Некоторые классы функций, вычислимые автоматами

И. Е. Иванов

В работе описаны замкнутые классы вычислимых функций, вычисляемых конечными автоматами, автоматами с магазинной памятью и автоматами с 2 магазинами.

Ключевые слова: автомат, автомат с магазинной памятью, вычислимая функция.

Введение

Согласно классификации формальных языков Хомского каждому типу языка сопоставлен акцептор — вычислительное устройство, распознающее данный язык. Для регулярных языков акцептором является конечный автомат, для контестно-свободных — автомат с магазинной памятью, для контестно-зависимых — линейно-ограниченная машина Тьюринга, для языков, порожденных грамматиками общего вида, — машина Тьюринга.

Аналогично, можно классифицировать и функции $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ по типу вычисляющего устройства. Хорошо известен класс вычислимых функций, то есть функций, вычисляемых машиной Тьюринга. В работе исследуеются классы функций, вычисляемых конечными автоматами, автоматами с магазинной памятью, автоматами с 2 магазинами.

1. Класс вычислимых функций, вычисляемых конечными автоматами

Пусть V — инициальный конечный детерминированный автомат (далее просто автомат)

$$V = \{A, Q, B, \varphi, \psi, q_0\},$$

где $A = B = \{0,1\}$, $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}\}$, $\varphi : Q \times A \to Q$, $\psi : Q \times A \to B$. Функионирование автомата определяеться его каноническими уравнениями:

$$\begin{cases} q(0) = q_0, \\ q(t+1) = \varphi(q(t), a(t)), \\ b(t) = \psi(q(t), a(t)), \end{cases}$$

которые задают отображение $h\colon E_2^\infty \to E_2^\infty$.

Пусть $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$. Будем говорить, что автомат V вычисляет функцию f, если для любого натурального n при подаче слова вида $0^k 1^{n+1} 0^\infty$ автомат выдает последовательность вида $0^l 1^{f(n)+1} 0^\infty$, где $k,\ l \in \mathbb{Z}_+$.

Опишем класс вычислимых автоматом функций.

Скажем, что функция $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ — периодическая с предпериодом $X \in \mathbb{Z}_+$ и периодом $d \in \mathbb{Z}_+$, если для любого $x \geqslant X$ $f(x+d) = f(x)$.

Скажем, что $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ — ограниченная функция, если для любого x выполнено f(x)<M, где $M \in \mathbb{N}$. В противном случае будем говорить, что функция f неограничена.

Утверждение 1. *Пусть $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ — ограниченная вычислимая автоматом функция. Тогда f — периодическая.*

Доказательство. Пусть V — автомат, реализующий f. Рассмотрим последовательность $\{r_k\}_{k=0}^{+\infty}$ элементов из Q такую, что $r_0 = q_0$, $r_k = \varphi(r_{k-1}, 1)$. Очевидно, она является периодической.

Так как f — ограниченная функция, будем считать, что последовательность $\{p_k\}_{k=1}^{+\infty}$, определенная из соотношений $p_i = \psi(r_i, 1)$ будет состоять лишь из одних нулей. В противном случае либо функция неограничена, либо постоянна с некоторого момента. Значит, единицы автомат начнет выдавать только после того, как получит на вход ноль. А это означает, что значение функции зависит лишь от состояния, в котором автомат получил ноль на вход. Отсюда заключаем, что f — периодическая. Утверждение доказано.

Утверждение 2. *Пусть $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ — неограниченная вычислимая автоматом функция. Тогда, начиная с некоторыго момента,*

$$f(x) = x + b(x),$$

где $b : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}$ — периодическая функция.

Доказательство. Пусть V — автомат, реализующий f. Рассмотрим последовательность $\{r_k\}_{k=0}^{+\infty}$ элементов из Q такую, что $r_0 = q_0$, $r_k = \varphi(r_{k-1}, 1)$. Очевидно, она является периодической. Так как f — неограниченная функция, то последовательность $\{p_k\}$ содержит бесконечно единиц, то есть с некоторого момента постоянна (иначе функция была бы ограниченной). Значит, с некоторого номера s последовательность p_k будет постоянной и будет равняться 1. Из существования таких номеров i, d, что будет выполнено для любых $k > i$ $r_k = r_{k+d}$ получаем, что для любого $x \geqslant i$ $f(x+d) = f(x) + d$, что равносильно заявленному. Утверждение доказано.

Утверждение 3. *Пусть $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ такова, что с некоторого момента выполнено*

$$f(x) = ax + b(x),$$

где $a \in \{0, 1\}$, а $b : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}$ — некоторая периодическая функция. Тогда f вычислимая автоматом функция.

Доказательство. Будем считать, что $b(x)$ — периодическая функция без предпериода и с периодом d. Введем следующие обозначения:

$$f_i = f(i), \quad i = 0, \ldots, X + d.$$

Диаграмма Мура автомата, вычисляющего $f(x)$, приведена на рис. 1.

Заметим, что данный автомат определен только на сверхсловах вида $\alpha = 0^k 1^{n+1} 0^\infty$, где $k, n \in \mathbb{Z}_+$. Если автомат получает слово другого вида, то будем считать, что он переходит в состояние q_F. Утверждение доказано.

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 1. *$f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ — вычислимая автоматом функция тогда и только тогда, когда с некоторого момента выполнено*

$$f(x) = ax + b(x),$$

где $a \in \{0, 1\}$, а $b : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}$ — некоторая периодическая функция.

Замечание. Класс вычислимых автоматом функций замкнут относительно суперпозиции, так как автомат, вычисляющий суперпозицию функций, можно получить суперпозицией автоматов, вычисляющих данные функции.

2. Класс вычислимых функций, вычисляемых автоматом с магазином

Инициальным детерминированным автоматом с магазиной памятью будем называть «девятку»

$$P = \{A, Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0\},$$

где A — входной алфавит, Q — конечное множество состояний, B — выходной алфавит, Γ — алфавит памяти (алфавит ленты магазина), $\varphi : A \times Q \times (\Gamma \cup \lambda) \to Q)$ — функция переходов, $\psi : A \times Q \times (\Gamma \cup \lambda) \to B$ — функция выхода, $\eta : A \times Q \times (\Gamma \cup \lambda) \to \Gamma^*$ — функция памяти, $q_0 \in Q$ — начальное состояние, $\gamma_0 \in \Gamma^*$ — начальная запись в магазине.

Функционирование P можно определить с помощью системы канонических уравнений, которые задают в каждый момент времени t состояние автомата $q(t)$, записанное в магазине слово $\gamma(t)$, и выход автомата $b(t)$ при подаче на вход $a(t)$:

$$
\begin{cases}
q(0) = q_0, \\
\gamma(0) = \gamma_0, \\
z(t) = LS(\gamma(t)), \\
q(t+1) = \varphi(a(t), q(t), z(t)), \\
\gamma(t+1) = S(\gamma(t))\eta(a(t), q(t), z(t)), \\
b(t) = \psi(a(t), q(t), z(t)),
\end{cases}
$$

где $LS : \Gamma^* \to \Gamma \cup \{\lambda\}$ возвращает последний символ при подаче непусого слова и $LS(\lambda) = \lambda$, а $S : \Gamma^* \to \Gamma^*$ — стирает последний символ входного слова и $S(\lambda) = \lambda$.

Автомат с магазинной памятью опеделяет детерминированную функцию $f : A^* \to B^*$. Обозначим $\mathcal{M}(A, B)$ множество детерминированных функций, порождаемых автоматами с магазинной памятью. Отметим, что $\mathcal{M}(A, B)$ содержит множество ограниченно-детерминированных функций (при $\Gamma = \varnothing$).

Пусть фиксировано $\alpha = a(0) \ldots a(t) \ldots \in A^\infty$. Тогда система уравнений один задает последовательности $\{\gamma_\alpha(t)\}$, $\{z_\alpha(t)\}$, $\{q_\alpha(t)\}$, $\{b_\alpha(t)\}$, то есть:

$$
\begin{cases}
q_\alpha(0) = q_0, \\
\gamma_\alpha(0) = \gamma_0, \\
z_\alpha(t) = LS(\gamma_\alpha(t)), \\
q_\alpha(t+1) = \varphi(a(t), q_\alpha(t), z_\alpha(t)), \\
\gamma(t+1)_\alpha = S(\gamma_\alpha(t))\eta(a(t), q_\alpha(t), z_\alpha(t)), \\
b_\alpha(t) = \psi(a(t), q_\alpha(t), z_\alpha(t)).
\end{cases}
$$

Пусть $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$. Будем говорить, что автомат с магазинной памятью P вычисляет функцию f, если для любого натурального n при подаче слова вида $0^k 1^{n+1} 0^\infty$ автомат выдает последовательность вида $0^l 1^{f(n)+1} 0^\infty$, где $k, l \in \mathbb{Z}_+$.

Опишем класс функций, вычислимых автоматом с магазинной памятью.

Утверждение 4. *Пусть $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ такова, что для некоторого $d \in \mathbb{N}$ с некоторого момента*

$$f(x+d) = f(x) + p(x),$$

где $p : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ — периодическая функция. Тогда существует автомат с магазинной памятью P, вычисляющий f.

Доказательство. Будем считать, что $p(x)$ — периодическая функция без предпериода и с периодом d. Пусть $f(x+d) = f(x) + p(x)$ выполняется для любого $x > X$. Введем следующие обозначения:

$$f_i = f(i),\ i = 0, \dots, X+d,$$
$$c_i = p(X+i),\ i = 1, \dots, d.$$

На рис. 2 приведена диаграмма автомата с магазинной памятью, вычисляющего $f(x)$. Переходы автомата описываются следующим шаблоном $a/z/b/\eta$, то есть из данного состояния, при подаче на вход символа a и верхнего символа магазина z, автомат записывает на выходную ленту b, а в магазине стирает последний символ и дописывает слово η. Следующее состояние указывает стрелка.

Заметим, что данный автомат определен только на сверхсловах вида $\alpha = 0^k 1^{n+1} 0^\infty$, где $k, n \in \mathbb{Z}_+$. Если автомат получает слово другого вида, то будем считать, что он переходит в состояние q_F. Утверждение доказано.

Для доказательства обратного утверждения нам потребуется серия вспомогательных утвержений.

Лемма 1. *Пусть $P = \{A, Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0\}$ — автомат с магазинной памятью. Если последовательность $|\gamma_\alpha(t)|$ равномерно ограничена на множестве всех сверхслов, то есть*

$$\exists M\ \forall \alpha \in A^\infty\ \forall t\ \ |\gamma_\alpha(t)| < M,$$

то отображение $A^* \!\to B^*$ является ограничено-детерминированным.

Доказательство. Построим конечный автомат $V = \{A, Q', B, \varphi', \psi', q_0\}$, реализующий данное отображение $A^* \to B^*$. Множество сотояний возьмем

$$Q' = Q \times \Gamma^M.$$

Функцию выхода определим $\varphi' : A \times Q' \to Q'$ исходя из :

$$\varphi'(a,(q,\gamma)) = (\varphi(a,q,z)), S(\gamma)\eta(a,q,z))),$$

а функцию выхода $\psi' : A \times Q' \to B$:

$$\psi'(a,(q,\gamma)) = \psi(a,q,z),$$

где $z = LS(\gamma)$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть фиксировано $\alpha = a(0)a(1)\ldots \in A^\infty$. Тогда системы уравнений*

$$\begin{cases} q(0) = q_0 \\ \gamma(0) = \gamma_0 \\ z(t) = LS(\gamma(t)) \\ q(t+1) = \varphi(a(t), q(t), z(t)) \\ \gamma(t+1) = S(\gamma(t))\eta(a(t), q(t), z(t)) \\ b(t) = \psi(a(t), q(t), z(t)) \end{cases} \tag{1}$$

и

$$\begin{cases} q'(0) = q_0 \\ \gamma'(0) = \gamma_0 \\ z'(t) = LS(\gamma'(t)) \\ q'(t+1) = \varphi(a(t), q'(t), z'(t)) \\ d(t+1) = \max\{\min\limits_{l \geqslant t+1} |\gamma(l)|, 1\} - 1 \\ \gamma'(t+1) = \gamma(t+1)\lfloor_{|\gamma(t+1)| - d(t+1)} \\ b'(t) = \psi(a(t), q'(t), z'(t)) \end{cases} \tag{2}$$

таковы, что для всех t

$$q(t) = q'(t), \;\; z(t) = z'(t), \;\; b(t) = b'(t).$$

Доказательство. Докажем лемму по индукции. База. При $t = 0$ утвержение, очевидно, выполнено. Шаг индукции. Пусть при $t \leqslant k$ утверждение выполнено. Значит, $q(t) = q'(t)$, $z(t) = z'(t)$. Отсюда следует, что $q(t+1) = q'(t+1)$, $b(t+1) = b'(t+1)$. покажем, что $z(t+1) = z'(t+1)$. Если $\eta(a(t), q(t), z(t)) \neq \lambda$, то это очевидно. Пусть $\eta(a(t), q(t), z(t)) = \lambda$ и $z(t+1) \neq z'(t+1)$. Это означает, что $z'(t+1) = \lambda$ (и подавно $\gamma'(t+1) = \lambda$), так как $\gamma'(t+1)$ по определению является суффиксом $\gamma(t+1)$. То есть $|\gamma(t+1)| = \min\limits_{l \geqslant t+1} |\gamma(l)|$. Следовательно, $|\gamma'(t+1)| = 1$, что противоречит тому, что $z'(t+1) = \lambda$. Значит, $z(t+1) = z'(t+1)$ и лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть $f : A^* \to B^*$ и $f \in \mathcal{M}(A, B)$. Тогда f преобразует периодические сверхслова в периодические.*

Доказательство. Пусть $P = \{A, Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0\}$ автомат с магазинной памятью, порождающий f. Функционирование P задает система уравнений (1). По лемме 2 можно задавать $q(t), z(t), b(t)$ системой уравнений (2). Определим $d_k = \min\limits_{t \geqslant k} |\gamma(t)|$, причем этот минимум достигается для любого k. Значит, существует возрастающая последовательность целых чисел n_k (в которых и достигается минимум) такая, что $|\gamma'(n_k)| = 1$.

Не ограничивая общности, будем считать, что все $\gamma'(n_k)$ одинаковы (иначе выберем из n_k подпоследовательность с указанным свойством и будем иметь дело с ней). Очевидно,

$$\exists i, j, N:\ \gamma'(n_i) = \gamma'(n_j),\ q(n_i) = q(n_j),\ \ z(n_i) = z(n_j),\ n_j - n_i = N\tau.$$

Докажем, что $\forall t \geqslant n_i\ z(t) = z(t + N\tau)$, $q(t) = q(t + N\tau)$, $\gamma'(t) = \gamma'(t + N\tau)$ по индукции. База доказана выше. Шаг индукции. Пусть для некоторого t выполнено $z(t) = z(t+N\tau)$, $q(t) = q(t+N\tau)$, $\gamma'(t) = \gamma'(t + N\tau)$, по условию $a(t) = a(t + N\tau)$. Тогда в силу канонических уравнений $z(t+1) = (z(t+1+N\tau)$, $q(t+1) = q(t+1+N\tau)$, $\gamma'(t+1) = \gamma'(t + 1 + N\tau)$.

Значит, последовательности $z(t), q(t)$ будут являться периодическими с периодом вида $N\tau$. Тогда будет периодическим и сверхслово $\beta = b(0)b(1)\ldots \in B^\infty$ с аналогичным периодом, что и завершает доказательство теоремы.

Лемма 3. *Пусть $P = \{A, Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0\}$ — автомат с магазинной памятью. Пусть фиксировано $\alpha = a(0)\ldots a(t)\ldots \in A^\infty$ —*

периодическое сверхслово, а последовательность $|\gamma_\alpha(t)|$ не ограничена. Тогда

$$\exists d, M \in \mathbb{N} : \exists \gamma_0,\ \gamma \in A^* :\ \forall m_0 > M\ \exists \gamma_{m_0}\ \gamma_\alpha(m_0 + dk) = \gamma_0 \underbrace{\gamma \ldots \gamma}_{k\ \textit{раз}} \gamma_{m_0}.$$

и последовательность $q_\alpha(t)$ — периодическая.

Доказательство. Так как входная последовательность $a(t)$ периодическая — периодическое, то из доказательства теоремы следует, что последовательности $q(t)$ и $z(t)$ — также периодические. Пусть теперь d — наименьший общий период последовательностей $a(t)$, $q(t)$, $z(t)$. Рассмотрим момент времени t_1 такой, что $|\gamma(t_1)| < |\gamma(t_1 + d)|$, причем $\forall t > t_1 |\gamma(t)| \geqslant |\gamma(t_1)|$. Существование такого момента времени следует из доказательства теоремы 2 и условия, что последовательность $|\gamma_\alpha(t)|$ не ограничена.

Пусть $\gamma(t_1) = \gamma_0 z(t_1)$. Тогда найдется слово γ такое, что будет выполнено

$$\gamma(t_1 + d) = \gamma_0 \gamma z(t_1 + d) = \gamma_0 \gamma z(t_1)$$

в силу условия $\forall t > t_1 |\gamma(t)| \geqslant |\gamma(t_1)|$ и периодичности последовательности $z(t)$. Докажем по индукции, что

$$\gamma_\alpha(t_1 + dk) = \gamma_0 \underbrace{\gamma \ldots \gamma}_{k\ \text{раз}} z(t_1).$$

База доказана. Докажем, шак индукции. Пусть выполнено, что

$$\gamma_\alpha(t_1 + d(k-1)) = \gamma_0 \underbrace{\gamma \ldots \gamma}_{k-1\ \text{раз}} z(t_1).$$

Обозначим $\gamma_0' = \gamma_0 \underbrace{\gamma \ldots \gamma}_{k-1\ \text{раз}}$. Тогда $\gamma(t_1 + d(k-1)) = \gamma_0' z(t_1)$. Значит, $\gamma(t_1 + dk) = \gamma_0' \gamma z(t_1)$. Подставляя в последнее γ_0', получаем требуемое. Шаг индукции доказан.

Теперь заметим, что из того, что

$$\gamma_\alpha(m_0 + dk) = \gamma_0 \underbrace{\gamma \ldots \gamma}_{k\ \text{раз}} \gamma_{m_0}$$

следует, что

$$\gamma_\alpha(m_0+1+dk)=\gamma_0\underbrace{\gamma\ldots\gamma}_{k\text{ раз}}S(\gamma(m_0))\eta(a(m_0),q(m_0),z(m_0)),$$

что и завершает доказательство.

Утверждение 5. *Пусть $f:\mathbb{Z}_+\to\mathbb{Z}_+$, а P — автомат с магазинной памятью, вычисляющий f. Тогда с некоторого момента будет выполнено*

$$f(x+d)=f(x)+p(x),$$

где $p:\mathbb{Z}_+\to\mathbb{Z}_+$ — некоторая периодическая функция с периодом d.

Доказательство. Пусть P — автомат с магазинной памятью, вычисляющий f и удовлетворяющий системе канонических уравнений (1). Рассмотрим еще два автомата с магазинной памятью P_1, удовлетворяющий системе канонических уравнений

$$\begin{cases} q(0)=q_0 \\ \gamma(0)=\gamma_0 \\ z(t)=LS(\gamma(t)) \\ q(t+1)=\varphi(a(t),q(t),z(t)) \\ \gamma(t+1)=S(\gamma(t))\eta(a(t),q(t),z(t)) \\ b(t)=\psi(a(t),q(t),z(t))\&a(t) \end{cases} \tag{3}$$

и P_0, удовлетворяющий

$$\begin{cases} q(0)=q_0 \\ \gamma(0)=\gamma_0 \\ z(t)=LS(\gamma(t)) \\ q(t+1)=\varphi(a(t),q(t),z(t)) \\ \gamma(t+1)=S(\gamma(t))\eta(a(t),q(t),z(t)) \\ b(t)=\psi(a(t),q(t),z(t))\&\bar{a}(t) \end{cases} \tag{4}$$

Для каждого из автоматов P_i $(i=0,1)$ есть 2 возможности. Либо он вычисляет некоторую вычислимую функцию f_i, либо он выдает сверхслово, состоящее из нулей. Перебирая все возможные варианты, нетрудно убедиться, что либо $f = f_i$, либо $f = f_0 + f_1 - 1$. В любом случае, для доказательства утверждения достаточно доказать, что с некоторого момента будет выполнено

$$f_i(x + d) = f_i(x) + p_i(x), \tag{5}$$

где $i \in \{0, 1\}$, а $p_i : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ — некоторая периодическая функция с периодом d.

Рассмотрим работу автомата P_1. Подадим на вход автомату сверхслово, состоящее из 1. Рассмотрим последовательность $\gamma(t)$, которая получается при этом из канонических уравнений (3).

Если последовательность $|\gamma(t)|$ ограничена, то из леммы 1 следует, что f_1 является вычислимой конечным автоматом.

Пусть последовательность $|\gamma(t)|$ не ограничена. Тогда по лемме 3 найдутся такие d, M, что для любой последовательности вида $m_k = m_0 + kd$, где $m_0 > M$ найдутся $\alpha_0, \alpha, \alpha_1$ такие, что

$$\gamma(m_k) = \alpha_0 \underbrace{\alpha \ldots \alpha}_{k \text{ раз}} \alpha_1$$

и что

$$\exists q \in Q : \; q(m_k) = q.$$

Из леммы следует, что

$$\exists C_0 \; \forall k \; f_0(m_{k+1}) = f_0(m_k) + C_0,$$

в силу периодичности последовательности состояний (аналогичное рассуждение было в утверждении 2). Значит, f_0 удовлетворяет (5).

Рассмотрим работу автомата P_0. Из предыдущего следует, что при подаче сверхслова $\underbrace{1 \ldots 1}_{m_k} 0 \ldots 0 \ldots$ на вход будет выполнено:

$$\gamma(m_k) = \alpha_0 \underbrace{\alpha \ldots \alpha}_{k \text{ раз}} \alpha_1$$

и

$$\exists q \in Q : \; q(m_k) = q.$$

Рассмотрим работу автомата при подаче на вход сверхслова $\underbrace{1\ldots1}_{m_{|Q|+1}}0\ldots0\ldots$. Рассмотрим 2 случая.

Пусть $\exists t_0 > m_{|Q|+1}$:

$$\gamma(t_0) = \alpha_0.$$

Тогда $\exists t_1 > t_2 > \ldots > t_{|Q|+1}\ \gamma(t_i) = \alpha_0\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{i\text{ раз}}$. Значит, среди моментов времени $t_1, t_2, \ldots, t_{|Q|+1}$ найдутся такие 2 $t_i > t_j$, что $q(t_i) = q(t_j)$, то есть происходит «зацикливание». Оказывается, что $f(m_{k+(j-i)}-1) - f(m_k-1) = t_i - t_j$, если $b(t_i) = 1$, иначе $f(m_{k+(j-i)}-1) - f(m_k-1) = 0$. В обоих случаях будет выполнено (5).

Перейдем к рассмотрению второго случая, то есть считаем, что

$$\forall t > m_{|Q|+1}\ \gamma(t_0) \neq \alpha_0.$$

Тогда, очевидно, что для любого $k > |Q|+1$ при подаче слова $\underbrace{1\ldots1}_{m_k}0\ldots0\ldots$ на вход автомат выдаст одинаковое количество единиц, то есть в данном случае f_1 является постоянной функцией и, следовательно, удовлетворяет (4), что и завершает доказательство.

Утверждение 6. *Пусть $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$. f удовлетворяет условию*

$$\forall x \geqslant X\ \ f(x+d) = f(x) + p(x), \tag{6}$$

где $p : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ — некоторая периодическая функция с периодом d тогда и только тогда, когда

$$\forall x \geqslant X\ \ f(x) = a(x)x + b(x), \tag{7}$$

где $a : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Q}$, $b : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Q}$ — некоторые периодические функции с периодом d.

Доказательство. Пусть выполнено (7). Тогда

$$f(x+d) = a(x+d)(x+d) + b(x+d) = a(x)x + b(x) + da(x).$$

Обозначая $p(x) = da(x)$, получаем (6).

Пусть выполнено (6). Из (6) следует $f(x+nd) = f(x) + np(x)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Определим $a(x) = \frac{p(x)}{d}$, а $b(x)$ из следующих соотношений:

$$f(x) = b(x) + xa(x), \quad X \leqslant x < X + d.$$

Пусть $x \geqslant X$. Единственно представление $x = y + nd$, где $X \leqslant y < X + d$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Имеем

$$f(x) = f(y+nd) = f(y) + np(y) = b(y) + ya(y) + nda(y) = \\ = a(y)(y+nd) + b(y) = a(x)x + b(x),$$

что и требовалось. Утверждение доказано.

Из утверждений 4, 5 и 6 следует

Теорема 3. *Пусть $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$. Существует автомат с магазинной памятью, вычисляющий f, тогда и только тогда, когда некоторого момента выполнено*

$$f(x) = a(x)x + b(x),$$

где $a : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Q}$, $b : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Q}$ — некоторые периодические функции.

Замечание. Класс вычислимых функций вида $f(x) = a(x)x + b(x)$, где $a : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Q}$, $b : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Q}$ — некоторые периодические функции, является замкнутым.

3. Класс вычислимых функций, вычисляемых автоматом с 2 магазинами

Инициальным детерминированным автоматом с магазиной памятью будем называть «девятку»

$$P = \{A, Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0\},$$

где A — входной алфавит, Q — конечное множество состояний, B — выходной алфавит, Γ — алфавит памяти (алфавит лент магазина), $\varphi : A \times Q \times (\Gamma \cup \lambda)^2 \to Q)$ — функция переходов, $\psi : A \times Q \times (\Gamma \cup \lambda)^2 \to B$ —

функция выхода, $\eta : A \times Q \times (\Gamma \cup \lambda)^{\rightarrow} (\Gamma^*)^2$ — функция памяти, $q_0 \in Q$ — начальное состояние, $\gamma_0 \in (\Gamma^*)^2$ — начальные записи в магазинах.

Функционирование P можно определить с помощью системы канонических уравнений, которые задают в каждый момент времени t состояние автомата $q(t)$, записанные в магазине слова $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$, и выход автомата $b(t)$ при подаче на вход $a(t)$:

$$\begin{cases} q(0) = q_0 \\ \{\gamma_1(0), \gamma_2(0)\} = \gamma_0 \\ z_1(t) = LS(\gamma_1(t)) \\ z_2(t) = LS(\gamma_2(t)) \\ q(t+1) = \varphi(a(t), q(t), z_1(t), z_2(t)) \\ \gamma_1(t+1) = S(\gamma_1(t))\eta_1(a(t), q(t), z_1(t), z_2(t)) \\ \gamma_2(t+1) = S(\gamma_2(t))\eta_2(a(t), q(t), z_1(t), z_2(t)) \\ b(t) = \psi(a(t), q(t), z_1(t), z_2(t)) \end{cases} \tag{8}$$

где $LS : \Gamma^* \rightarrow \Gamma \cup \{\lambda\}$ возвращает последний символ при подаче непусого слова и $LS(\lambda) = \lambda$, а $S : \Gamma^* \rightarrow \Gamma^*$ — стирает последний символ входного слова и $S(\lambda) = \lambda$.

Автомат с 2 магазинами опеделяет детерминированную функцию $f : A^* \rightarrow B^*$. Пусть фиксировано $\alpha = a(0) \dots a(t) \dots \in A^\infty$.

Пусть $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$. Будем говорить, что автомат с 2 магазиннами P вычисляет функцию f, если для любого натурального n при подаче слова вида $0^k 1^{n+1} 0^\infty$ автомат выдает последовательность вида $0^l 1^{f(n)+1} 0^\infty$, где $k,\ l \in \mathbb{Z}_+$.

Опишем класс функций, вычислимых автоматом с 2 магазинами.

Будем говорить, что автомат Тьюринга это шестерка $T = \{A, Q, \varphi_T, \psi_T, \sigma_T, q_0, q_F\}$, где A, Q — конечные множества, $\varphi_T : A \times Q \rightarrow Q$ — функция переходов, $\psi : A \times Q \rightarrow A$ — функция записи на ленту, $\sigma_T : A \times Q \rightarrow \{R, L, S\}$ — функция управляющего устройства, q_0 — начальное состояние автомата, q_F — финальное. Будем считать, что после работы автомата результат работы будет записан на ленте, а головка автомата находится на последнем значащем символе ленты.

Теорема 4. *Функция $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ вычислима автоматом с 2 магазинами тогда и только тогда, когда она является вычислимой (вычислима на машине Тьюринга).*

Доказательство. Очевидно, что если функция вычислима автоматом с 2 магазинами, то она является вычислимой.

Пусть $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ — вычислимая функция. Значит, существует автомат Тьюринга $T = \{A, Q, \varphi_T, \psi_T, \sigma_T, q_0, q_F\}$ ее вычисляющий. Построим автомат с двумя магазинами $P = \{A, Q', B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_1', \gamma_0\}$, который имитирует работу T.

Пусть $Q' = Q \cup \{q_1', q_2', q_3'\}$, а $Q = \{q_0, \ldots, q_{n-1}\}$. Начальное состояние q_1', магазины пусты. Определим работу автомата в состояниях q_1' и q_2':

$$\begin{aligned}
\varphi(0, q_1', z_1, z_2) &= q_1',\\
\varphi(1, q_1', z_1, z_2) &= q_2',\\
\varphi(0, q_2', z_1, z_2) &= q_0,\\
\varphi(1, q_2', z_1, z_2) &= q_2';
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_1(0, q_1', z_1, z_2) &= \Lambda,\\
\eta_1(1, q_1', z_1, z_2) &= \Lambda,\\
\eta_1(0, q_2', z_1, z_2) &= 1,\\
\eta_1(1, q_2', z_1, z_2) &= \Lambda;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_2(0, q_1', z_1, z_2) &= \Lambda,\\
\eta_2(1, q_1', z_1, z_2) &= 1,\\
\eta_2(0, q_2', z_1, z_2) &= \Lambda,\\
\eta_2(1, q_2', z_1, z_2) &= 11.
\end{aligned}$$

Поясним работу данного автомата. Сначала считаем входные данные во второй магазин. Это можно сделать, используя 2 состояния q_1', q_2'. После того, как входная последовательность единиц полностью записана во второй магазин, автомат переходит в состояние q_0. Дальше происходит имитация работы машины Тьюринга:

$$\varphi(a,q,z_1,z_2) = \begin{cases} \varphi_T(z_1,q), \text{ если } q \in Q, \\ q_3', \text{ если } q' = q_F; \end{cases}$$

$$\eta_1(a,q',z_1,z_2) = \begin{cases} z_1 z_2, \text{ если } \sigma_T(z_1,q') = L, \\ z_1, \text{ если } \sigma_T(z_1,q') = S, \\ \Lambda, \text{ если } \sigma_T(z_1,q') = R; \end{cases}$$

$$\eta_2(a,q,z_1,z_2) = \begin{cases} \Lambda, \text{ если } \sigma_T(z_1,q) = L, \\ z_2, \text{ если } \sigma_T(z_1,q) = S, \\ z_2 z_1 \text{ если } \sigma_T(z_1,q) = R; \end{cases}$$

$$\varphi(a,q_3',z_1,z_2) = q_3';$$

$$\psi(a,q',z_1,z_2) = \begin{cases} 0, \text{ если } q' \in Q' \backslash \{q_3', q_F\} \text{ или } q' = q_3', \ z_1 = z_2 = \Lambda, \\ 1, \text{ иначе}; \end{cases}$$

$$\eta_1(a,q_3',z_1,z_2) = \Lambda;$$
$$\eta_2(a,q_3',z_1,z_2) = \Lambda.$$

Каждое состояние автомата с 2 магазинами соответствует состоянию машины Тьюринга. И в каждый момент имитации по магазинам можно однозначно востановить ленту машины Тьюринга (надо «склеить» оба магазина). После завершения вычислений машина Тьюринга переходит в состояние q_F останавливается. Автомат же продолжает работу, далее переходя в состояние q_3', которое отвечает за вывод полученного результата, находящийся в первом магазине, на выходную ленту. Таким образом, любая вычислимая функция является и вычислимой автоматом с 2 магазинами. Теорема доказана.

Список литературы

[1] Ахо А., Ульман Дж. Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции. Т. 1. М.: Мир, 1978.

[2] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

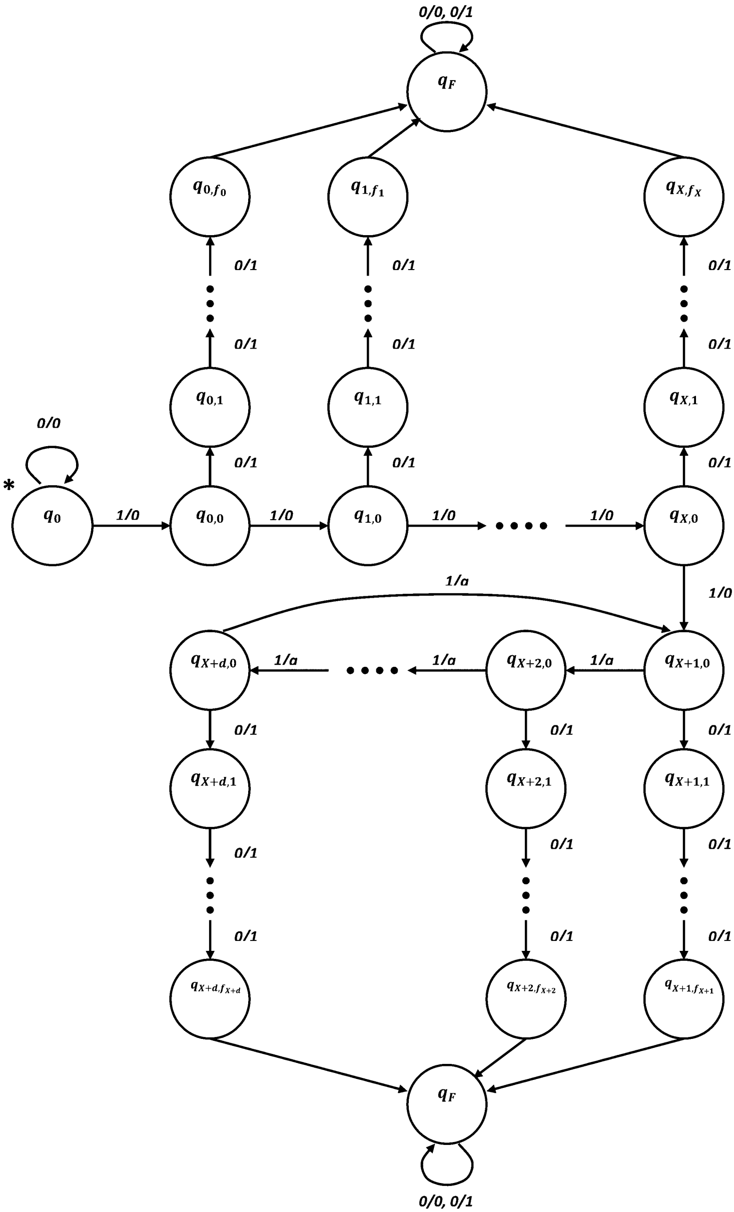
0/0, 0/1
q_F
q_{0,f_0}
q_{1,f_1}
q_{X,f_X}
0/1
$q_{0,1}$
$q_{1,1}$
$q_{X,1}$
0/0
q_0
1/0
$q_{0,0}$
$q_{1,0}$
$q_{X,0}$
1/a
$q_{X+d,0}$
$q_{X+2,0}$
$q_{X+1,0}$
$q_{X+d,1}$
$q_{X+2,1}$
$q_{X+1,1}$
$q_{X+d,f_{X+d}}$
$q_{X+2,f_{X+2}}$
$q_{X+1,f_{X+1}}$
q_F
0/0, 0/1

Рис. 1.

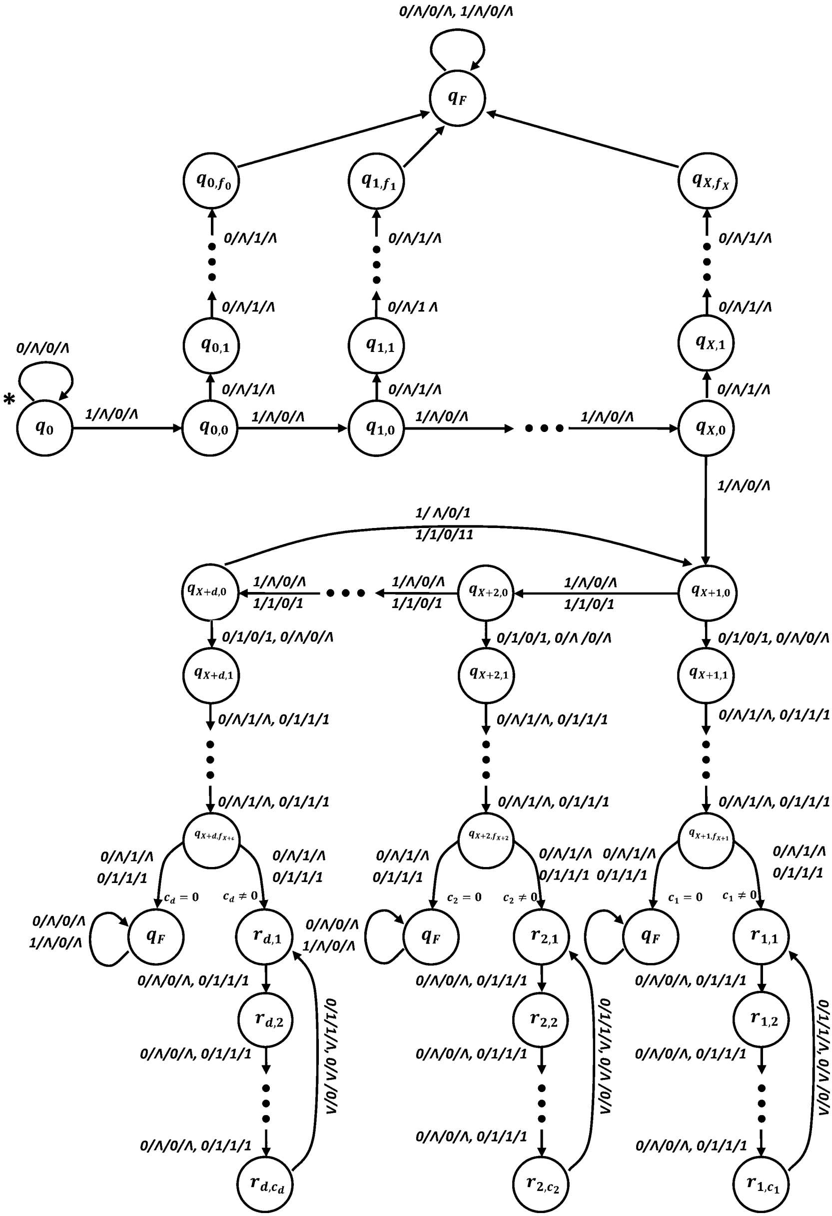
0/Λ/0/Λ, 1/Λ/0/Λ
q_F
q_{0,f_0}
q_{1,f_1}
q_{X,f_X}
0/Λ/1/Λ
0/Λ/1 Λ
$q_{0,1}$
$q_{1,1}$
$q_{X,1}$
0/Λ/0/Λ
*
q_0
1/Λ/0/Λ
$q_{0,0}$
$q_{1,0}$
$q_{X,0}$
1/ Λ/0/1
1/1/0/11
$q_{X+d,0}$
$q_{X+2,0}$
$q_{X+1,0}$
1/1/0/1
0/1/0/1, 0/Λ/0/Λ
0/1/0/1, 0/Λ /0/Λ
$q_{X+d,1}$
$q_{X+2,1}$
$q_{X+1,1}$
0/Λ/1/Λ, 0/1/1/1
$q_{X+d,f_{X+d}}$
$q_{X+2,f_{X+2}}$
$q_{X+1,f_{X+1}}$
0/1/1/1
$c_d = 0$
$c_d \neq 0$
$c_2 = 0$
$c_2 \neq 0$
$c_1 = 0$
$c_1 \neq 0$
$r_{d,1}$
$r_{2,1}$
$r_{1,1}$
0/Λ/0/Λ, 0/1/1/1
$r_{d,2}$
$r_{2,2}$
$r_{1,2}$
r_{d,c_d}
r_{2,c_2}
r_{1,c_1}
0/1/1/Λ, 0/Λ/0/Λ

Рис. 2.