Об автоматной сложности классов Поста булевых функций

М. А. Кибкало

В статье рассматривается сложность автоматной реализации булевых функций и устанавливаются точные значения и асимптотические оценки функции Шеннона для замкнутых классов булевых функций, входящих в решетку Поста.

Ключевые слова: булева функция, детерминированный конечный автомат, автоматная сложность, замкнутый класс Поста, решетка Поста, функция Шеннона.

Введение

Наборы, на которых функция $f : E^n \to E$ принимает значение 1, можно рассматривать как слова конечного языка $\mathcal{L}_f$. Минимальное число состояний автомата, представляющего язык $\mathcal{L}_f$, называется автоматной сложностью функции f. Автоматной сложностью множества булевых функций называется максимальная автоматная сложность функции из этого множества. Значением функции Шеннона для класса булевых функций $\mathcal{K}$ называется автоматная сложность множества $\mathcal{K} \cap P_2^n$ функций от n переменных из $\mathcal{K}$. В статье рассматривается сложность автоматной реализации булевых функций и устанавливаются точные значения и асимптотические оценки функции Шеннона для замкнутых классов булевых функций, входящих в решетку Поста.

Автор выражает глубокую благодарность академику В. Б. Кудрявцеву и проф. Д. Н. Бабину за ценные замечания и внимание к работе.

1. Основные определения

Через E обозначим множество $\{0,1\}$, E^n — двоичный куб размерности n, E^n_q ($E^n_q \subseteq E^n$, $q = 0,\ldots,n$) — q-й слой куба E^n. Через α_i обозначим i-ю координату набора $\bar{\alpha} \in E^n$, $i = 1,\ldots,n$. Через P_2^n обозначим множество всех булевых функций от n переменных.

Определим детерминированный конечный автомат (ДКА) и инициальный конечный автомат (ИКА) согласно [2].

В произвольном конечном алфавите A определим класс конечных языков, содержащих слова длины n: $\mathcal{L}_n(A) = \{L \subseteq A^n\}$. Каждой $f \in P_2^n$ можно взаимно однозначно сопоставить конечный язык $L(f) \in \mathcal{L}_n(E)$ по следующему правилу: слово $\alpha_1 \ldots \alpha_n \in L(f) \Leftrightarrow f(\tilde{\alpha}) = f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = 1$, $\alpha_i \in E$, $i = 1,\ldots,n$.

Будем говорить, что ИКА $V_q(E,Q,E,\varphi,\psi,q)$ представляет $f \in P_2^n$, если он представляет $L(f) \in \mathcal{L}_n(E)$.

Сложностью $\mathbb{S}(V_q)$ ИКА V_q назовем число состояний в нем. Автоматной сложностью булевой функции $f \in P_2^n$ назовем наименьшую сложность ИКА, представляющего $L(f) \in \mathcal{L}_n(E)$: $\mathbb{S}(f) = \min\limits_{V_q \sim L(f)} \mathbb{S}(V_q)$.

Пусть $\mathcal{K} \subseteq P_2$ — класс булевых функций, $\mathcal{K}(n) = \mathcal{K} \cap P_2^n$ — множество функций от n переменных из $\mathcal{K}$. Функцию $\mathbb{S}(\mathcal{K},n) = \max\limits_{f \in \mathcal{K}(n)} \mathbb{S}(f,n)$ назовем функцией Шеннона класса $\mathcal{K}$. Заметим, что $\mathbb{S}(\mathcal{K},n)$ также является функцией Шеннона соответствующего класса конечных языков $\mathcal{L}_n(E)$.

Приведем обозначения замкнутых классов, введенных Постом в [8, 9] и их описания, приведенные в [1]

- C_i, $i = 1,\ldots,4$ — все булевы функции, все функции, сохраняющие 0 и/или 1.
- A_i, $i = 1,\ldots,4$ — все монотонные функции, все монотонные функции, сохраняющие 0 и/или 1.
- D_i, $i = 1,2,3$ — все самодвойственные α-функции, все монотонные самодвойственные функции, все самодвойственные функции.

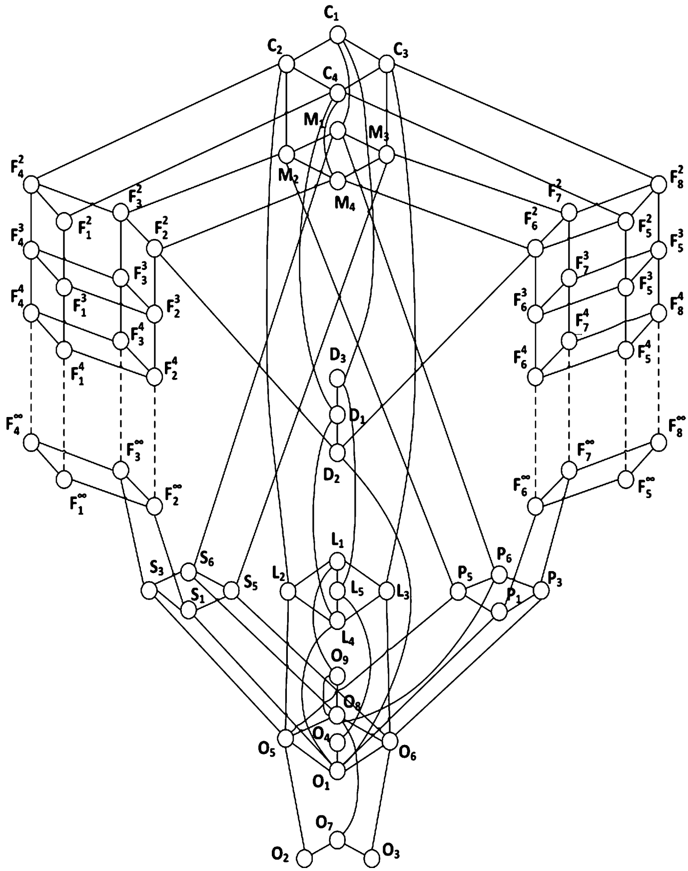

Рис. 1.

- F_1^μ, $\mu = 2, \ldots, \infty$ — все α-функции, удовлетворяющие условию $\langle \alpha^\mu \rangle$.
- F_2^μ, $\mu = 2, \ldots, \infty$ — все монотонные α-функции, удовлетворяющие условию $\langle \alpha^\mu \rangle$.
- F_3^μ, $\mu = 2, \ldots, \infty$ — все монотонные функции, удовлетворяющие условию $\langle \alpha^\mu \rangle$.
- F_4^μ, $\mu = 2, \ldots, \infty$ — все функции, удовлетворяющие условию $\langle \alpha^\mu \rangle$.

- F_5^{μ}, $\mu = 2, \ldots, \infty$ — все α-функции, удовлетворяющие условию $\langle A^{\mu} \rangle$.
- F_6^{μ}, $\mu = 2, \ldots, \infty$ — все монотонные α-функции, удовлетворяющие условию $\langle A^{\mu} \rangle$.
- F_7^{μ}, $\mu = 2, \ldots, \infty$ — все монотонные функции, удовлетворяющие условию $\langle A^{\mu} \rangle$.
- F_8^{μ}, $\mu = 2, \ldots, \infty$ — все функции, удовлетворяющие условию $\langle A^{\mu} \rangle$.
- L_i, $i = 1, \ldots, 5$ — классы линейных функций.
- S_i, $i = 1, 3, 5, 6$ — классы логических сумм.
- P_i, $i = 1, 3, 5, 6$ — классы логических произведений.
- O_i, $i = 1, \ldots, 9$ — классы констант и/или переменных.

Вышеперечисленные классы образуют решетку Поста, приведенную на рис. 1.

Теорема 1. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого класса $\mathcal{K} \in \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ существуют $p \geqslant 0$ и функция максимальной сложности $f \in \mathcal{K}(n)$, автоматная сложность которой равна*

$$\mathbb{S}(f) = \mathbb{S}(\mathcal{K}, n) = 2^{n-p} - 1 + \sum_{i=0}^{p} 2^{2^i} - p - 1,$$

где значение p для данного n однозначно вычисляется по формуле $p(n) = \min\{q \mid 2^{n-q-1} < 2^{2^{q+1}}\}$.

Теорема 2. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого класса $\mathcal{K} \in \{D_1, D_3\}$ существуют $p \geqslant 0$ и функция максимальной сложности $f \in \mathcal{K}$, автоматная сложность которой равна*

$$\mathbb{S}(f) = \mathbb{S}(\mathcal{K}, n) = 2^{n-p} - 1 + \sum_{i=0}^{p} 2^{2^i} - p - 1 - u(n, p),$$

где $p(n) = \min\{q \mid 2^{n-q-1} < 2^{2^{q+1}}\}$,

$$u(n, p) = \begin{cases} 2^{2^{p-1}-1} & \text{при } n = 2^p + p,\ p > 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Следствие 1. *Для любого класса* $\mathcal{K} \in \{C_1, C_2, C_3, C_4, D_1, D_3\}$ *выполнено*

$$\frac{2^n}{n} \lesssim \mathbb{S}(\mathcal{K}, n) \lesssim 2 \cdot \frac{2^n}{n}.$$

Следствие 2. *Для любого класса* $\mathcal{K} \in \{C_1, C_2, C_3, C_4, D_1, D_3\}$ *при* $n = p + (1+\alpha) \cdot 2^p$, $\alpha \in (0, 1]$ *выполнено*

$$\mathbb{S}(\mathcal{K}, n) \sim (1+\alpha) \cdot \frac{2^n}{n}.$$

Теорема 3. *Для любого* $n \in \mathbb{N}$ *и любого класса* $\mathcal{K} \in \{F_i^\infty,\ i = 1, 4, 5, 8\}$ *существуют* $p \geqslant 0$ *и функция максимальной сложности* $f \in \mathcal{K}$, *автоматная сложность которой*

$$\mathbb{S}(f) = \mathbb{S}(\mathcal{K}, n) = 2^{n-1-p} - 1 + \sum_{j=0}^{p} 2^{2^j} - p - 1 + \max(2^{n-2-p}, 2^{2^p} - 1) + u(i, n, p),$$

где $p(n) = \min\{q \mid 2^{n-q-2} < 2^{2^{q+1}}\}$,

$$u(i, n, p) = \begin{cases} 1 \text{ при } i = 1, 4,\ n = 2^p + p + 1,\ p > 0, \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Следствие 3. *Для любого класса* $\mathcal{K} \in \{F_i^\infty,\ i = 1, 4, 5, 8\}$ *выполнено*

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2^n}{n} \lesssim \mathbb{S}(\mathcal{K}, n) \lesssim \frac{3}{2} \cdot \frac{2^n}{n}.$$

Следствие 4. *Для любого класса* $\mathcal{K} \in \{F_i^\infty,\ i = 1, 4, 5, 8\}$ *при* $n = (1+\alpha) \cdot 2^p + p$, $\alpha \in (0, 1]$ *выполнено*

$$\mathbb{S}(\mathcal{K}, n) \sim \frac{3(1+\alpha)}{4} \cdot \frac{2^n}{n}.$$

Следствие 5. *Для любого класса* $\mathcal{K} \in \{F_i^\mu,\ \mu \geqslant 2,\ i = 1, 4, 5, 8\}$ *выполнено*

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2^n}{n} \lesssim \mathbb{S}(\mathcal{K}, n) \lesssim 2 \cdot \frac{2^n}{n}.$$

Теорема 4. *Для любого класса* $\mathcal{K} \in \{A_1, A_2, A_3, A_4, D_2, F_i^2,\ i = 2, 3, 6, 7\}$ *при* $n = \alpha\binom{p}{\lfloor p/2 \rfloor} + p$, $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ *имеет место асимптотическая оценка*

$$\mathbb{S}(\mathcal{K}, n) \sim \frac{2\alpha c}{\sqrt{\log n}} \cdot \frac{2^n}{n}, \ \ c = \sqrt{2/\pi},$$

где $p(n) = \min\left\{q \mid 2^{n-q} \leqslant 2^{\binom{q}{\lfloor q/2 \rfloor} + q \bmod 2}\right\}$ *для классов* A_1, A_2, A_3, A_4, D_2 *и* $p(n) = \min\left\{q \mid 2^{n-q} \leqslant 2^{\binom{q}{\lceil (q+1)/2 \rceil}}\right\}$ *для классов* F_i^2, $i = 2, 3, 6, 7$.

Следствие 6. *Для любого класса* $\mathcal{K} \in \{A_1, A_2, A_3, A_4, D_2, F_i^2,\ i = 2, 3, 6, 7\}$ *выполнено*

$$\frac{c}{\sqrt{\log n}} \cdot \frac{2^n}{n} \lesssim \mathbb{S}(\mathcal{K}, n) \lesssim \frac{2c}{\sqrt{\log n}} \cdot \frac{2^n}{n}.$$

Теорема 5. *Для любого класса* $\mathcal{K} \in \{F_i^\infty,\ i = 2, 3, 6, 7\}$ *при* $n = \alpha\binom{p}{\lfloor p/2 \rfloor} + p$, $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ *имеет место асимптотическая оценка*

$$\mathbb{S}(\mathcal{K}, n) \sim \frac{3\alpha c}{2\sqrt{\log n}} \cdot \frac{2^n}{n}, \ \ c = \sqrt{2/\pi},$$

где $p(n) = \min\left\{q \mid 2^{n-q-1} \leqslant 2^{\binom{q}{\lfloor q/2 \rfloor} + q \bmod 2}\right\}$.

Следствие 7. *Для любого класса* $\mathcal{K} \in \{F_i^\infty,\ i = 2, 3, 6, 7\}$ *выполнено*

$$\frac{3c}{4\sqrt{\log n}} \cdot \frac{2^n}{n} \lesssim \mathbb{S}(\mathcal{K}, n) \lesssim \frac{3c}{2\sqrt{\log n}} \cdot \frac{2^n}{n}.$$

Следствие 8. *Для любого класса* $\mathcal{K} \in \{F_i^\mu,\ \mu \geqslant 3,\ i = 2, 3, 6, 7\}$ *выполнено*

$$\frac{3c}{4\sqrt{\log n}} \cdot \frac{2^n}{n} \lesssim \mathbb{S}(\mathcal{K}, n) \lesssim \frac{2c}{\sqrt{\log n}} \cdot \frac{2^n}{n}.$$

Приведенные выше утверждения дополняет теорема 6, опирающаяся на известные оценки сложности. Доказательства этого утверждения в данной работе мы приводить не будем ввиду его простоты.

Теорема 6. *Для следующих классов достижимы точные значения автоматной сложности:*

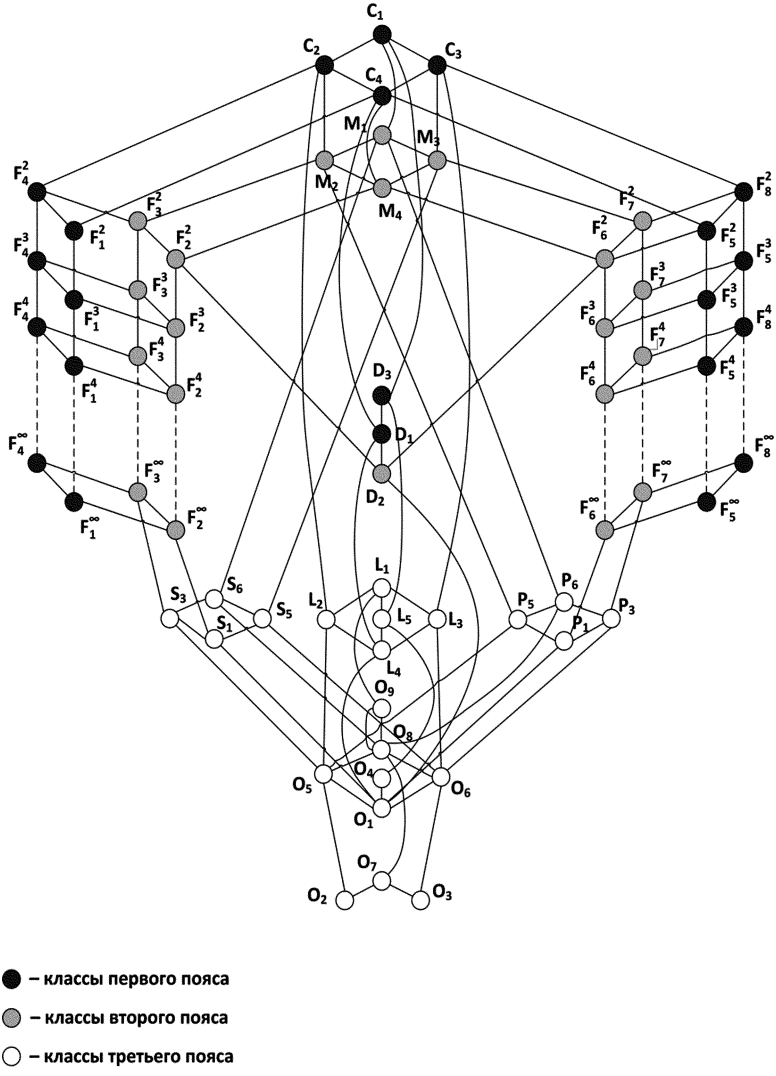

Рис. 2.

1) $\mathbb{S}(L_i, n) = 2n,\ i = 1, 2, 3, 4, 5.$

2) $\mathbb{S}(S_i, n) = 2n,\ i = 1, 3, 5, 6.$

3) $\mathbb{S}(P_i(n)) = n + 1,\ i = 1, 3, 5, 6.$

4) $\mathbb{S}(O_i(n)) = n+1$, $i = 1,2,4,5,6,7,8,9$.

5) $\mathbb{S}(O_3(n)) = 1$.

Таким образом, имеет место разбиение решетки классов Поста на три пояса в соответствие с вышеприведенной асимптотикой автоматной сложности (на рис. 2 пояса обозначены черным, серым и белым цветами). Для классов первого и третьего пояса устанавливаются точные значение автоматной сложности (см. формулировки теорем выше).

2. Классы первого пояса: $C_1, C_2, C_3, C_4, D_1, D_3$, F_i^∞, F_i^μ, $\mu \geqslant 2$, $i = 1,4,5,8$

Назовем подавтоматом шестерку $V = (A, B, Q, P, \varphi, \psi)$, где $P \subseteq Q$, а $\varphi: P \times A \to Q$ и $\psi: P \times A \to B$ — частично определенные функции перехода и выхода.

Можно построить ИКА $\tilde{V}$ из нескольких подавтоматов $V_i = (A, B, Q_i, P_i, \varphi_i, \psi_i)$, $i = 1, \ldots, k$ с непересекающимися множествами P_i, положив $\tilde{Q} = \bigcup_{i=1}^n Q_i$, выбрав начальное состояние $\tilde{q} \in \tilde{Q}$ и доопределив функции φ и ψ на множество $\bigcup_{i=1}^k Q_i \setminus \bigcup_{i=1}^k P_i$.

Назовем (полным) двоичным прямым деревом высоты l подавтомат T, диаграмма которого есть (полное) ориентированное двоичное дерево высоты l, переходы в котором делаются из состояний слоя T_i в состояния слоя T_{i+1}, $i = 0, \ldots, l-1$.

Назовем обратным деревом высоты p подавтомат R, диаграмма которого есть ориентированное дерево высоты p, переходы в котором делаются из состояний слоя R_i в состояния слоя $R_{\max(i-1,0)}$, $i = 0, \ldots, p$.

При построении автомата путем объединения прямого и обратного деревьев начальным состоянием будет корень прямого дерева, а тупиковым состоянием — корень обратного дерева.

Для ИКА $V_q = (E, Q, E, \varphi, \psi, q)$ и $k \in \mathbb{N}$ доопределим функции φ и ψ на $Q \times A^k$ так, что для $p \in Q$, $\bar{\alpha} \in A^k$, $\bar{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ выполнено $\varphi(p, \bar{\alpha}) = \varphi(\ldots\varphi(\varphi(p, \alpha_1), \alpha_2), \ldots \alpha_k)$ и $\psi(p, \bar{\alpha}) = \psi(\ldots\varphi(\varphi(p, \alpha_1), \alpha_2), \ldots \alpha_k)$.

l-м слоем Q_l, $Q_l \subseteq Q$ автомата V_q назовем множество $\{\varphi(q, \bar{\alpha}),\ \bar{\alpha} \in E^l\}$.

Будем говорить, что состояние $p \in Q$ распознает набор $\bar{\alpha} \in E_2^l$, если $\psi(p, \bar{\alpha}) = 1$.

Назовем i-суффиксом набора $\bar{\alpha} \in E^n$, $\bar{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ набор $\bar{\beta} \in E^i$, $\bar{\beta} = \{\alpha_{n-i+1}, \ldots, \alpha_n\}$ и i-суффиксом функции $f \in P_2^n$ функцию $g(x_{n-i+1}, \ldots, x_n) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-i}, x_{n-i+1}, \ldots, x_n)$ для $i = 0, \ldots, n$ и любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-i} \in E$.

Множество i-суффиксов функций из $\mathcal{K}(n) \subseteq P_2^n$ обозначим через $\underline{\mathcal{K}_i(n)}$.

Очевидна следующая верхняя оценка функции Шеннона для класса $\mathcal{K} \subseteq P_2$.

$$\mathbb{S}(\mathcal{K}, n) \leqslant \sum_{i=0}^{n} \min(2^i, \underline{\mathcal{K}_{n-i}(n)}) \qquad (*)$$

Схема доказательства теорем для класса $\mathcal{K}$ выглядит следующим образом:

1) Из двух подавтоматов строится автомат, представляющий специальную функцию из $\mathcal{K}$. Первый подавтомат является полным двоичным прямым деревом T высоты l, листья $t_l(\bar{\alpha})$ которого соответствуют наборам $\bar{\alpha} \in E^l$, а второй — обратным деревом R высоты p, листья которого $r_p(f)$ соответствуют функциям $f \in P_2^p$ — p-суффиксам функций из некоторого множества $\tilde{\mathcal{K}}(n) \subseteq \mathcal{K}(n)$.
2) Доказывается, что этот автомат имеет максимальную сложность в $\tilde{\mathcal{K}}(n)$. Для некоторых классов первого пояса решётки Поста $\tilde{\mathcal{K}}(n)$ совпадает с $\mathcal{K}(n)$, и, следовательно, удается найти точное значение функции Шеннона. Для второго пояса $\tilde{\mathcal{K}}(n)$ содержит функции, сложность которых близка к максимально возможной.
3) Находится асимптотика функции Шеннона класса $\mathcal{K}$ и асимптотические значения некоторых параметров построенного автомата.

Теорема 1 и следствия 1, 2 для P_2 (C_1 в нотации Поста) доказаны в [3]. При этом строится автомат, представляющий самую сложную функцию из P_2^n. Автомат представляет собой полное прямое дерево T высоты l, листья которого соединены с листьями обратного дерева R высоты p, $n = l + p + 1$. Обратное дерево также является полным, то есть $\tilde{\mathcal{K}}(n) = P_2^n$ и $\left|\underline{\mathcal{K}_p(n)}\right| = |P_2^p| - 1$. Листья T (состояния слоя T_l) соединяются с листьями R (состояниями слоя R_p) так, что все состояния построенного автомата являются достижимыми, и автомат не содержит эквивалентных состояний за исключением состояния, эквивалентного тупиковому, в каждом из $p + 1$ слоев обратного дерева. Обозначим множество таких состояний через Z_p.

Для такого автомата доказаны следующие свойства и соотношения (f — функция, представляемая этим автоматом):

$$\mathbb{S}(f) = \mathbb{S}(C_1(n)) = 2^{n-p} - 1 + \sum_{i=0}^{p} 2^{2^i} - p - 1,$$
$$\frac{2^n}{n} \lesssim \mathbb{S}(C_1, n) \lesssim 2 \cdot \frac{2^n}{n}.$$

Обратное дерево высоты p используется при $2^p + p \leqslant n < 2^{p+1} + p + 1$. Число листьев прямого и обратного деревьев связаны соотношением $|R_p|/2 \leqslant T_l < |R_p|^2$.

Для $n = p + (1+\alpha) \cdot 2^p$, $\alpha \in (0, 1]$ выполнено $\mathbb{S}(C_1, n) \sim (1+\alpha) \cdot \frac{2^n}{n}$.

Для числа переменных и высоты обратного дерева выполнено:

$$p = \log n - \log(1+\alpha) + O\left(\frac{\log n}{n}\right).$$

Очевидно, что эти рассуждения применимы и к классам C_2, C_3 и C_4. Достаточно положить $\varphi(t_l(\bar{0}), 0) = r_p(0)$ и $\varphi(t_l(\bar{1}), 1) = r_p(1)$, то есть, соединить нулевым ребром состояние из T_l, соответствующее нулевому набору из E^l с состоянием из R_p, соответствующим тождественному нулю из P_2^p, и единичным ребром — состояние из T_l, соответствующее единичному набору из E^l с состоянием из R_p, соответствующим тождественной единице из P_2^p.

Доказательство теоремы 2 (классы D_1, D_3).

Используется та же конструкция автомата, что и в теореме 1. Самодвойственность функций из D_3 накладывает ограничения на способ соединения состояний из T_l и R_p. Состояния из T_l, соответствующие двойственным наборам $\bar{\alpha}$ и $\bar{\alpha}^*$ из E^l должны соединяться с состояниями из R_p, соответствующими двойственным функциям из P_2^n: $\varphi(t_l(\bar{\alpha}),\beta) = \varphi(t_l(\bar{\alpha}^*),\beta^*)^*$, $\beta \in E$. При этом, для достижимого состояния $r_p(f) \in T_l$, где $f \in D_3(p)$, существует такой набор $\bar{\alpha} \in E_2^l$, что $\varphi(t_l(\bar{\alpha}),0) = \varphi(t_l(\bar{\alpha}),1) = r_p(f)$. То есть, такое состояние должно соединяться, по крайней мере, с двумя состояниями из T_l.

Утверждение 1. *При $|R_p|/2 < T_l < |R_p|^2$ ($2^p + p < n < 2^{p+1} + p + 1$) можно построить такое соединение T_l и R_p, что все состояния из R_p будут достижимы, и автомат не будет содержать бесполезных и эквивалентных состояний вне множества Z_p.*

Утверждение 2. *При $|R_p|/2 = T_l$ ($2^p + p = n$) число недостижимых состояний в R_p не меньше максимума из числа недостижимых состояний, соответствующих функциям из $D_3(p)$ и числа достижимых состояний, соответствующих функциям из $D_3(p)$.*

Следовательно, число недостижимых состояний в R_p не меньше $|D_3(p)|/2 = 2^{2^p-1}$. Для таких p и n можно построить соединение T_l и R_p, оставляющее недостижимыми ровно $|D_3(p)|/2$ состояний из R_p, соответствующих функциям из $D_3(p)$. Следующее утверждение обеспечивает достижимость всех состояний из R_{p-1}.

Утверждение 3. *Любая функция $f \in P_2^{p-1}$ является $(p-1)$-суффиксом некоторой функции $f \in P_2^p \setminus D_3(p)$.*

Для класса D_1 проводим рассуждения, аналогичные рассуждениям для классов C_2, C_3 и C_4. Теорема 2 доказана.

Очевидно, что следствия 1, 2 верны и для классов D_1, D_3.

Доказательство теоремы 3, следствий 3, 4, 5 (классы D_1, D_3).

Обозначим через $\mathcal{H}_t^{n,i} : \; P_2^n \to p_2^{n+1}$, $i = 0,1$, $t = 1,\ldots,n+1$ отображение, для которого выполнено

$$\mathcal{H}_t^{n,i}(f)(x_1,\ldots,x_{n+1}) = \begin{cases} f(x_1,\ldots,x_{t-1},x_{t+1},\ldots,x_{n+1}), & x_{t-1} = i; \\ 1-i, & x_{t-1} = 1-i. \end{cases}$$

Для $\mathcal{K} \subseteq P_2^n$ обозначим $\mathcal{H}_t^{n,i}(\mathcal{K}) = \{\mathcal{H}_t^{n,i}(f),\ f \in \mathcal{K}(n)\}$, $i = 0,1$ и $\mathcal{H}^{n,i}(\mathcal{K}) = \bigcup_{t=1}^{n+1} \mathcal{H}_t^{n,i}(\mathcal{K})$.

Операция $\mathcal{H}_t^{n,i}$ вызывает вставку дополнительной переменной после x_t (в начале при $t = 0$), причем функция $\mathcal{H}_t^{n,i}(f)$ может быть равна i, только если значение этой переменной равно i.

Если Q_t — t-й слой автомата V_q, через Q'_t обозначим множество $Q_t \setminus Q_n$ нетупиковых состояний из Q_t, $t = 0, \ldots, n-1$. Считаем $Q_n = Q'_n$.

Утверждение 4. *Для любой $f \in P_2^n$ выполнено*

$$\mathbb{S}(\mathcal{H}_t^{n,1}(f)) = \mathbb{S}(f) + \min_{V_q \sim L(f)} \max_{t=0,\ldots,n} |Q'_t|.$$

Доказательство. Рассмотрим приведенный автомат $V_q(E, Q, E, \varphi, \psi, q) \sim L(f)$ и $t = 0, \ldots, n$. Автомат $\bar{V}_q$, представляющий $\mathcal{H}_t^{n,1}(f)$ можно построить из V_q добавлением слоя $\overline{Q'_{t+1}}$ после слоя Q'_t, причем переходы из состояний Q'_t по 1 будут делаться в состояния $\overline{Q'_{t+1}}$, а по 0 — в тупиковое состояние.

При $t < n$ автомат $\bar{V}_q(E, \bar{Q} = Q \cup \overline{Q'_{t+1}}, E, \bar{\varphi}, \bar{\psi}, q) \sim L(\mathcal{H}_t^{n,1}(f))$ строится следующим образом: для любого $r \in Q'_t$ в автомат добавляется состояние $h(r) \in \overline{Q'_{t+1}}$. Функции перехода $\bar{\varphi}$ и выхода $\bar{\psi}$ определяются так:

$$\bar{\varphi}(r, i) = \begin{cases} h(r), \text{ если } r \in Q'_t,\ i = 1, \\ r_{n,0}, \text{ если } r \in Q'_t,\ i = 0, \\ \varphi(h^{-1}(r), i), \text{ если } r \in \overline{Q'_{t+1}}, \\ \varphi(r, i), \text{ иначе.} \end{cases}$$

$$\bar{\psi}(r, i) = \begin{cases} 0, \text{ если } r \in Q'_t, \\ \psi(h^{-1}(r), i), \text{ если } r \in \overline{Q'_{t+1}}, \\ \psi(r, i), \text{ иначе.} \end{cases}$$

При $t = n$ тупиковое состояние $r_{n,0} \in Q_n$ дублируется и перестает быть тупиковым. Новым тупиковым состоянием становится $h(r_{n,0})$. Функции $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ определяются так:

$$\bar{\varphi}(r, i) = \begin{cases} h(r_{n,0}), \text{ если } r = r_{n,0}, h(r_{n,0}), \\ h(r_{n,0}), \text{ если } \varphi(r, i) = r_{n,0},\ \psi(r, i) = 0,\ r \in Q \setminus Q_n, \\ r_{n,0}, \text{ если } \varphi(r, i) = r_{n,0},\ \psi(r, i) = 1,\ r \in Q \setminus Q_n, \\ \varphi(r, i), \text{ иначе.} \end{cases}$$

$$\bar{\psi}(r,i) = \begin{cases} 1, & \text{если } r = r_{n,0},\ i = 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Очевидно, что построенный автомат также будет приведенным. Сложность построенного автомата будет наибольшей, если мы дублируем слой, содержащий наибольшее число состояний, то есть при таком t, что $|Q'_t| = w(V_q)$. Утверждение доказано.

Утверждение 5. *Для любой $f \in P_2^n$ выполнено*

$$\mathbb{S}(\mathcal{H}_t^{n,0}(f)) \leqslant \mathbb{S}(f) + \min_{V_q \sim L(f)} \max_{t=0,\dots,n} |Q'_t| + n.$$

Доказывается аналогично предыдущему утверждению. Но, в силу несимметричности относительно 0 и 1 определения представимости функции конечным автоматом, может потребоваться добавление цепочки состояний, компенсирующих эту несимметричность. Несимметричность состоит в том, что состояние, не распознающее ни один из суффиксов набора из P_2^n, считается эквивалентным тупиковому состоянию. В то же время для состояний, распознающих все возможные суффиксы наборов из P_2^n, вообще говоря, не определяется эквивалентое «антитупиковое» состояние.

Доказательство теоремы 3.

Автоматы, рассматриваемые в статье, содержат полные прямые и обратные деревья, и применение операций $\mathcal{H}_t^{n,1}$ и $\mathcal{H}_t^{n,0}$ вызывает одинаковые изменения их топологии.

Очевидно, что отображения $\mathcal{H}^{n,0}$ и $\mathcal{H}^{n,1}$ сохраняют такие свойства булевых функций, как монотонность и сохранение нуля или единицы. Следовательно,

$$\begin{array}{ll} F_1^\infty(n+1) = \mathcal{H}^{n,0}(C_4(n)), & F_2^\infty(n+1) = \mathcal{H}^{n,0}(A_4(n)), \\ F_3^\infty(n+1) = \mathcal{H}^{n,0}(A_1(n)), & F_4^\infty(n+1) = \mathcal{H}^{n,0}(C_1(n)), \\ F_5^\infty(n+1) = \mathcal{H}^{n,1}(C_4(n)), & F_6^\infty(n+1) = \mathcal{H}^{n,1}(A_4(n)), \\ F_7^\infty(n+1) = \mathcal{H}^{n,1}(A_1(n)), & F_8^\infty(n+1) = \mathcal{H}^{n,1}(C_1(n)). \end{array} \qquad (**)$$

Утверждение 6. *Для $\tilde{f} \in P_2^n$, представляемой автоматом максимальной сложности (доказательство теоремы 1) существует такое $\tilde{t} \in [0,n]$, что*

$$\mathbb{S}(\mathcal{H}^{n,1}_{\tilde t}(\tilde f), n+1) = \mathbb{S}(F_8^\infty(n+1)) = \mathbb{S}(F_5^\infty(n+1)) \quad \textit{и}$$
$$\mathbb{S}(\mathcal{H}^{n,0}_{\tilde t}(\tilde f), n+1) = \mathbb{S}(F_4^\infty(n+1)) = \mathbb{S}(F_1^\infty(n+1)).$$

Доказательство. Из $(*)$ следует, что автомат максимальной сложности, построенный при доказательстве теоремы 1, содержит слой максимальной мощности среди автоматов, представляющих функции из P_2^n. Возможны два случая:

а) $n = p + 2^p$ — максимальным будет последний слой обратного дерева $Q'_{\tilde t}$, $\tilde t = n - p$, содержащий $2^{2^p} - 1$ состояние (и одно эквивалентное тупиковому);

б) $n \neq p + 2^p$ — максимальным будет последний слой прямого дерева $Q'_{\tilde t}$, $\tilde t = n - p - 1$, содержащий 2^{n-p-1} состояний.

Добавление к самому сложному приведенному автомату, представляющему функцию из P_2^n, слоя максимальной мощности дает самый сложный автомат, представляющий функцию из $F_8^\infty(n+1)$. Следовательно, $\mathbb{S}(\mathcal{H}^{n,1}_{\tilde t}(\tilde f), n+1) = \mathbb{S}(F_8^\infty(n+1))$.

Аналогично для $\mathcal{H}^{n,0}_t$ и класса $F_4^\infty(n+1)$ с той разницей, что в случае а) к слою $Q'_{\tilde t}$ будет добавлено одно состояние, из которого переход по 0 делается в тупиковое состояние, а по 1 — в состояние, распознающее все наборы из P_2^{n-t}. Следовательно, $\mathbb{S}(\mathcal{H}^{n,0}_{\tilde t}(\tilde f)) = \mathbb{S}(F_4^\infty(n+1))$.

Очевидно, что функцию $\tilde f$ можно выбрать так, чтобы она была α-функцией. Получаем $\mathbb{S}(\mathcal{H}^{n,1}_{\tilde t}(\tilde f)) = \mathbb{S}(F_5^\infty(n+1))$ и $\mathbb{S}(\mathcal{H}^{n,0}_{\tilde t}(\tilde f)) = \mathbb{S}(F_1^\infty(n+1))$. Утверждение доказано.

Из утверждения 6 непосредственно следует теорема 3.

Очевидно следующее утверждение, из которого выводятся следствия 3–5.

Утверждение 7. *Для $\tilde f \in P_2(n)$, представляемой автоматом максимальной сложности выполнено*

$$\mathbb{S}(\tilde f) \sim 2 \cdot |Q'_{\tilde t}| + |Q'_{\tilde t+1}| \ \textit{и}\ \mathbb{S}(\mathcal{H}^{n,i}_{\tilde t}(\tilde f)) \sim 3 \cdot |Q'_{\tilde t}| + |Q'_{\tilde t+1}|,\ i \in E.$$

Следствие 5 выводится из следствий 1, 3 и того, что $F_i^\mu \supseteq F_i^\infty$ для всех $\mu \geqslant 2$, $i = 1, 4, 5, 8$.

3. Классы второго пояса: $A_1, A_2, A_3, A_4, D_2, F_i^2, F_i^\infty, F_i^\mu$, $\mu \geqslant 3$, $i = 2, 3, 6, 7$

Для построения автоматов с большой сложностью, представляющих монотонные функции, введем понятие монотонного вложения — специального отображения двоичного куба в множество монотонных булевых функций.

Для $l, p \in \mathbb{N}$ назовем монотонным (l,p)-вложением отображение $\mu_{l,p}:\ E^l \to A_1(p)$, такое что для любых $\bar\alpha, \bar\beta \in E^l$, $\bar\alpha \geqslant \bar\beta$, $\bar\gamma \in E^p$ выполнено $\mu_{l,p}(\bar\alpha)(\bar\gamma) \geqslant \mu_{l,p}(\bar\beta)(\bar\gamma)$. $A_1(p)$ — множество монотонных булевых функций от p аргументов в нотации Поста.

Утверждение 8. *Пусть $\mu_{l,p}$ — монотонное (l,p)-вложение. Тогда функция $f_{l,p}:\ E^{l+p} \to E$, $f_{l,p}(\alpha_1, \ldots, \alpha_l, \gamma_1, \ldots, \gamma_p) = \mu_{l,p}(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ $(\gamma_1, \ldots, \gamma_p)$ будет монотонной.*

Назовем монотонное (l,p)-вложение $\mu_{l,p}$ (l,p,F)-вложением, если $\mu_{l,p}(E^l) \subseteq F$ для некоторого множества $F \subseteq A_1(p)$ и (l,p,F_0,F_1)-вложением, если $\mu_{l,p}(\{\bar\alpha \in E^l \mid \alpha_1 = i\}) \subseteq F_i$ для некоторых множеств $F_i \subseteq A_1(p)$, $i = 0, 1$.

Для (l,p,F_0,F_1)-вложения $\mu_{l,p}$ естественным образом определяются $(l-1,p,F_0)$-вложение $\mu_{l,p,0}$ и $(l-1,p,F_1)$-вложение $\mu_{l,p,1}$. Для всех $\alpha_j, \gamma_k \in E$, $j = 2, \ldots, l$, $k = 1, \ldots, p$ верно

$$\mu_{l,p,0}(\alpha_2, \ldots, \alpha_l)(\gamma_1, \ldots, \gamma_p) \leqslant \mu_{l,p,1}(\alpha_2, \ldots, \alpha_l)(\gamma_1, \ldots, \gamma_p). \qquad (***)$$

И наоборот, если для $(l-1,p,F_0)$-вложения $\mu_{l,p,0}$ и $(l-1,p,F_1)$-вложения $\mu_{l,p,1}$ выполнено $(***)$, можно определить монотонное (l,p,F_0,F_1)-вложение $\mu_{l,p}$.

Для множества $F \subseteq E_q^p$, $q = 0, \ldots, p$ положим $F^> = \bigcup_{\bar\beta \in F} \{\bar\alpha \in E^p \setminus F \mid \bar\alpha > \bar\beta\}$ и $F^< = \bigcup_{\bar\beta \in F} \{\bar\alpha \in E^p \setminus F \mid \bar\alpha < \bar\beta\}$. Обозначим через $\mathcal{F}(F) \subseteq P_2^p$ множество булевых функций, все нижние единицы которых лежат в F. Через $\mathcal{G}(F) \subseteq P_2^p$ обозначим множество функций вида $\mathcal{G}(f) = f \vee \chi(F^>)$, где $f \in F$, а χ — характеристическая функция.

Перенумеруем элементы множества F от $\bar\gamma_1$ до $\bar\gamma_{|F|}$. Обозначим через $\nu_{\bar\gamma}^p \in A_1(p)$ функцию, для которой $\bar\gamma \in E^p$ является единственной нижней единицей. Для $l = 1, \ldots, |F|$ назовем монотонное

$(l, p, \mathcal{F}(F))$-вложение $\mu_{l,p}$ каноническим, если для любого $\bar{\alpha} \in E^l$ выполнено $\mu_{l,p}(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)(\gamma_1, \ldots, \gamma_p) = \bigvee_{\alpha_i = 1} \nu^p_{\bar{\gamma}_1}(\gamma_1, \ldots, \gamma_p)$.

Назовем монотонное $(l, p, \mathcal{F}(F_0), \mathcal{F}(F_1))$-вложение $\mu_{l,p}$ каноническим ($|F_0| = |F_1|$, F_0 и F_1 могут лежать в разных слоях E^p), если вложения $\mu_{l,p,0}$ и $\mu_{l,p,1}$ являются каноническими и выполнено условие $(***)$.

Аналогично определяются канонические $(l, p, \mathcal{G}(F))$- и $(l, p, \mathcal{G}(F_0), \mathcal{G}(F_1))$-вложения.

Схема доказательства теорем для класса из второго пояса $\mathcal{K}$ выглядит следующим образом:

1) Из двух подавтоматов строится автомат, представляющий специальную функцию из $\mathcal{K}$. Первый подавтомат является полным двоичным прямым деревом T высоты l, листья $t_l(\bar{\alpha})$ которого соответствуют наборам $\bar{\alpha} \in E^l$, а второй — обратным деревом R высоты p, листья которого $r_p(f)$ соответствуют монотонным функциям $f \in A_1(p)$. При этом листья прямого дерева из слоя T_l отождествляются с листьями обратного дерева из слоя R_p при помощи канонического монотонного вложения. В качестве множества $\tilde{\mathcal{K}}(n)$ выбирается подмножество монотонных функций с p-суффиксами из некоторого множества (например, $\mathcal{F}(F)$, $F \subseteq E^p_q$).
2) Доказывается, что для большинства значений n сложность этого автомата асимптотически равна функции Шеннона для $\mathcal{K}$, а для некоторых значений n, в принципе, можно построить вдвое более сложный автомат, представляющий функцию из $\mathcal{K}(n)$.
3) Находится асимптотика функции Шеннона класса $\mathcal{K}$ и асимптотические значения некоторых параметров построенного автомата.

Доказательство теоремы 4 и следствия 6 (классы $A_1, A_2, A_3, A_4, D_2F^2_i$, $i = 2, 3, 6, 7$).

Для классов A_1–A_4 построим следующее вложение: $\left(l, p, \mathcal{F}\left(E^p_{p/2}\right)\right)$ при четных p (вложение E^l в множество функций, имеющих нижние единицы в среднем слое) и $\left(l, p, \mathcal{F}\left(E^p_{\lceil p/2\rceil}\right), \mathcal{F}\left(E^p_{\lfloor p/2\rfloor}\right)\right)$ при нечетных

p (вложение E^l в множество функций, имеющих нижние единицы в одном из средних слоев).

Утверждение 9. *Для нечетного p можно выбрать нумерацию наборов в слоях $E^p_{\lfloor p/2\rfloor}$ и $E^p_{\lceil p/2\rceil}$ так, что для вложения $\left(l, p, \mathcal{F}\left(E^p_{\lceil p/2\rceil}\right), \mathcal{F}\left(E^p_{\lfloor p/2\rfloor}\right)\right)$ будет выполнено свойство* (***).

Следует из возможности покрытия двоичного куба цепями Анселя [10].

То есть, построенный автомат представляет монотонную булеву функцию $\hat{f} \in A_1(n)$, $n = l + p$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ выбираем минимально возможное значение p. Высота обратного дерева будет равна p при $\hat{n}(p-1) < n < \hat{n}(p)$, где $\hat{n}(p) = \binom{p}{\lfloor p/2\rfloor} + p \bmod 2 + p$.

Для сложности функции $\hat{f}$ очевидна оценка

$$2^{n-p+1} - 1 \leqslant \mathbb{S}(\hat{f}) \leqslant 2^{n-p+1} - p - 1 + \sum_{i=0}^{p-1} |A_1(i)|.$$

Из оценок числа монотонных функций Коршунова [6] следует, что для некоторого $\beta(n) = o(1)$ при $\hat{n}(p-1)(1+\beta(n)) < n \leqslant \hat{n}(p)$ выполнено $2^{n-p} \gg \sum_{i=0}^{p-1} |A_1(i)|$, а при $\hat{n}(p-1) < n < \hat{n}(p-1)(1+\beta(n))$ имеем $2^{n-p} \gg \sum_{i=0}^{p-2} |A_1(i)|$.

Из (*) следует, что в первом случае сложность построенного автомата будет асимптотически равна функции Шеннона для класса A_1, а во втором — сложность автомата, представляющего монотонную функцию, может быть увеличена не более чем вдвое за счет увеличения высоты прямого дерева на 1.

Оценим высоту обратного дерева и сложность построенного автомата:

Утверждение 10. *При $n = p + \alpha\binom{p}{\lfloor p/2\rfloor}$, $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ выполнено $p = \log n + \frac{1}{2}\log\log n - \log c - \log\alpha + O\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)$ и $\mathbb{S}(\hat{f}) \sim \mathbb{S}(A_1, n) \sim \frac{2\alpha c}{\sqrt{\log n}} \cdot \frac{2^n}{n}$, $c = \sqrt{2/\pi}$.*

Так как на интервалах $\hat{n}(p-1) < n < \hat{n}(p-1)(1+\beta(n))$ выполнено $\mathbb{S}(\hat{f}) \sim \frac{c}{\sqrt{\log n}} \cdot \frac{2^n}{n}$, верно следствие 6 — для всех n выполнено $\frac{c}{\sqrt{\log n}} \cdot \frac{2^n}{n} \lesssim \mathbb{S}(A_1, n) \lesssim \frac{2c}{\sqrt{\log n}} \cdot \frac{2^n}{n}$.

Так как функция $\hat{f}$ сохраняет 0 и 1, вышесказанное применимо и к классам A_2, A_3, A_4.

Через $E^p_{q,i}$ обозначим множество наборов из E^p_q, первый элемент которых равен $i \in E$. Для класса самодвойственных монотонных функций D_2 построим следующее вложение: $\left(l, p, \mathcal{G}\left(E^p_{p/2,1}\right), \mathcal{G}\left(E^p_{p/2,0}\right)\right)$ при четных p и $\left(l, p, \mathcal{G}\left(E^p_{\lceil p/2\rceil}\right), \mathcal{G}\left(E^p_{\lfloor p/2\rfloor}\right)\right)$ при нечетных p. На множестве $E^p_{p/2,1}$ ($E^p_{\lceil p/2\rceil}$) задана некоторая нумерация наборов. Двойственные им наборы в том же порядке нумеруются в множестве $E^p_{p/2,0}$ ($E^p_{\lfloor p/2\rfloor}$).

В силу выбора множества функций $\mathcal{G}$ для любого $\bar{\gamma} \in E^p$ верно

$$\max_{\alpha_2,\ldots,\alpha_l} \mu_{l,p,0}(\alpha_2,\ldots,\alpha_l)(\gamma_1,\ldots,\gamma_p) = \min_{\alpha_2,\ldots,\alpha_l} \mu_{l,p,1}(\alpha_2,\ldots,\alpha_l)(\gamma_1,\ldots,\gamma_p).$$

Поэтому, вложения будут монотонными.

Утверждение 11. *Функция $\check{f}$, представляемая построенным автоматом, является самодвойственной.*

Покажем, что при четном p двойственным наборам $\{0, \alpha_2, \ldots, \alpha_l\}$ и $\{1, 1-\alpha_2, \ldots, 1-\alpha_l\}$ из E^l соответствуют двойственные функции $g_0 \in \mathcal{G}(E^p_{p/2,1})$ и $g_1 \in \mathcal{G}(E^p_{p/2,0})$. Куб E^p распадается на 4 непересекающихся множества $E^{p<}_{p/2,0}$, $E^p_{p/2,0}$, $E^p_{p/2,1}$, $E^{p>}_{p/2,1}$.

$E^{p<}_{p/2,0}$ содержит наборы, двойственные наборам из $E^{p>}_{p/2,1}$. Для любого $\bar{\alpha} \in E^{p<}_{p/2,0}$ $g_0(\bar{\alpha}) = g_1(\bar{\alpha}) = 0$ и для любого $\bar{\alpha} \in E^{p>}_{p/2,1}$ $g_0(\bar{\alpha}) = g_1(\bar{\alpha}) = 1$. $E^p_{p/2,0}$ содержит наборы, двойственные наборам из $E^p_{p/2,1}$. Для любого $\bar{\alpha} \in E^p_{p/2,0}$ $g_0(\bar{\alpha}) = 0$ и для любого $\bar{\alpha} \in E^p_{p/2,1}$ $g_1(\bar{\alpha}) = 1$. В силу выбранной нумерации наборов из $E^p_{p/2,0}$ и $E^p_{p/2,1}$ для любого $\bar{\alpha} \in E^p_{p/2,0}$ и, соответственно, $\bar{\alpha}^* \in E^p_{p/2,1}$ выполнено $g_1(\bar{\alpha}) = i \Leftrightarrow g_0(\bar{\alpha}^*) = 1 - i$.

Аналогично доказывается и для нечетного p. Утверждение 11 доказано.

Топология построенного автомата для всех n совпадает с топологией автомата, представляющего функцию $\hat{f}$. Следовательно, все рассуждения и оценки для $\hat{f}$ и классов A_i применимы также для $\check{f}$ и класса D_2.

Для классов F_6^2 и F_7^2 построим монотонное вложение $\left(l, p, \mathcal{F}\left(E^p_{\lceil \frac{p+1}{2} \rceil}\right)\right)$, для классов F_2^2 и F_3^2 — $\left(l, p, \mathcal{F}\left(E^p_{\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor}\right)\right)$. Доказывается аналогично случаю классов A_1–A_4. Отличие состоит в том, что изменяются интервалы значений n, при которых используются фиксированные значения p. Четные p выбираются при $\hat{n}(p-1) \leqslant n \leqslant \binom{p}{\frac{p}{2}+1} + p$, нечетные — при $\binom{p-1}{\frac{p-1}{2}+1} + p - 1 < n < \hat{n}(p)$. Соответственно, расширяются интервалы, на которых, в принципе, может быть построена более сложная функция из класса: для четных p — при $\hat{n}(p-1) \leqslant n < \hat{n}(p-1)(1+\beta(n))$, для нечетных — при $\binom{p-1}{\frac{p-1}{2}+1} + p - 1 < n < \hat{n}(p-1)(1+\beta(n))$. Утверждение 10 остается без изменения.

Теорема 4 доказана.

Следствие 6 очевидно из доказанной теоремы.

Доказательство теоремы 5 и следствий 7, 8 (классы F_i^∞, $i = 2, 3, 6, 7$).

Из ($**$) и утверждения 4 следует, что сложность автомата, представляющего функцию $\mathcal{H}^{n,1}_{\tilde{t}}(\hat{f})$ увеличится в $\frac{3}{2}$ раза при добавлении одной переменной. Поэтому, получаем $\mathbb{S}(\hat{f}) \sim \frac{3\alpha c}{2\sqrt{\log n}} \cdot \frac{2^n}{n}$ при $n = \alpha\binom{p}{\lfloor p/2 \rfloor} + p$, $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$.

При $\hat{n}(p-1)(1+\beta(n)) < n \leqslant \hat{n}(p)$ $\mathbb{S}(\hat{f})$ будет асимптотически равна функции Шеннона для класса F_7^∞. При $\hat{n}(p-1) < n < \hat{n}(p-1)(1+\beta(n))$ максимально возможная сложность монотонной функции тоже увеличится не более, чем в $\frac{3}{2}$ раза при добавлении одной переменной (при возможном дублировании слоя R_{p-1}). Значит, следствие 7 верно для класса F_7^∞.

Аналогично рассуждения применимы к классам F_i^∞, $i = 2, 3, 6$. Теорема 5 и следствие 7 доказаны.

Следствие 8 выводится из следствий 6, 7 и того, что $F_i^\mu \supseteq F_i^\infty$ для всех $\mu \geqslant 3$, $i = 2, 3, 6, 7$.

Заключение

В статье получены оценки функции Шеннона автоматной сложности для всех замкнутых классов из P_2 и построены сложные функции из этих классов.

Для классов C_1–$C_4, D_1, D_3, F_i^\infty$, $i = 1, 4, 5, 8$ найдены точные значения функции Шеннона, и построенные функции являются самыми сложными в классах. Следует отметить, что для этих классов известны точные количества функций от n переменных.

Оценки и сложные функции для классов монотонных функций A_1–$A_4, D_2, F_i^\infty, F_i^2$, $i = 2, 3, 6, 7$ также, в определенном смысле, являются неулучшаемыми. Асимптотика сложности построенных функций совпадает с асимптотикой функции Шеннона за исключением небольших интервалов. На этих интервалах, в принципе, может быть построена вдвое более сложная функция из класса. Для этого нужно построить более эффективное монотонное вложение. Для этих классов точные количества функций от n переменных неизвестны. Следует также отметить, что асимптотика функции Шеннона для классов монотонных функций хорошо согласуется с асимптотикой числа функций из этих классов, полученной Коршуновым [6] и Сапоженко [7].

Оценки функции Шеннона для оставшихся классов Поста F_i^μ, $\mu \geqslant 3$, $i = 2, 3, 6, 7$ и F_i^μ, $\mu \geqslant 2$, $i = 1, 4, 5, 8$ получены из оценок для меньших (F_i^∞) и объемлющего (C_1) классов и, в принципе, могут быть улучшены.

Список литературы

[1] Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966.

[2] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

[3] Кибкало М. А. О сложности представления коллекции языков в конечных автоматах // Интеллектуальные системы. Т. 13, вып. 1–4. 2009. С. 347–360.

[4] Кибкало М. А. Об автоматной сложности некоторых классов булевых функций // Интеллектуальные системы. Т. 14, вып. 1–4. 2010. С. 319–322.

[5] Кузьмин А. Д. Реализация функций алгебры логики автоматами, нормальными алгорифмами и машинами Тьюринга // Проблемы кибернетики. Вып. 13. М.: Наука, 1955. С. 75–96. (РЖМат, 1966, 1В223).

[6] Коршунов А. Д. О числе монотонных функций // Проблемы кибернетики. 1981. Вып. 38. С. 5–109.

[7] Сапоженко А. А. О числе антицепей в многослойных ранжированных множествах // Дискретная математика. 1989. Т. 1, вып. 2. С. 110–128.

[8] Post E. Two-valued iterative systems. 1941.

[9] Post E. Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. 43 (1921). P. 163–185.

[10] Hansel G. Sur le nombre des fonctions booléennes monotones de n variables. C. R. Acad Sci. Paris. 1966. 262. P. 1088–1090. (Русский перевод: Ансель Ж. О числе монотонных булевых функций от n переменных // Кибернетич. сб. Нов. серия. Вып. 5. М.: Мир, 1968. С. 53–57.)