xi)\},$$
$$B = \{(x,y) \in L : 0 \in \arg \min_{\xi \in [0,\rho]} F_L(x,y,\xi)\}.$$
$$A_R = \{(x,y) \in R : -\rho \in \arg \max_{\xi \in [-\rho,0]} F_R(x,y,\xi)\},$$
$$B_R = \{(x,y) \in R : 0 \in \arg \max_{\xi \in [-\rho,0]} F_R(x,y,\xi)\}.$$

Определение 1. Будем говорить, что выполнено условие разложения функции $F(x,y)$, если существуют функции $\psi, \psi' : [0,1] \to \mathbb{R}$ такие, что для любой пары (x,y), такой, что $F(x,y) \leqslant 0$, верно, что:

$$F(x,y) = \psi(y) + \psi'(x). \tag{9}$$

Доказательство теоремы 1 следует из следующих трех утверждений:

Утверждение 1. *Пусть f, f_q — многочлены и пусть для тройки (f, f_q, ρ) выполнено условие разложения функции $F_L(x,y)$. Тогда верно хотя бы одно из следующих четырех условий:*

1) $A = L$,

2) $B = L$,

3) f_q *— линейная функция,*

4) f *— линейная функция.*

Утверждение 2. *Пусть f, f_q — многочлены и пусть для тройки (f, f_q, ρ) выполнено условие разложения функции $F_R(x,y)$. Тогда верно хотя бы одно из следующих четырех условий:*

1) $A_R = R$,

2) $B_R = R$,

3) f_q *— линейная функция,*

4) f *— линейная функция.*

Утверждение 3. *Пусть f, f_q — многочлены и пусть для тройки (f, f_q, ρ) выполнены условия разложения функций $F_R(x,y)$ и $F_L(x,y)$. Тогда верно хотя бы одно из следующих четырех условий:*

1) $A = L$ и $A_R = R$,

2) $B = L$ и $B_R = R$,

3) f_q — линейная функция,

4) f — линейная функция.

При этом, в случаях 1, 3 задача об опасной близости (f, f_q, ρ) сводится к задаче о прокалывании, а в случаях 2, 4 к задаче одномерного интервального поиска в случаях.

Докажем утверждение 1, 3 и теорему. Утверждение 2 доказывается аналогично утверждению 1.

2.1. Доказательство утверждения 1

2.1.1. Достаточность

Пусть $A = L$, $A_R = R$. Тогда для любой пары $(x,y) \in L$ верно, что

$$F_L(x,y) = f_q^{-1}(y) - f^{-1}(x+\rho),$$

а для любой пары $(x,y) \in R$ верно, что

$$F_R(x,y) = f_q^{-1}(y) - f^{-1}(x-\rho).$$

Пусть $B = L$, $B_R = R$. Тогда для любой пары $(x,y) \in L$ верно, что

$$F_L(x,y) = f_q^{-1}(y-\rho) - f^{-1}(x),$$

а для любой пары $(x,y) \in R$ верно, что

$$F_R(x,y) = f_q^{-1}(y+\rho) - f^{-1}(x).$$

Пусть $f(\tau) = v\tau$. Тогда для любой пары $(x,y) \in L$ верно, что

$$F_L(x,y) = \min_{\xi \in [0,\rho]} [f_q^{-1}(y+\xi-\rho) - \frac{x+\xi}{v}] = \min_{\xi \in [0,\rho]} [f_q^{-1}(y+\xi-\rho) - \frac{\xi}{v}] - \frac{x}{v},$$

то есть

$$\psi_L(y) = \min_{\xi\in[0,\rho]}[f_q^{-1}(y+\xi-\rho) - \frac{\xi}{v}],$$
$$\psi(x) = \frac{x}{v}.$$

А для любой пары $(x, y) \in R$ верно, что

$$F_R(x,y) = \max_{\xi\in[-\rho,0]}[f_q^{-1}(y+\xi+\rho) - \frac{x+\xi}{v}] = \max_{\xi\in[-\rho,0]}[f_q^{-1}(y+\xi+\rho) - \frac{\xi}{v}] - \frac{x}{v},$$

то есть

$$\psi_R(y) = \max_{\xi\in[-\rho,0]}[f_q^{-1}(y+\xi+\rho) - \frac{\xi}{v}],$$
$$\psi(x) = \frac{x}{v}.$$

Пусть $f_q(\tau) = v\tau$. Тогда для любой пары $(x, y) \in L$ верно, что

$$F_L(x,y) = \min_{\xi\in[0,\rho]}[\frac{y+\xi-\rho}{v} - f^{-1}(x+\xi)] = \frac{y-\rho}{v} + \min_{\xi\in[0,\rho]}[\frac{\xi}{v} - f^{-1}(x+\xi)],$$

то есть

$$\psi(y) = \frac{y}{v},$$
$$\psi_L(x) = \min_{\xi\in[0,\rho]}[\frac{\xi}{v} - f^{-1}(x+\xi)] - \frac{\rho}{v}.$$

А для любой пары $(x, y) \in R$ верно, что

$$F_R(x,y) = \max_{\xi\in[-\rho,0]}[\frac{y+\xi+\rho}{v} - f^{-1}(x+\xi)] = \frac{y+\rho}{v} + \max_{\xi\in[-\rho,0]}[\frac{\xi}{v} - f^{-1}(x+\xi)],$$

то есть

$$\psi(y) = \frac{y}{v},$$
$$\psi_R(x) = \max_{\xi\in[-\rho,0]}[\frac{\xi}{v} - f^{-1}(x+\xi)] + \frac{\rho}{v}.$$

2.1.2. Необходимость

Лемма 1. *Пусть для тройки выполнено условие разложения функции $F(x,y)$ и пусть пары $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ принадлежат области*

$$(x,y)\in[0,1]^2 : F(x,y)\leqslant 0.$$

Тогда

$$F(x_1,y_1)+F(x_2,y_2)=F(x_1,y_2)+F(x_2,y_1).$$

Доказательство. По условию леммы для любых двух пар (x_1,y_1), (x_2,y_2) таких, что $F(x_1,y_1)\leqslant 0$, $F((x_2,y_2)\leqslant 0$ верно, что

$$F(x_1,y_1)+F(x_2,y_2)=\psi(y_1)+\psi'(x_1)+\psi(y_2)+\psi'(x_2),$$
$$F(x_1,y_2)+F(x_2,y_1)=\psi(y_2)+\psi'(x_1)+\psi(y_1)+\psi'(x_2),$$

то есть

$$F(x_1,y_1)+F(x_2,y_2)=F(x_1,y_2)+F(x_2,y_1).$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть для тройки (f,f_q,ρ) выполнено условие разложения функции $F_L(x,y)$ и пусть для некоторого числа $\varepsilon\in[0,\rho]$ верно, что пары $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ принадлежат области $U(\varepsilon)$, где*

$$U(\varepsilon)=\{(x,y)\in[\varepsilon,1+\varepsilon]\times[\varepsilon-\rho,1+\varepsilon-\rho] : f_q^{-1}(y)-f^{-1}(x)\leqslant 0.\} \quad (10)$$

и

$$\varepsilon\in\bigcap_{i=1,2}\arg\min_{\xi\in[0,\rho]}F_L(x_i-\varepsilon,y_i-\varepsilon+\rho,\xi),$$

то

$$\varepsilon\in\bigcap_{i,j\in\{1,2\}}\arg\min_{\xi\in[0,\rho]}F_L(x_i-\varepsilon,y_j-\varepsilon+\rho,\xi).$$

Кроме того, если $\varepsilon\in(0,\rho)$, то

$$(f_q^{-1}(y_1))'=(f^{-1}(x_1))'=(f_q^{-1}(y_2))'=(f^{-1}(x_2))'.$$

Доказательство. Положим

$$x_1' = x_1 - \varepsilon,$$
$$y_1' = y_1 - \varepsilon + \rho,$$
$$x_2' = x_2 - \varepsilon,$$
$$y_2' = y_1 - \varepsilon + \rho.$$

Покажем, что $\varepsilon \in \arg\min\limits_{\xi\in[0,\rho]} F_L(x_1', y_2', \xi)$.

Поскольку выполнено условие леммы (10), то $x_1', x_2', y_1', y_2' \in [0,1]$. Заметим, что

$$F_L(x_1', y_1') = F_L(x_1 - \varepsilon, y_1 - \varepsilon + \rho, \varepsilon) =$$
$$= F_L(x_1 - \varepsilon, y_1 - \varepsilon + \rho, \varepsilon) = f_q^{-1}(y_1) - f^{-1}(x_1).$$

Аналогично,
$$F_L(x_2', y_2') = f_q^{-1}(y_2) - f^{-1}(x_2).$$

Таким образом,

$$F_L(x_1', y_1') + F_L(x_2', y_2') = f_q^{-1}(y_1) - f^{-1}(x_1) + f_q^{-1}(y_2) - f^{-1}(x_2).$$

Заметим также, что

$$F_L(x_1', y_2', \varepsilon) = f_q^{-1}(y_2' + \varepsilon - \rho) - f^{-1}(x_1' + \varepsilon) =$$
$$= f_q^{-1}(y_2 - \varepsilon + \rho + \varepsilon - \rho) - f^{-1}(x_1 - \varepsilon + \varepsilon) = f_q^{-1}(y_2) - f^{-1}(x_1),$$

$$F_L(x_2', y_1', \varepsilon) = f_q^{-1}(y_1' + \varepsilon - \rho) - f^{-1}(x_2' + \varepsilon) =$$
$$= f_q^{-1}(y_1 - \varepsilon + \rho + \varepsilon - \rho) - f^{-1}(x_2 - \varepsilon + \varepsilon) = f_q^{-1}(y_1) - f^{-1}(x_2),$$

то есть

$$F_L(x_1', y_2', \varepsilon) + F_L(x_2', y_1', \varepsilon) = F_L(x_1', y_1') + F_L(x_2', y_2'). \tag{11}$$

Теперь предположим обратное утверждение к первому утверждению леммы:
$$\varepsilon \notin \arg\min_{\xi\in[0,\rho]} F_L(x_1', y_2', \xi),$$

откуда следует, что

$$F_L(x_1', y_2') + F_L(x_2', y_1') < F_L(x_1', y_2', \varepsilon) + F_L(x_2', y_1', \varepsilon),$$

но, принимая во внимание (11), получаем

$$F_L(x_1', y_2') + F_L(x_2', y_1') < F_L(x_1', y_1') + F_L(x_2', y_2').$$

Поскольку $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ принадлежат области $U(\varepsilon)$, то

$$F_L(x_1', y_1') = f_q^{-1}(y_1) - f^{-1}(x_1) \leqslant 0,$$
$$F_L(x_2', y_2') = f_q^{-1}(y_2) - f^{-1}(x_2) \leqslant 0,$$

и для пар $(x_1', y_1'), (x_2', y_2')$ выполнено утверждение леммы 1, согласно которому

$$F_L(x_1', y_2') + F_L(x_2', y_1') = F_L(x_1', y_1') + F_L(x_2', y_2').$$

Приходим к противоречию. Аналогично можно показать, что $\varepsilon \in \arg\min_{\xi \in [0,\rho]} F_L(x_2, y_1, \xi)$. Таким образом, первое утверждение леммы доказано.

Докажем второе утверждение леммы. Так как ε является точкой минимума на отрезке $[0, \rho]$ функций $F_L(x_1', y_1', \xi)$, $F_L(x_2', y_2', \xi)$, $F_L(x_1', y_2', \xi)$ и не совпадает с границей отрезка, то

$$\begin{gathered}
F_L(x_1', y_1', \xi)'_{\xi=\varepsilon} = F_L(x_2', y_2', \xi)'_{\xi=\varepsilon} = F_L(x_1', y_2', \xi)'_{\xi=\varepsilon} = 0 \Leftrightarrow \\
(f_q^{-1}(y_1' + \xi - \rho))'_{\xi=\varepsilon} = (f^{-1}(x_1' + \xi))'_{\xi=\varepsilon} = \\
= (f_q^{-1}(y_2' + \xi - \rho))'_{\xi=\varepsilon} = (f^{-1}(x_2' + \xi))'_{\xi=\varepsilon} \Leftrightarrow \\
(f_q^{-1}(y))'_{y=y_1'+\varepsilon-\rho} = (f^{-1}(x))'_{x=x_1'+\varepsilon} = \\
= (f_q^{-1}(y))'_{y=y_2'+\varepsilon-\rho} = (f^{-1}(x))'_{x=x_2'+\varepsilon}.
\end{gathered}$$

Но, $y_1' + \varepsilon - \rho = y_1$, $x_1' + \varepsilon = x_1$, $y_2' + \varepsilon - \rho = y_2$, $x_2' + \varepsilon = x_2$.

Следовательно,

$$(f_q^{-1}(y_1))' = (f^{-1}(x_1))' = (f_q^{-1}(y_2))' = (f^{-1}(x_2))'.$$

Лемма 3. *Для произвольной точки* $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$ *верно, что*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} F_L(x,y) = F_L(x_0,y_0),$$
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} F_R(x,y) = F_R(x_0,y_0).$$

Лемма 4. A, B *— замкнутые множества.*

Доказательство. Докажем, что A — замкнутое множество. Рассмотрим последовательность (x_n, y_n), такую, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x_0, y_0)$, $(x_i, y_i) \in A$, $i \in \mathbb{N}$.

В силу непрерывности функций f^{-1}, f_q^{-1}

$$\lim_{n\to\infty} F_L(x_n, y_n) = f_q^{-1}(y_n) - f^{-1}(x_n + \rho) = f_q^{-1}(y_0) - f^{-1}(x_0 + \rho).$$

С другой стороны, в силу леммы 3

$$\lim_{n\to\infty} F_L(x,y) = F_L(x_0,y_0).$$

Следовательно,

$$F_L(x_0,y_0) = f_q^{-1}(y_0) - f^{-1}(x_0 + \rho),$$

и

$$\rho \in \arg\min_{\xi\in[0,\rho]} F_L(x_0, y_0, \xi),$$

то есть $(x_0, y_0) \in A$.

Замкнутость множества B доказывается аналогично.

Лемма 5. *Пусть* A' *есть связная компонента* A. *Тогда* $A' = L \cap \Pi$, *где* Π *есть некоторый прямоугольник со сторонами параллельными осям координат.*

Доказательство. Обозначим

$$x_{\max} = \max\{x : (x,y) \in A'\},$$
$$x_{\min} = \min\{x : (x,y) \in A'\},$$
$$y_{\max} = \max\{y : (x,y) \in A'\},$$
$$y_{\min} = \min\{y : (x,y) \in A'\}.$$

Обозначим:

$$\Pi = \{(x, y) : x \in [x_{min}, x_{max}], y \in [y_{min}, y_{max}]\}.$$

Возьмем произвольную точку $(x, y) \in \Pi \cap L$. В силу связности A' существуют числа $x_1, y_1 \in [0, 1]$, такие, что (x_1, y) и (x, y_1) принадлежат множеству $A' \subseteq A \subseteq L$.

Так как $(x_1, y) \in L$, то $F_L(x_1, y) = f_q^{-1}(y) - f^{-1}(x_1 + \rho) \leqslant 0$ и

$$(x_1 + \rho, y) \in [\rho, 1 + \rho] \times [0, 1],$$

то есть $(x_1, y) \in U(\rho)$.

Так как $(x_1, y) \in A$, то

$$\rho \in \arg \min_{\xi \in [0,\rho]} F_L(x_1, y, \xi) = \arg \min_{\xi \in [0,\rho]} F_L(x_1 + \rho - \rho, y, \xi).$$

Аналогично можно показать, что $(x, y_1) \in U(\rho)$ и

$$\rho \in \arg \min_{\xi \in [0,\rho]} F_L(x + \rho - \rho, y_1, \xi).$$

Следовательно, по лемме 10

$$\rho \in \arg \min_{\xi \in [0,\rho]} F_L(x + \rho - \rho, y, \xi).$$

Так как $(x, y) \in L$, то отсюда также следует, что $(x, y) \in A$.

Поскольку точка (x, y) — произвольная из множества $\Pi \cap L$, то аналогично можно показать, что все множество $\Pi \cap L$ является подмножеством множества A и совпадает со связной компонентой A'. Лемма доказана.

Лемма 6. *(1) Пусть f, f_q — многочлены и пусть для тройки (f, f_q, ρ) верно, что существуют числа $x_1, x_2, y_0 \in [0, 1]^2$, $x_1 < x_2$, такие, что для любого $x \in [x_1, x_2]$ верно, что*

$$\{0, \rho\} \subseteq \arg \min_{\xi \in [0,\rho]} F_L(x, y_0, \xi),$$

то f — линейная функция.

(2) Пусть f, f_q — многочлены и пусть для тройки (f, f_q, ρ) верно, что существуют числа $y_1, y_2, x_0 \in [0,1]^2$, $y_1 < y_2$, такие, что для любого $y \in [y_1, y_2]$ верно, что

$$\{0, \rho\} \subseteq \arg\min_{\xi \in [0,\rho]} F_L(x_0, y, \xi),$$

то f_q — линейная функция.

Доказательство. Докажем первую часть леммы, вторая — аналогично. По условию леммы

$$f_q^{-1}(y_0 - \rho) - f^{-1}(x_0) = f_q^{-1}(y_0) - f^{-1}(x_0 - \rho),$$

то есть $f^{-1}(x) - f^{-1}(x - \rho) = \text{const}$ на отрезке $[x_1, x_2]$, что возможно, только если f — линейный многочлен. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть f, f_q — многочлены и пусть для тройки (f, f_q, ρ) выполнено условие разложения функции $F_L(x, y)$. Тогда либо найдется число $\varepsilon_1 \in (0, \rho)$ и пара $(x_1, y_1) \in U(\varepsilon_1)$ такие, что*

$$\varepsilon_1 \in \arg\min_{\xi \in [0,\rho]} F_L(x_1 - \varepsilon_1, y_1 - \varepsilon_1 + \rho, \xi),$$

$$0, \rho \notin \arg\min_{\xi \in [0,\rho]} F_L(x_1 - \varepsilon_1, y_1 - \varepsilon_1 + \rho, \xi),$$

либо выполнено хотя бы одно из условий 1, 2, 3, 4 утверждения 1.

Доказательство. Первый случай: пусть существует пара $(x, y) \in L$, такая, что $(x, y) \notin A \cup B$. Тогда

$$0, \rho \notin \arg\min_{\xi \in [0,\rho]} F_L(x, y, \xi).$$

Пусть

$$\varepsilon_1 \in \arg\min_{\xi \in [0,\rho]} F_L(x, y, \xi).$$

Обозначим: $x_1 = x + \varepsilon_1$, $y_1 = y + \varepsilon_1 - \rho$. Следовательно,

$$\varepsilon_1 \in \arg\min_{\xi \in [0,\rho]} F_L(x_1 - \varepsilon_1, y_1 - \varepsilon_1 + \rho, \xi),$$

$$0, \rho \notin \arg\min_{\xi \in [0,\rho]} F_L(x_1 - \varepsilon_1, y_1 - \varepsilon_1 + \rho, \xi),$$

при этом, так как $(x, y) \in [0,1]^2$, то $(x_1, y_1) \in [\varepsilon_1, 1+\varepsilon_1] \times [\varepsilon_1 - \rho, 1 + \varepsilon_1 - \rho]$, а так как $F_L(x, y) \leqslant 0$, то $f_q^{-1}(y_1) - f^{-1}(x_1) \leqslant 0$, то есть (x_1, y_1) лежит в области $U(\varepsilon_1)$.

Второй случай: $L = A \cup B$. Если в этих условиях $A \setminus B = \varnothing$, то выполнено условие 2 утверждения 1. Если же $B \setminus A = \varnothing$, то выполнено условие 1 утверждения 1. Рассмотрим случай, когда $A \setminus B \neq \varnothing$ и $B \setminus A \neq \varnothing$. Тогда A содержит как минимум одну связную компоненту A', так как все изолированные точки A принадлежат также и B в силу замкнутости B.

По лемме 5 $A' = \Pi \cap L$, где Π есть некоторый прямоугольник со сторонами параллельными осям координат. По предположению $\Pi \neq [0,1]^2$.

Так как B — замкнутое множество, то

$$\partial A' \setminus \partial L = \partial \Pi \setminus \partial L \subseteq B.$$

Так как $\Pi \neq [0,1]^2$, то верно хотя бы одно из следующих двух утверждений:

- существуют числа $x_1, x_2, y_0 \in [0,1]^2$, $x_1 < x_2$, такие, что для любого $x \in [x_1, x_2]$ верно, что $(x, y_0) \in A \cap B$ или

$$\{0, \rho\} \subseteq \arg \min_{\xi \in [0,\rho]} F_L(x, y_0, \xi),$$

- существуют числа $y_1, y_2, x_0 \in [0,1]^2$, $y_1 < y_2$, такие, что для любого $y \in [y_1, y_2]$ верно, что $(x_0, y) \in A \cap B$ или

$$\{0, \rho\} \subseteq \arg \min_{\xi \in [0,\rho]} F_L(x_0, y, \xi).$$

Тогда, в соответствии с леммой 6, в первом случае функция f линейна, то есть выполнено условие 3 утверждения 1, а во втором случае функция f_q линейна, то есть выполнено условие 4 утверждения 1. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть f, f_q — многочлены и существуют число $\varepsilon_1 \in (0, \rho)$ и пара $(x_1, y_1) \in U(\varepsilon_1)$, такие, что*

$$\varepsilon_1 \in \arg \min_{\xi \in [0,\rho]} F_L(x_1 - \varepsilon_1, y_1 - \varepsilon_1 + \rho, \xi),$$

$$0, \rho \notin \arg \min_{\xi \in [0,\rho]} F_L(x_1 - \varepsilon_1, y_1 - \varepsilon_1 + \rho, \xi).$$

Тогда выполнено хотя бы одно из условий 3, 4.

Доказательство. Рассмотрим произвольную последовательность (x_n), такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_1-\varepsilon_1$, $x_n \in [0,1]$, $f_q^{-1}(y_1)-f^{-1}(x_n+\varepsilon_1) \leqslant 0$, и последовательность (x_n) содержит различные числа. Поскольку $F_L(x,y)$ непрерывна по каждому из аргументов, то $\lim\limits_{n\to\infty} F_L(x_n, y_1 - \varepsilon_1 + \rho) = F_L(x_1-\varepsilon, y_1-\varepsilon_1+\rho)$.

Пусть $\varepsilon_n \in \arg\min\limits_{\xi\in[0,\rho]} F_L(x_n, y_1-\varepsilon_1+\rho, \xi)$.

(ε_n) ограниченная последовательность, следовательно, она имеет сходящуюся подпоследовательность. Обозначим: $\varepsilon_0 = \lim\limits_{i_n\to\infty} \varepsilon_{i_n}$.

Из непрерывности функций f, f_q следует:

$$\begin{aligned} F_L(x_1-\varepsilon_1, y_1-\varepsilon_1+\rho, \varepsilon_1) = F_L(x_1-\varepsilon_1, y_1-\varepsilon_1+\rho) = f_q^{-1}(y_1)-f^{-1}(x_1) = \\ = \lim_{i_n\to\infty} F_L(x_{i_n}, y_1-\varepsilon_1+\rho) = \lim_{i_n\to\infty} [f_q^{-1}(y_1-\varepsilon_1+\varepsilon_{i_n}) - f^{-1}(x_{i_n}-\varepsilon_1+\varepsilon_{i_n})] = \\ = f_q^{-1}(y_1-\varepsilon_1+\varepsilon_0) - f^{-1}(x_1-\varepsilon_1+\varepsilon_0) = F_L(x_1-\varepsilon_1, y_1-\varepsilon_1+\rho, \varepsilon_0). \end{aligned}$$

Следовательно, $\varepsilon_0 \in \arg\min\limits_{\xi\in[0,\rho]} F_L(x_1-\varepsilon_1, y_1-\varepsilon_1+\rho, \xi)$, и по условию леммы $\varepsilon_0 \notin \{0, \rho\}$.

Также из этих неравенств следует, что

$$f_q^{-1}(y_1-\varepsilon_1+\varepsilon_0) - f^{-1}(x_1-\varepsilon_1+\varepsilon_0) \leqslant 0. \tag{12}$$

Очевидно также из условия леммы, что

$$(x_1-\varepsilon_1+\varepsilon_0, y_1-\varepsilon_1+\varepsilon_0) \in [\varepsilon_0, 1+\varepsilon_0] \times [\varepsilon_0-\rho, 1+\varepsilon_0-\rho]. \tag{13}$$

Рассмотрим последовательности

$$\begin{aligned} x'_{i_n} &= x_{i_n} - \varepsilon_1 + \varepsilon_{i_n}, \\ y'_{i_n} &= y_1 - \varepsilon_1 + \varepsilon_{i_n}. \end{aligned}$$

Оставим в этих последовательностях только те элементы, которые удовлетворяют условиям

$$f_q^{-1}(x'_{i_n}) - f^{-1}(y'_{i_n}) \leqslant 0, \tag{14}$$

$$(x'_{i_n}, y'_{i_n}) \in [\varepsilon_0, 1+\varepsilon_0] \times [\varepsilon_0 - \rho, 1 + \varepsilon_0 - \rho]. \tag{15}$$

В силу (12), (13) из последовательности (x'_{i_n}, y'_{i_n}) придется «выкинуть» не более конечного числа элементов.

Покажем, что для почти всех элементов последовательности (x'_{i_n}, y'_{i_n})

$$\varepsilon_0 \in \arg\min_{\xi\in[0,\rho]} F_L(x'_{i_n} - \varepsilon_0, y'_{i_n} - \varepsilon_0 + \rho, \xi). \tag{16}$$

Допустим, это не так, и существует счетная подпоследовательность $(x'_{i_{k_n}}, y'_{i_{k_n}})$, такая, что

$$\xi_{i_{k_n}} \in \arg\min_{\xi\in[0,\rho]} F_L(x'_{i_n} - \varepsilon_0, y'_{i_n} - \varepsilon_0 + \rho, \xi),$$
$$\varepsilon_0 \notin \arg\min_{\xi\in[0,\rho]} F_L(x'_{i_{k_n}} - \varepsilon_0, y'_{i_{k_n}} - \varepsilon_0, \xi).$$

Так как $\varepsilon_{i_{k_n}} \in \arg\min\limits_{\xi\in[0,\rho]} F_L(x_{i_{k_n}} - \varepsilon_1, y_1 - \varepsilon_1 + \rho, \xi)$, то

- если $\varepsilon_{i_{k_n}} > \varepsilon_0$, то $\xi_{i_{k_n}} \in [\rho - (\varepsilon_{i_{k_n}} - \varepsilon_0), \rho]$, то есть $\lim\limits_{i_{k_n}\to\infty} \xi_{i_{k_n}} = \rho$,
- $\varepsilon_{i_{k_n}} < \varepsilon_0$, то $\xi_{i_{k_n}} \in [0, \varepsilon_0 - \varepsilon_{i_{k_n}}]$, то есть $\lim\limits_{i_{k_n}\to\infty} \xi_{i_{k_n}} = 0$.

Тогда в первом случае, учитывая, что $F_L(x,y)$ непрерывна по обоим переменным:

$$\begin{gathered}
F_L(x_1 - \varepsilon_1, y_1 - \varepsilon_1 + \rho) = \lim_{i_{k_n}\to\infty} F_L(x'_{i_{k_n}} - \varepsilon_0, y'_{i_{k_n}} - \varepsilon_0 + \rho) = \\
= \lim_{i_{k_n}\to\infty} F_L(x'_{i_{k_n}} - \varepsilon_0, y'_{i_{k_n}} - \varepsilon_0 + \rho, \xi_{i_{k_n}}) = \\
= \lim_{i_{k_n}\to\infty} f_q^{-1}(y'_{i_{k_n}} + \xi_{i_{k_n}} - \varepsilon_0) - f^{-1}(x'_{i_{k_n}} + \xi_{i_{k_n}} - \varepsilon_0) = \\
= f_q^{-1}(y_1 - \varepsilon_1 + \rho) - f^{-1}(x_1 - \varepsilon_1 + \rho) = F_L(x_1 - \varepsilon_1, y_1 - \varepsilon_1 + \rho, \rho).
\end{gathered}$$

То есть $\rho \in \arg\min\limits_{\xi\in[0,\rho]} F_L(x_1 - \varepsilon_1, y_1 - \varepsilon_1 + \rho, \xi)$, что противоречит изначальному предположению.

А во втором случае:

$$F_L(x_1-\varepsilon_1, y_1-\varepsilon_1+\rho) = \lim_{i_{k_n}\to\infty} F_L(x'_{i_{k_n}}-\varepsilon_0, y'_{i_{k_n}}-\varepsilon_0+\rho) =$$
$$= \lim_{i_{k_n}\to\infty} F_L(x'_{i_{k_n}}-\varepsilon_0, y'_{i_{k_n}}-\varepsilon_0+\rho, \xi_{i_{k_n}}) =$$
$$= \lim_{i_{k_n}\to\infty} f_q^{-1}(y'_{i_{k_n}}+\xi_{i_{k_n}}-\varepsilon_0) - f^{-1}(x'_{i_{k_n}}+\xi_{i_{k_n}}-\varepsilon_0) =$$
$$= f_q^{-1}(y_1-\varepsilon_1) - f^{-1}(x_1-\varepsilon_1) = F_L(x_1-\varepsilon_1, y_1-\varepsilon_1+\rho, 0).$$

То есть $0 \in \arg\min\limits_{\xi\in[0,\rho]} F_L(x_1-\varepsilon_1, y_1-\varepsilon_1+\rho, \xi)$, что противоречит изначальному предположению.

По лемме 2 имеем, что поскольку для почти всех элементов последовательности $(x'_{i_{k_n}}, y'_{i_{k_n}})$ выполнены условия (14), (15), (16) и по условию леммы $\varepsilon_0 \notin \{0,\rho\}$, то для почти всех i_{k_n}, $n\in\mathbb{N}$ верно, что

$$(f_q^{-1}(y'_{i_{k_n}}))' = (f^{-1}(x'_{i_{k_n}}))' = \mathrm{const}.$$

Верно следующее рассуждение: если почти все $x'_{i_{k_n}}$ совпадают, то, так как $x'_{i_{k_n}} = x_{i_{k_n}} - \varepsilon_1 + \varepsilon_{i_{k_n}}$ и все $x_{i_{k_n}}$ различны, то почти все $\varepsilon_{i_{k_n}} - \varepsilon_1$ различны. Следовательно, так как $y'_{i_{k_n}} = y'_1 - \varepsilon_1 + \varepsilon_{i_{k_n}}$, то почти все $y'_{i_{k_n}}$ различны.

В результате получаем, что как минимум одна из двух функций — $(f_q^{-1})'$, $(f^{-1})'$ — имеет счетное число различных точек, в которых значения функции совпадают. Следовательно, так как функции есть многочлены, как минимум одна из двух функций — $(f_q^{-1})'$, $(f^{-1})'$ — постоянна, то есть, как минимум одна из функций f_q, f представляет из себя линейный многочлен. Лемма доказана.

2.2. Доказательство утверждения 3

Достаточность следует из двух предыдущих утверждений. Докажем необходимость.

Покажем, что если выполнено $A = L$ и $B_R = R$, то функция f — линейна. Возьмем отрезок $[x_1, x_2] \subset [0,1]$ и число $y_0 \in [0,1]$ такие, что $\forall x \in [x_1, x_2]$ верно, что $F_R(x, y_0) \leqslant 0$.

Используя условие $B_R = R$, получаем, что

$$0 \in \arg\max_{\xi\in[-\rho,0]} F_R(x, y_0, \xi)$$

и $\forall\xi \in [-\rho, 0]$, $\forall x \in [x_1, x_2]$ $F_R(x, y_0, \xi) = F_L(x - \rho, y_0 + \rho, \xi + \rho) \leqslant 0$ и, значит, $F_L(x - \rho, y + \rho) \leqslant 0$.

Используя условие, $A = L$ получаем, что

$$\rho \in \arg\min_{\xi_1\in[0,\rho]} F_L(x - \rho, y_0 + \rho, \xi_1),$$

что равносильно

$$0 \in \arg\min_{\xi\in[-\rho,0]} F_R(x, y_0, \xi).$$

Получаем, что на отрезке $[-\rho, 0]$ минимум и максимум функции $F_R(x, y_0, \xi)$ по ξ при любом фиксированном x из отрезка $[x_1, x_2]$ достигаются в одной и той же точке. Следовательно, функция постоянна на данном отрезке. То есть $F_R(x, y, \xi)'_\xi = 0$ и

$$(f_q^{-1}(y_0 + \xi + \rho))'_\xi = (f^{-1}(x + \xi))'_\xi,$$

следовательно для любого $\xi \in [-\rho, 0]$ и $x \in [x_1, x_2]$ верно, что

$$f_q^{-1}(y + \xi + \rho))'_{y=y_0} = (f^{-1}(x + \xi))'_x.$$

Возьмем теперь $\xi = 0$. Получим

$$f_q^{-1}(y + \rho))'_{y=y_0} = (f^{-1}(x))'$$

для любого $x \in [x_1, x_2]$.

То есть функция $(f^{-1}(x))'$ постоянна на отрезке $[x_1, x_2]$. И поскольку по условию f есть многочлен, получаем, что f — линейная функция.

2.3. Доказательство теоремы

Очевидно, что условие 3 эквивалентно условию 3 утверждения 1 и условию 3 утверждения 2, а условие 4 эквивалентно условию 4 утверждения 1 и условию 4 утверждения 2.

Покажем, что условие 1 эквивалентно одновременному выполнению условия 1 из утверждения 1 и условия 1 из утверждения 2.

Пусть выполнено условие 1 из утверждения 1.

Возьмем $(x, y) \in [\rho, 1+\rho] \times [0,1] : f_q^{-1}(y) - f^{-1}(x) \leqslant 0$. Тогда

$$F_L(x-\rho, y) = \min_{\xi \in [0,\rho]} [f_q^{-1}(y+\xi-\rho) - f^{-1}(x-\rho+\xi)] \leqslant$$
$$\leqslant F_L(x-\rho, y, \rho) = f_q^{-1}(y) - f^{-1}(x) \leqslant 0.$$

То есть $(x-\rho, y) \in L$ и, следовательно, по условию 1 утверждения 1 $(x-\rho, y) \in A$, то есть $\rho \in \arg \min\limits_{\xi \in [-\rho, 0]} F_L(x-\rho, y, \xi)$ и, следовательно,

$$F_L'(x-\rho, y, \xi)_{\xi=\rho} = (f_q^{-1}(y))' - (f^{-1}(x))' \leqslant 0,$$

то есть условие 1 теоремы выполняется.

Обратно: пусть выполнено условие 1 теоремы. Докажем, что в этом случае выполнено условие 1 утверждения 1.

Для $(x, y) \in [0, \rho) \times [0,1]$ утверждение очевидно. Пусть $x > \rho$.

Докажем утверждение для случая $y = 0$. Тогда

Рассмотрим пару $(x, y) : F_L(x, y) < 0$. Обозначим:

$$S_0 = \{\xi \in [0,\rho] : \xi \leqslant \rho - y\},$$
$$S_1 = \{\xi \in [0,\rho] : F_L(x,y,\xi) > 0, \xi > \rho - y\},$$
$$S_2 = \{\xi \in [0,\rho] : F_L(x,y,\xi) \leqslant 0, \xi \geqslant \rho - y\}.$$

Заметим, что

$$\arg \min_{\xi \in [0,\rho]} F_L(x,y,\xi) = \arg \min_{\xi \in S_0 \cup S_2} F_L(x,y,\xi),$$

следовательно, множество $S_0 \cup S_2$ непусто.

Пусть S_0 непусто. Тогда найдем хотя бы одно число из множества $\arg \min\limits_{\xi \in S_0} F_L(x,y,\xi)$.

Заметим, что

$$\min_{\xi \in [0,\rho-y]} F_L(x,y,\xi) = \min_{\xi \in [0,\rho-y]} [f_q^{-1}(y+\xi-\rho) - f^{-1}(x+\xi)] \geqslant$$
$$\geqslant \min_{\xi \in [0,\rho]} [f_q^{-1}(\xi-\rho) - f^{-1}(x-y+\xi)] = \min_{\xi \in [0,\rho]} F_L(x-y,0,\xi) = F_L(x-y,0).$$

Если $F_L(x-y,0) > 0$, то $\min\limits_{\xi\in[0,\rho-y]} F_L(x,y,\xi) > 0$ и тогда $\arg\min\limits_{\xi\in[0,\rho]} F_L(x,y,\xi) \subseteq S_2$.

В противном случае, $F_L(x-y,0) \leqslant 0$ и тогда по условию 1 утверждения 1

$$F_L(x-y,0) = F_L(x-y,0,\rho) = f_q^{-1}(0) - f^{-1}(x-y+\rho).$$

Таким образом, $\min\limits_{\xi\in S_0} F_L(x,y,\xi) \geqslant f_q^{-1}(x-y) - f^{-1}(\rho)$.

В то же время,

$$\min_{\xi\in[0,\rho-y]} F_L(x,y,\xi) \leqslant F_L(x,y,\rho-y) = f_q^{-1}(0) - f^{-1}(x-y+\rho).$$

То есть, $\min\limits_{\xi\in[0,\rho-y]} F_L(x,y,\xi) = f_q^{-1}(0) - f^{-1}(x-y+\rho)$, то есть $\rho-y \in \arg\min\limits_{\xi\in S_0} F_L(x,y,\xi)$.

Таким образом, если на множестве S_0 достигается минимум функции $F_L(x,y,\xi)$ по ξ, то точка $\rho-y$ лежит среди тех точек, на которых достигается минимум, и $F_L(x,y,\rho-y) > 0$, то есть $\rho-y \in S_2$.

Следовательно, минимум функции $F_L(x,y,\xi)$ по ξ лежит в множестве S_2.

Заметим, что множество S_2 замкнуто и может быть представлено как счетное объединение отрезков и изолированных точек. Если S_2 состоит только из изолированных точек, то $F_L(x,y,\xi) = 0$ на S_2 в силу непрерывности функции $F_L(x,y,\xi)$. Следовательно, S_2 содержит хотя бы один отрезок.

Множество S_1 открыто. Если S_1 пусто, то по условию 1 следствия 1 $F_L(x,y,\xi)$ невозрастает по ξ на S_2 и, таким образом, $\rho \in \arg\min\limits_{\xi\in[0,\rho]} F_L(x,y,\xi)$, то есть $(x,y) \in A$.

Рассмотрим случай, когда множество S_1 непусто.

Предположим существуют три числа $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ из отрезка $[0,1]$, такие, что $[\alpha_1,\alpha_2] \subseteq S_2$, а $(\alpha_2,\alpha_3) \subseteq S_1$. По условию 1 из теоремы $F_L(x,y,\xi)$ невозрастает на S_2 и, следовательно, невозрастает на $[\alpha_1,\alpha_2]$. Для поведения функции $F_L(x,y,\xi)$ в правой окрестности точки α_2 возможны два варианта:

1) $F_L(x, y, \xi)$ невозрастает в правой окрестности точки α_2. Но тогда значение функции $F_L(x, y, \xi)$ в точках из правой окрестности α_2 не больше $F_L(x, y, \xi)$ и, следовательно, не больше 0, поскольку $\alpha_2 \in S_2$. Такого быть не может по предположению.

2) $F_L(x, y, \xi)$ возрастает в правой окрестности точки α_2. Тогда существует число $\varepsilon \in (\alpha_2, \alpha_3)$, такое, что для любого $\varepsilon' \in (\alpha_2, \alpha_2 + \varepsilon)$ верно, что

$$F_L(x, y, \alpha_2 + \varepsilon') \leqslant F_L(x, y, \alpha_1) \leqslant 0.$$

Таким образом, получаем, что точки из правой окрестности α_2 лежат в множестве S_2, и также приходим к противоречию.

Из данных рассуждений можно сделать вывод, что существует число $\alpha \in [0, \rho)$, такое, что $[\alpha, \rho] \subset S_2$, а в отрезке $[\max\{\rho - y, 0\}, \alpha]$ содержатся множество S_1 и изолированные точки множества S_2.

Так как минимум функции $F_L(x, y, \xi)$ по ξ не может достигаться на изолированных точках S_2, то он достигается на отрезке $[\alpha, \rho]$. На данном отрезке по условию 1 теоремы функция $F_L(x, y, \xi)$ невозрастает, а значит

$$\rho \in \arg \min_{\xi \in [0, \rho]} F_L(x, y, \xi),$$

то есть $(x, y) \in A$.

Пусть $F_L(x, y) = 0$. Тогда $(x, y) \in A$ в силу замкнутости A.

Пусть выполнено условие 1 теоремы. Покажем, что в этом случае выполнено условие 1 утверждения 2.

Возьмем $(x, y) \in R \cap [2\rho, 1] \times [0, 1]$. Тогда, так как $F_R(x, y) \leqslant 0$, то для произвольного числа $\xi \in [-\rho, 0]$ верно, что

$$F_R(x, y, \xi) = f_q^{-1}(y + \xi + \rho) - f^{-1}(x + \xi) \leqslant F_R(x, y) \leqslant 0.$$
$$S_0 = [1 - \rho - y, 0] \cap [-\rho, 0],$$
$$S_1 = [-\rho, 1 - \rho - y] \cap [-\rho, 0].$$

Пусть S_0 — не пусто. Тогда

$$\max_{\xi\in S_0} F_R(x,y,\xi) = \max_{\xi\in[1-\rho-y,0]} F_R(x,y,\xi) \leqslant$$
$$\leqslant \arg\max_{\xi\in[-\rho,0]} [f_q^{-1}(1+\rho+\xi') - f^{-1}(x-y+1+\xi)] =$$
$$= F_R(x-y+1,1) = f_q^{-1}(1) - f^{-1}(x-y+1+\rho).$$

С другой стороны,

$$\max_{\xi\in S_0} F_R(x,y,\xi) > F_R(x,y,1-y-\rho) = f_q^{-1}(1) - f^{-1}(x-y+1+\rho).$$

Следовательно, все точки максимума принадлежат S_1.

Для $y\in S_1$ и $x\geqslant 2\rho$ и $\xi\in[-\rho,0]$ по условию 1 теоремы верно, что $(f_q^{-1}(y+\xi+\rho))'_\xi - (f'^{-1}(x+\xi))'_\xi \leqslant 0$.

То есть $F_R(x,y,\xi)$ убывает по ξ в S_1.

Значит,

$$-\rho \in \arg\min_{\xi\in S_1} F_R(x,y,\xi) = \arg\min_{\xi\in S_1} F_R(x,y,\xi),$$

то есть $(x,y)\in A$.

Теорема доказана.

Список литературы

[1] Снегова Е. А. Критерий сводимости задачи об опасной близости к задаче о прокалывании // Интеллектуальные системы. 2011. Т. 15, вып. 1–4. С. 241–264.

[2] Снегова Е. А. Критерий сводимости задачи об опасной близости к одномерному интервальному поиску // Дискретная математика. 2011. Т. 23, вып. 3.