О задаче выразимости автоматов относительно суперпозиции для систем с фиксированной добавкой

А. А. Летуновский

Рассматривается задача выразимости конечного группового автомата Медведева M суперпозициями систем вида $\Phi \cup R$, где Φ состоит из всех булевых функций и «задержки», R — произвольная конечная система автоматов. Ранее автор показал, что для группового автомата Медведева M, группа которого является разрешимой, существует алгоритм проверки $M \in [\Phi \cup R]$. В настоящей работе решается задача выразимости через системы $\Phi \cup R$ произвольных групповых автоматов Медведева.

Ключевые слова: автомат, суперпозиция, булева функция, выразимость.

1. Введение

Известно, что решение задачи выразимости относительно операции суперпозиции для систем автоматных функций наталкивается на существенные трудности [1], а задача полноты не имеет смысла, так как все полные системы — бесконечны. Тем не менее, в задаче полноты удалось понизить арность полных систем до 2 [2]. Решение общей задачи выразимости для автоматов относительно суперпозиции не представляется возможным ввиду континуума замкнутых классов. Поэтому имеет смысл решать задачу выразимости конечных автоматов. Для задачи выразимости в работе [3] установлена алгоритмическая неразрешимость для конечных систем автоматных функций. Автор в работах [4, 8] изучил алгоритмическую разрешимость задачи выразимости для автоматов с безусловными переходами. Ранее в задачах полноты относительно суперпозиции и обратной связи были получены результаты для алгоритмической разрешимости систем с фиксированной добавкой [5]. Ранее автор показал, что по системе автоматных функций, содержащей все булевы функции и «задержку» можно определить, выразима ли через эту систему конкретная автоматная функция, «полугруппа» которой является разрешимой группой [7]. В данной статье автор продолжает изучение случаев, где задача выразимости разрешима. В качестве выражаемой автоматной функции рассматривается автоматная функция Медведева группового автомата.

2. Основные понятия и результаты

Пусть $E_2 = \{0, 1\}$, функции вида $g : E_2^n \to E_2$ называются булевыми функциями, их множество обозначается через P_2. Пусть E_2^∞ — множество всех сверхслов вида $a(1)a(2)\ldots$, где $a(j) \in E_2$, $j = 1, 2, \ldots$. Через $\mathbb{N}$ обозначим множество натуральных чисел. Для $m, n \in \mathbb{N}$ будем обозначать через $m|n$ то, что m делит n. Пусть

$$f : (E_2^\infty)^n \to (E_2^\infty)^m$$

— автоматная функция (a-функция), то есть она задается рекуррентно соотношениями (1).

$$\begin{cases} q_1(1) = q0_1, \\ \ldots \\ q_s(1) = q0_s \\ q_1(t+1) = \varphi_1(q_1(t), \ldots, q_s(t), a_1, \ldots, a_n), \\ \ldots \\ q_s(t+1) = \varphi_s(q_1(t), \ldots, q_s(t), a_1, \ldots, a_n) \\ b_1(t) = \psi_1(q_1(t), \ldots, q_s(t), a_1, \ldots, a_n) \\ \ldots \\ b_m(t) = \psi_m(q_1(t), \ldots, q_s(t), a_1, \ldots, a_n) \end{cases} \tag{1}$$

Вектор $q = (q_1, \ldots, q_s)$ задает состояние a-функции f, $q0$ её начальное состояние, буквы $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_m)$ называются входной и выходной буквами, а сверхслова $a(1)a(2)\ldots$ и

$b(1)b(2)\ldots$ — входными и выходными сверхсловами, соответственно. Вектор-функции φ и ψ называются функциями переходов и выходной функцией, соответственно, а шестерка

$$(E_2^n, E_2^s, E_2^m, \varphi, \psi, q0)$$

— автоматом, порождающим функцию f. Далее в тексте мы иногда будем использовать для автомата обозначение $(A, Q, B, \varphi, \psi, q0)$, при этом предполагая что $A \subseteq E_2^n, Q \subseteq E_2^s, B \subseteq E_2^m$. Автомат называется автоматом Медведева, если $B = Q, \psi(a, q) = q$.

Обычным образом доопределим функции φ и ψ на слова [1]:
$\varphi(q, a(1), \ldots, a(t)) = \varphi(\varphi \ldots \varphi(q, a(1)), \ldots, a(t-1)), a(t))$,
$\psi(q, a(1), \ldots, a(t)) = \psi(\varphi(q, a(1)), \ldots, a(t-1)), a(t))$
и определим рекурсивно функцию
$\overline{\psi}(q, a(1), \ldots, a(t)) = \overline{\psi}(q, a(1), \ldots, a(t-1))\psi(\varphi(q, a(1), \ldots, a(t-1)), a(t))$.

Класс всех a-функций обозначим через P.

В этом классе обычным образом введем операции суперпозиции. Для суперпозиции будем использовать модификации операций из [6].

$$\begin{cases} (\eta f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1), \\ (\varepsilon f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n) \\ (\varpi f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_3, \ldots, x_n) \\ (\delta f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \\ (f * g)(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n-1}) = f(g(x_1, \ldots, x_m), x_{m+1}, \ldots, x_{m+n-1}) \end{cases}$$

Пусть $R \subseteq P$, обозначим через $[R]$ — множество a-функций, получающихся из R с помощью операций суперпозиции. Рассматривая системы автоматов, будем считать без ограничения общности, что R состоит из одного автомата, так как задачу выразимости для нескольких автоматов можно свести к задаче для одного автомата, являющегося их параллельным соединением.

Автоматную функцию G_0, задаваемую уравнениями

$$\begin{cases} q(1) = 0, \\ q(t+1) = a(t), \\ b(t) = q(t), \end{cases}$$

назовём автоматной функцией «задержки».

Обозначим $<R> = [R \cup \{P_2, G_0\}]$.

Назовем автомат групповым, если все $\varphi_a(q) = \varphi(a, q), a \in A$ являются биекциями на Q.

Теорема 1. *Пусть R — произвольная система автоматов, M — произвольный групповой автомат Медведева, тогда задача определения $M \in <R>$ является алгоритмически разрешимой.*

3. Основные леммы и доказательство теоремы

Константной автоматной функцией назовем автоматную функцию, выдающую одно и тоже периодическое выходное сверхслово на всех входных сверхсловах. Класс константных автоматных функций обозначим через K.

Через β_M обозначим сверхслово, получающееся на выходе константного автомата M.

Для множества константных автоматных функций $K' \subseteq K$ обозначим через $\Theta(K')$ — множество длин минимальных периодов сверхслов $\{\beta_M : M \in K'\}$.

Из [8] известно, что для $R \subseteq P$ в случае $[R] \supseteq \{P_2, G_0\}$, $|R| < \infty$ задача выразимости константных автоматных функций является алгоритмически разрешимой, более того $\exists$ натуральные $b_R, q_R \in \mathbb{N}$, такие что

$$\Theta(<R> \cap K) = \{t : t \,|\, b_R q_R^i,\ i = 0, 1, \ldots\}.$$

Число q_R назовается главным цикловым индексом автомата R, b_R назовем частным цикловым индексом автомата R.

В работе[5] показано, что цикловые индексы b_R и q_R вычисляются по R. Заметим, что q_R^2, $q_R^3, \ldots, q_R^t, \ldots$ также являются главными цикловыми индексами, а $bq_R^2, bq_R^3, \ldots, bq_R^t, \ldots$ являются частными цикловыми индексами. Будем обозначать $q_R = q, b_M = b$.

Пусть $t \in \mathbb{N}$, обозначим $M^t{=}(A^t, Q, B^t, \overline{\varphi}, \overline{\psi}, q0)$ — автомат M на словах длины t.

Обозначим φ_α — подстановку на множестве состояний автомата, задаваемую словом $\alpha \in A^*$, а через $\pi_\alpha = \{Q_1, \ldots, Q_s\}$ — разбиение множества состояний автомата на классы эквивалентности по равенству выходных слов на входном слове α — такое, что $Q_1 \cup \ldots \cup Q_s = Q$ и $\forall q_1, q_2 \in Q \; q_1, q_2 \in Q_i \Leftrightarrow \bar{\psi}(q_1, \alpha) = \bar{\psi}(q_2, \alpha)$.

Пусть $\alpha \in A^*$. Обозначим $p_\alpha = (\varphi_\alpha, \pi_\alpha)$. Для $A' \in A^*$ обозначим $P_{A'} = \{p_\alpha : \alpha \in A'\}$.

Определение 1. Будем говорить, что автоматы $M_1 = (A_1, Q_1, B_1, \varphi_1, \psi_1)$, $M_2 = (A_2, Q_2, B_2, \varphi_2, \psi_2)$ подобны ($M_1 \approx M_2$), если $Q_1 = Q_2$ и $P_{A_1} = P_{A_2}$.

Утверждение 1. *Пусть автоматы M_1 и M_2 подобны, тогда $M_1 \in <M_2>$ и $M_2 \in <M_1>$.*

В последовательности M^b, M^{bq}, M^{bq^2},... автоматов с одним и тем же множеством состояний найдется конечное число попарно неподобных автоматов. Значит для некоторых $l_0 < l_1$ $M^{l_0} \approx M^{l_1}$. Без ограничения общности можно считать частным цикловым индексом автомата M число bq^{l_0}, а главным цикловым индексом число $q^{l_1 - l_0}$.

Лемма 1. *Пусть b, q — цикловые индексы автомата M, и M^{bq} подобен некоторому автомату Медведева, тогда $M^{bq} \in <M>$.*

Для доказательства этого утверждения нам понадобятся определение «копирования» одного автомата другим и «Лемма о копировании».

Определение 2 ([2]). Пусть f и g — автоматы с одинаковым числом входов и одинаковым числом выходов. Скажем, что автоматная функция g копирует автоматную функцию f, если найдутся такие натуральные n, j, k ($n \leqslant j$), что для любого $l = 0, 1, 2, \ldots$ и любой входной последовательности достаточной длины значение автоматной функции g в момент $j + kl$ совпадает со значением автоматной функции f в момент $n + kl$, то есть $f(n + kl) = g(j + kl)$.

Обозначим K_s — константный автомат $(\underbrace{1 \ldots 0}_{s})^\infty$

Лемма 2 ([2], лемма о копировании). *Пусть f — автоматная функция Медведева и g копирует f с параметрами n, j, s, тогда $f \in <g \cup K_s>$*

Доказательство леммы 1. Для доказательства леммы введем некоторые обозначения и приведем схему, копирующую автомат M^{bq}

$f(x_1, \ldots, x_{(bq)^2})$ — булева функция с $(bq)^2$ входами и bq выходами, такая что $f(\bar{x}) = \bar{y}$ тогда и только тогда, когда $p(\bar{x}) = p(\bar{y})$, причем $y_1 = x_1$. Такое $\bar{y}$ всегда найдется по построению цикловых индексов
w, w_1 — автоматные функции с bq входами и 1 выходом, такие что $w(t) = x_i$ при $t = i \bmod n_1$, $w_1(t) = x_i$ при $t = i \bmod n_1 + 1$
w^{-1} — автоматная функция с bq входами и $(bq)^2$ выходами, такая что $w^{-1}(t) = \overline{x(t-n_1+1)x(t-n_1+2)\ldots x(t)}$ при $t = 0 \bmod n_1$, $w^{-1}(t) = 0$ иначе.
$S(x_1, x_2)$ — автоматная функция, такая что при $t = 1, \ldots, n_1$ $S(x_1, x_2) = x_1$, а при $t > n_1$ $S(x_1, x_2) = x_2$.

Рассмотрим схему (рис. 1) и докажем, что она копирует автомат M^{bq}.

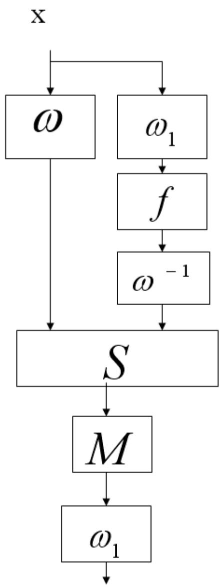

Рис. 1.

Действительно, пусть $a(0)a(1)a(2)\ldots$ — произвольная входная последовательность автомата M^{bq}, $q(0)q(1)\ldots$ и $b(0)b(1)b(2)\ldots$ — соответствующие последовательность состояний и выходная последовательность. Посмотрим, как преобразует эту входную последовательность построенная схема. Обозначим $a(t) = \overline{a_1(t)a_2(t)\dots a_{bq}(t)}$. $q'(0)q'(1)\dots$, $b'(0)b'(1)\dots$ — последовательность состояний и выходная последовательность автомата M в схеме. В моменты времени $0\dots bq-1$ на вход автомата M последовательно попадают $a_1(0), a_2(0), \dots, a_{bq}(0)$. Таким образом $q'(bq) = q(1)$, $b'(i) = b_i(0)$, $i = 1\dots bq$. По построению функций f, w^{-1}, w_1

$$\begin{aligned} q'(2bq) = \varphi(q'(bq), w_1(f(w^{-1}(a(1)a(2)\dots a(bq))))) = \\ = \varphi(q'(bq), w_1(f(\overline{a(1)a(2)\dots a(bq)})))) = \\ = \varphi(q'(bq), f(\overline{a(1)a(2)\dots a(bq)}) = \\ = \varphi(q(1), a(1)a(2)\dots a(bq)) = q(bq). \end{aligned}$$

Так как автомат M^{bq} подобен автомату Медведева, любые 2 состояния автомата M, достижимые словами длины кратной bq, отличимы любым словом длины bq. Таким образом данная схема копирует автомат, подобный автомату M^{bq} с параметрами $bq, bq, 1$, а значит по лемме о копировании и утверждению 1 $M^{bq} \in <M>$. Лемма доказана.

Определение 3. Пусть $M = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$, $M' = (A', Q', B', \varphi', \psi', q'_0)$. M' — называется n-подавтоматом M, если $\exists n$, такое что $A' \subseteq A^n$, $Q' \subseteq Q$, $B' \subseteq B^n$ и $\varphi(A', Q') \subseteq Q'$.

Прямо из леммы 1 следует

Утверждение 2. *Пусть b, q — цикловые индексы M, M' — bq-подавтомат M и M' — автомат Медведева, тогда $M' \in <M>$*

Определение 4. Пусть $M = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$, $M' = (A', Q', B', \varphi', \psi', q'_0)$ — автоматы. Скажем, что автомат M' является гомоморфным образом автомата M, если найдутся такие отображения «на» $\chi : Q \to Q'$, $\eta : A \to A'$, $\varpi : B \to B'$, что диаграммы, изображенные ниже, коммутативны.

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & \times & Q_1 & \xrightarrow{\varphi} & Q_1 \\ \eta\downarrow & & \chi\downarrow & & \chi\downarrow \\ A_2 & \times & Q_2 & \xrightarrow{\varphi'} & Q_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} A_1 & \times & Q_1 & \xrightarrow{\psi} & B_1 \\ \eta\downarrow & & \chi\downarrow & & \varpi\downarrow \\ A_2 & \times & Q_2, & \xrightarrow{\psi'} & B_2 \end{array}$$

Несложно показать, что верно следующее утверждение.

Утверждение 3. *Пусть автомат M' является гомоморфным образом автомата M, тогда $M' \in <M>$.*

Определение 5. Будем говорить, что $M''|M$, если $\exists n$, $\exists M'$: n — подавтомат M, такой что M'' — является гомоморфным образом M'.

Определение 6. Пусть $M = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$ — произвольный автомат. Множество подстановок $\{\varphi_a : Q \to Q | a \in A\}$, где $\varphi_a(q) = \varphi(q, a)$, порождает полугруппу подстановок S на множестве Q. Эту полугруппу подстановок будем называть полугруппой автомата M и обозначать S_M.

Определение 7. Будем говорить, что P — простой автомат, если S_P — простая группа.

Будем называть автомат M групповым, если S_M — группа.

Лемма 3. *Пусть M — групповой автомат Медведева, $R \subseteq P$, $|R| < \infty$, тогда $M \in <R> \Leftrightarrow$ все простые автоматы, делящие M принадлежат $<R>$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть автомат $M \in <R>$, докажем, что для произвольного простого P, такого, что $P|M$ $P \in <M> \subseteq <R>$. Случай автомата P с коммутативной группой рассмотрен в [7]. Пусть теперь группа автомата P — некоммутативна.

По условию делимости $\exists n$, и существует n-подавтомат M, такой что P является гомоморфным образом этого подавтомата. Как обычно b и q — цикловые индексы автомата M. Докажем, что в качестве n можно взять $n = bq$, тогда утверждение леммы будет следовать из утверждения 2 и утверждения 3.

Для доказательства этого рассмотрим последовательность степеней автомата M — M, M^2, M^3,…,M^i,… По определению подобия автоматов, найдутся такие ρ и ρ_0, что для любого $j \geqslant \rho_0$ $M^j \approx M^{j+\rho}$. Более того несложно показать, что для любого $j < \rho_0$ M^j — $(j+\rho)$ — подавтомат M.

Покажем, что $\rho|bq$. Для этого покажем, что bq также является периодом последовательности M^i. Действительно взяв любое слово α длины bq q раз подряд, мы получим тождественную подстановку на некотором множестве состояний автомата M e_α, а значит такая же тождественная подстановка α' есть и на длине bq. Значит $\forall\alpha\, p_{\alpha\alpha'} = p_\alpha$ и $P_{bq} \subseteq P_{2bq}$. Продолжая далее аналогичные рассуждения, получим цепочку $P_{bq} \subseteq P_{2bq} \subseteq \ldots \subseteq P_{bq^2}$. Но мы знаем[7], что $P_{bq} = P_{bq^2}$ и таким образом $P_{bq} = P_{2bq} = \ldots = P_{bq^2}$ и bq — период последовательности M^i.

Теперь вернемся к доказательству леммы. Как мы только что показали, $\exists i$, что $P|M^{bq+i}$. Рассмотрим автомат $M^{bq(bq+i)}$. Используя то же самое отображение, что и при делении A^{bq+i} мы получим некоторый подавтомат P, так как P — простой автомат, то либо это P либо константный автомат с одним состоянием. Второй случай невозможен, так как это противоречит некоммутативности P. Таким образом $P|A^{bq(bq+i)} \approx A^{bq}$ и лемма доказана.

Достаточность. Для доказательства достаточно воспользоваться теоремой Крона-Роудза [10].

Лемма 4. *Пусть P — простой автомат Медведева, M — произвольный автомат, тогда $P \in <M> \Leftrightarrow P|M^{bq}$.*

Доказательство. *Необходимость.* Доказательство слово в слово повторяет доказательство необходимости в лемме 3 с той лишь разницей, что теперь автомат M не автомат Медведева. Но так как автомат P — автомат Медведева и $P|M^{bq}$, то найдется M' — bq подавтомат автомата M, такой что $P|M'$ и $M' \in <M>$ по лемме 1.

Достаточность. Из теоремы Крона-Роудза и того факта, что $P \in <M>$ следует что $S_P|S_M$. Определение делимости для полугрупп следующее $S_1|S$, если в S найдётся подполугруппа S_2, такая что S_1 является гомоморфным образом S_2.

Вообще говоря из делимости полугрупп не следует делимость соответствующих автоматов. Для доказательства делимости автоматов в случае простого некоммутативного автомата Медведева нам понадобится Лемма 5.

Лемма 5. *Пусть $M = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$ — произвольный автомат Медведева, (X, S) — простая некоммутативная подгруппа S полугруппы S_M с системой образующих $X = (s_1, \ldots, s_k)$. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — множество слов в алфавите A, таких, что $\varphi(q, \alpha_i) =$*

$s_i(q), i = 1, \ldots, k$. Тогда в группе S существует система образующих $X' = (s'_1, \ldots, s'_k)$, и множество слов в алфавите A — $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_k$, такие что $\varphi(q, \alpha'_i) = s'_i(q), \alpha'_i$ и $l(\alpha'_1) = \ldots = l(\alpha'_k)$.

Доказательство. Пусть $l_1 = l(\alpha_1), \ldots, l_m = l(\alpha_m))$. Обозначим $d = NOD(l_1, \ldots, l_m)$ Пусть $(e_1, \ldots)$ — множество слов в алфавите A, таких что $\varphi(q, e_i) = q, i = 1, \ldots$ Обозначим $l(e_i) = d_i$. Обозначим $d_e = NOD(\{d_i\})$. Очевидно, что $d_e = Cd$ для некоторого C. Возможно 2 случая
1. $C > 1$
2. $C = 1$

1.Пусть $C > 1$. Рассмотрим множество элементов группы S, соответствующее словам длины кратной Cd в алфавите A. Несложно показать, что это нормальная подгруппа группы S, что возможно только если это единица.

Таким образом для любого элемента группы S имеем $s^C = e$. В этом случае это циклическая группа порядка C, а значит не выполнено условие некоммутативности.

2. Пусть $C = 1$. Тогда найдутся 2 слова в алфавите A (e_1, e_2), такие что $\varphi(q, e_1) = \varphi(q, e_2) = q$ и $l(e_1) - l(e_2) = d$. Добавляя e_1 и e_2 к образующим мы можем выровнять длины образующих элементов при этом не меняя значений соответствующих элементов группы. Лемма доказана.

Из Леммы 5 и того факта, что $P|A$ следует, что существует n — подавтомат A' и отображения «на» $\chi : Q_{A'} \to Q_P$, $\eta : A_{A'} \to A_P$, что диаграмма, изображенная ниже, коммутативна

$$\begin{array}{ccccc} A_{A'} & \times & Q_{A'} & \xrightarrow{\varphi} & Q_{A'} \\ \eta\downarrow & & \chi\downarrow & & \chi\downarrow \\ A_P & \times & Q_P & \xrightarrow{\varphi'} & Q_P \end{array}$$

Для доказательства делимости осталось показать, что существует отображение «на» $\varpi : B_{A'} \to B'$, что диаграмма, изображенная ниже, коммутативна

$$\begin{array}{ccccc} A_{A'} & \times & Q_{A'} & \xrightarrow{\psi} & B_{A'} \\ \eta\downarrow & & \chi\downarrow & & \varpi\downarrow \\ A_P & \times & Q_P, & \xrightarrow{\psi'} & B_P \end{array}$$

Рассмотрим схему, выражающую автомат P, состоящую из автомата M, булевых функций и задержек. Рассмотрим произвольную букву $a \in A_P$. Пусть $Q_a \in Q$ — множество состояний автомата P, достижимых словами вида a^*, $|Q_a| = l$. Это значит, что удлинение периода константы a^∞ после подачи на автомат P равно l. Подадим сверхслово a^∞ на вход схемы, выражающей автомат P. Все автоматы схемы, кроме автомата M не увеличивают периода сверхслова, значит автомат M увеличивает период некоторого (возможно другого) сверхслова в l раз. Это значит, что $\forall a \in A_P \exists a' \in A_M$, такое что a' задает ту же подстановку и то же разбиение в автомате M. То же самое будет верно и для любого слова $\alpha \in A_P^*$. Это доказывает делимость $P|M$. Лемма доказана.

Автор выражает благодарность проф. Бабину Д. Н. за ценные замечания и внимание к работе.

Список литературы

[1] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

[2] Бабин Д. Н. О полноте двухместных автоматных функций относительно суперпозиции // Дискретная математика. Т. 1, вып. 4. 1989. С. 423–431.

[3] Кратко М. И. Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов // ДАН СССР. 1964. Т. 155, № 1. С. 35–37.

[4] Летуновский А. А. О выразимости константных автоматов // Интеллектуальные системы. Т. 9, вып. 1–4. 2005. С. 457–468.

[5] Бабин Д. Н. О классификации автоматных базисов Поста по разрешимости свойств полноты и А-полноты // ДАН. № 4. Т. 367. 1999. С. 439–441.

[6] Мальцев А. И. Итеративные алгебры и многообразие Поста // Алгебра и логика. 1966. Т. 5, № 2. С. 5–24.

[7] Летуновский А. А. О выразимости суперпозициями автоматов с разрешимыми группами // Интеллектуальные системы. Т. 14, вып. 1–4. 2010. С. 379–392.

[8] Летуновский А. А. О выразимости константных автоматов суперпозициями // Интеллектуальные системы. Т. 13, вып. 1–4. 2009. С. 397–406.

[9] Каргаполов, Мерзляков. Основы теории групп / 3-е изд. М.: Наука, 1982.

[10] Арбиб М. Алгебраическая теория автоматов языков и полугрупп. М.: Статистика, 1975.