Об одном многообразии пороговых функций

А. П. Соколов

В работе исследуется сложность задания пороговых функций алгебры логики линейными формами с целочисленными коэффициентами и свободным членом. Построено множество операций над линейными формами, которые одновременно сохраняют свойство минимальности размаха и веса. Путем поочередного применения данных операций к элементарным линейным формам можно построить бесконечное семейство линейных форм минимального размаха и веса. Одним из подмножеств данного семейства является последовательность линейных форм, весовые коэффициенты которых представляют собой числа Фибоначчи.

Ключевые слова: пороговые функции, сложность обучения нейросетей.

Введение

Пороговые функции алгебры логики являются математической моделью нейронов. Они представляют интерес благодаря своим универсальным вычислительным возможностям, а также благодаря возможности их обучения. Последнее свойство с успехом применяется на практике при решении плохо формализуемых задач.

В качестве средства задания пороговых функций в работе рассматриваются линейные формы вида $x_1w_1 + \ldots + x_nw_n - \sigma$. При задании пороговых функций могут рассматриваться линейные формы с целочисленными коэффициентами и свободным членом. В этой связи можно ввести понятие размаха линейной формы $\max(|w_1|, \ldots, |w_n|, |\sigma|)$.

Также можно ввести понятие веса линейной формы $\sum\limits_{i=1}^{n} |w_{\mathrm{i}}| + |\sigma|$.

Среди всех линейных форм, задающих пороговую функцию f очевидно существует линейная форма минимального размаха. Аналогичным образом вводится понятие линейной формы минимального веса.

В работе [1] показано, что существует пороговая функция от n переменных, при задании которой целочисленными линейными формами необходимо использование весовых коэффициентов величины не менее, чем $2^{\frac{1}{4}n\log n}$. Данный результат очень важен для получения асиптотических оценок на величину весовых коэффициентов при $n \to \infty$. Однако в работе [1] не приводится явного построения линейной формы минимального размаха или веса для данной пороговой функции.

В данной работе построено множество операций над линейными формами, которые одновременно сохраняют свойство минимальности размаха и веса. Путем поочередного применения данных операций к элементарным линейным формам можно построить бесконечное семейство линейных форм минимального размаха и веса. Одним из подмножеств данного семейства является последовательность линейных форм, весовые коэффициенты которых представляют собой числа Фибоначчи, что составляет известный пример, полученный в работе Парберри [2]. Более того, для данных линейных форм доказана минимальность одновременно и веса, и размаха, что не следует из результата Парберри.

1. Основные понятия, постановки и результаты

Пусть $U = \{u_1, u_2, \ldots\}$ — счетный алфавит переменных. Каждое из переменных u_i может принимать значения из множества $E_2 = \{0, 1\}$. В дальнейшем во избежание употребления сложных индексов мы будем использовать для обозначения букв алфавита U метасимволы x_i с индексами или без них.

Введем определения линейной формы и пороговой функции. *Линейной формой* назовем функцию вида

$$l_{\vec{w},\sigma}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i - \sigma,$$

где w_i и σ суть целые числа при $i = 1, \ldots, n$. Вектор $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ называют вектором весовых коэффициентов, а σ — порогом. Для простоты иногда будем обозначать линейную форму $l_{\vec{w},\sigma}(x_1, \ldots, x_n)$ соответствующим набором весовых коэффициентов и порога — $(w_1, \ldots, w_n, \sigma)$.

Функция $f(x_1, \ldots, x_n) : E_2^n \to E_2$, называется *пороговой*, если существует линейная форма $l_{\vec{w},\sigma}(x_1, \ldots, x_n) = x_1 w_1 + \ldots + x_n w_n - \sigma$ такая, что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, \text{ если } \sum\limits_{i=1}^{n} x_i w_i - \sigma \geqslant 0; \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

В этом случае говорим, что *линейная форма $l_{\vec{w},\sigma}$ задает пороговую функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$*, и записывается это так:

$$l_{\vec{w},\sigma} \to f(x_1, \ldots, x_n),$$

или просто $f_{\vec{w},\sigma}$.

Будем говорить, что *линейная форма $l_{\vec{w},\sigma}$ строго задает пороговую функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$*, если $l_{\vec{w},\sigma}$ задает f и $l_{\vec{w},\sigma}(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$ ни на одном из наборов $(a_1, \ldots, a_n) \in E_2^n$. Это обозначается так:

$$l_{\vec{w},\sigma} \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_n).$$

Множество всех пороговых функций от n переменных $x_1, \ldots, x_n$ обозначим T^n.

Имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1. *Если $f \in T^n$, то найдется такая линейная форма $l_{\vec{w},\sigma}$ с целочисленными коэффициентами и порогом, что $l_{\vec{w},\sigma} \Rightarrow f$.*

В связи с тем, что линейные формы с целочисленными коэффициентами и порогом позволяют задать любую пороговую функцию строгим образом, далее в работе рассматриваются только такие линейные формы.

Рассмотрим следующие меры сложности линейных форм

$$L\left(l_{\vec{w},\sigma}\right) = \max\left(|w_1|, \ldots, |w_n|\right),$$

$$\mu\left(l_{\vec{w},\sigma}\right) = \sum_{i=1}^{n} |w_i|.$$

Рассмотрим соответствующие им меры сложности задания пороговой функции f линейными формами с целочисленными коэффициентами

$$L(f) = \min_{l_{\vec{w},\sigma} \Rightarrow f} L\left(l_{\vec{w},\sigma}\right),$$
$$\mu(f) = \min_{l_{\vec{w},\sigma} \Rightarrow f} \mu\left(l_{\vec{w},\sigma}\right).$$

Здесь минимум берется по всем целочисленным линейным формам, задающим функцию f строгим образом.

Величину $L(f)$ назовем размахом функции f, а $\mu(f)$ — весом.

Линейную форму $l_{\vec{w},\sigma}$ назовем линейной формой минимального размаха (веса) для пороговой функции f, если $l_{\vec{w},\sigma}$ имеет минимальный размах (вес) среди всех линейных форм, строго задащих f.

Если $f(x_1, \dots, x_n)$ — функция алгебры логики, то функция $f^*(x_1, \dots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ называется *двойственной* к f.

Имеют место следующие утверждения, которые позволяют порождать линейные формы минимального размаха (веса).

Теорема 1. *Если $l_{\vec{w},\sigma}$ — форма минимального размаха (веса), то $l_{\vec{w}, \sum\limits_{i=1}^{n} w_i - \sigma}$ также является формой минимального размаха (веса) для соответствующей пороговой функции.*

Теорема 2. *Если $(w_1, \dots, w_n, \sigma)$ — форма минимального размаха (веса) для $f \in T^n$, $f(\alpha) = 0$, где $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in E_2^n$, и $\sigma = \sum\limits_{i:a_i=1} w_i + 1$, то линейная форма $(w_1, \dots, w_n, w_{n+1}, \sigma)$, где $w_{n+1} = \sum\limits_{i:a_i=1} w_i + 2$, является формой минимального размаха (веса) для соответствующей пороговой функции, где сумма берется по всем i, для которых $a_i = 1$.*

Путем поочередного применения данных операций к элементарным линейным формам можно построить бесконечное семейство линейных форм минимального размаха и веса. Одним из подмножеств данного семейства является последовательность линейных форм, весовые коэффициенты которых представляют собой числа Фибоначчи, что составляет известный пример, полученный в работе Парберри [2].

Следствие 1. *Если $n \geqslant 1$, то линейная форма*

$$(2 \cdot F_1, 2 \cdot F_2, \ldots, 2 \cdot F_n, 2 \cdot F_{n+1} - 1),$$

где F_i — i-е число Фибоначчи, является линейной формой минимального размаха и веса для соответствующей пороговой функции от n переменных.

Следствие 2. *Существует последовательность пороговых функций $f_1, \ldots, f_n, \ldots$, таких что f_i зависит от i переменных и при $n \to \infty$ выполнено*

$$L(f_n) \sim \frac{2 \cdot \phi^n}{\sqrt{5}},$$

$$\mu(f_n) \sim \frac{2 \cdot \phi^{n+2}}{\sqrt{5}} - 2,$$

где $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. Доказательство утверждений

В работе [4] был доказан следующий результат.

Теорема 3. *Если $f \in T^n$, то найдется линейная форма $l_{\vec{w},\sigma}$ с целочисленными коэффициентами и порогом, что $l_{\vec{w},\sigma} \to f$.*

Утверждение 1 по сути является следствием теоремы 3.

Доказательство утверждения 1. Пусть линейная форма $l_{\vec{w},\sigma}(x_1, \ldots, x_n)$ с целочисленными коэффициентами и порогом задает пороговую функцию f. В таком случае для всех наборов $(a_1, \ldots, a_n) \in E_2^n$ выполнено

$$\begin{cases} l_{\vec{w},\sigma}(a_1, \ldots, a_n) \geqslant 0, \text{ если } f(a_1, \ldots, a_n) = 1; \\ l_{\vec{w},\sigma}(a_1, \ldots, a_n) \leqslant -1, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Рассмотрим целочисленную линейную форму $l_{2\cdot\vec{w},2\cdot\sigma+1}(x_1,\ldots,x_n)$. Очевидно, что данная линейная форма также задает f и для всех наборов $(a_1, \ldots, a_n) \in E_2^n$ выполнено

$$\begin{cases} l_{\vec{w},\sigma}(a_1, \ldots, a_n) \geqslant 1, \text{ если } f(a_1, \ldots, a_n) = 1; \\ l_{\vec{w},\sigma}(a_1, \ldots, a_n) \leqslant -1, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Следовательно, $l_{2\cdot\vec{w},2\cdot\sigma+1}$ задает функцию f строгим образом. Утверждение доказано.

Введенные ранее пороговые функции будем также называть $(0,1)$-пороговыми функциями.

Введем понятие $(-1,1)$-пороговой функции.

Пусть $V=\{v_1,v_2,\ldots\}$ — счетный алфавит переменных, каждое из которых может принимать значения из множества $\bar{E}_2=\{-1,1\}$. Для обозначения букв алфавита V будем использовать метасимволы y_i с индексами или без них.

Функция $g\left(y_1,\ldots,y_n\right)\,:\,\bar{E}_2^n\rightarrow\bar{E}_2$ называется $(-1,1)$-*пороговой*, если существует линейная форма $l_{\vec{w},\sigma}\left(y_1,\ldots,y_n\right)=y_1w_1+\ldots+y_nw_n-\sigma$ такая, что

$$g(y_1,\ldots,y_n)=\begin{cases}-1, \text{ если } \sum\limits_{i=1}^{n}y_iw_i-\sigma\geqslant 0;\\ 1, \text{ иначе.}\end{cases}$$

Множество $(-1,1)$-пороговых функций обозначим $\bar{T}^n$.

Для того, чтобы отличать $(0,1)$-пороговые и $(-1,1)$-пороговые функции, введем следующие обозначения: $f^{0,1}$ и $g^{-1,1}$. Иногда для $(0,1)$-пороговых функций верхний индекс будем опускать.

Сопоставим переменным алфавита U переменные алфавита V по следующему правилу: $\varphi\left(u_i\right)=v_i$, для всех i. Положим также

$$\begin{array}{l}\varphi\left(0\right)=-1;\\ \varphi\left(1\right)=1.\end{array}$$

Определим изоморфизм множеств T^n и $\bar{T}^n$ следующим образом: каждой $(0,1)$-пороговой функции $f^{0,1}\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ поставим в соответствие $(-1,1)$-пороговую функцию $g^{-1,1}\left(y_1,\ldots,y_n\right)$ следующим образом

$$\varphi\left(f\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right)=g\left(\varphi\left(x_1\right),\ldots,\varphi\left(x_n\right)\right).$$

Очевидно, что определенное соответствие является взаимно-однозначным. Далее, для краткости, соответствующие друг другу в терминах описанного изоморфизма функции f и g будем называть *изоморфными* и обозначать их $f^{0,1}$ и $f^{-1,1}$.

В работе [5] было доказано следующее утверждение, позволяющее строить линейные формы, задающие изоморфные пороговые функции.

Лемма 1. *Имеют место следующие утверждения:*

1) *если* $l_{\vec{w},\sigma} \to f^{0,1}$ *и* $l_{\vec{w},2\sigma-\sum\limits_{i=1}^{n} w_i} \to g^{-1,1}$, *то* $f^{0,1} \sim g^{-1,1}$*;*

2) *если* $l_{\vec{w},\sigma} \to g^{-1,1}$ *и* $l_{\vec{w},\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} w_i+\sigma\right)} \to f^{0,1}$, *то* $g^{-1,1} \sim f^{0,1}$.

В случае строгого задания $(-1,1)$-пороговой функции для перехода к двойственной ей $(-1,1)$-пороговой функции достаточно изменить знак порога.

Лемма 2. *Если* $l_{\vec{w},\sigma} \Rightarrow f^{-1,1}$, *то* $l_{\vec{w},-\sigma} \Rightarrow f^{*-1,1}$.

Доказательство. Рассмотрим значения данных линейных форм на противоположных наборах. Пусть $l_{\vec{w},\sigma}(a_1,\ldots,a_n) > 0$ на наборе $(a_1,\ldots,a_n) \in \{-1,1\}^n$, тогда

$$l_{\vec{w},-\sigma}(-a_1,\ldots,-a_n) = -l_{\vec{w},\sigma}(a_1,\ldots,a_n).$$

Лемма доказана.

Следствие 3. $L(f) = L(f^*)$ *и* $\mu(f) = \mu(f^*)$.

Из лемм 1 и 2 вытекает утверждение теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. По лемме 1 имеем

$$l_{\vec{w},2\sigma-\sum\limits_{i=1}^{n} w_i} \Rightarrow f^{-1,1}.$$

Далее, применяя лемму 2, получим

$$l_{\vec{w},\sum\limits_{i=1}^{n} w_i-2\sigma} \Rightarrow f^{*-1,1}.$$

Наконец, снова применяя лемму 1, получаем

$$l_{\vec{w},\frac{1}{2}\left(2\sum\limits_{i=1}^{n} w_i-2\sigma\right)} = l_{\vec{w},\sum\limits_{i=1}^{n} w_i-\sigma} \Rightarrow f^{*0,1}.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Так как $f(\alpha) = 0$, то

$$\sum_{i\colon a_i=1} w_i < \sigma.$$

Рассмотрим линейную форму $(w_1, \ldots, w_n, w_{n+1}, \sigma)$ и задаваемую ей пороговую функцию $f' \in T^{n+1}$. Очевидно, что $f'(x_1, \ldots, x_n, 0) = f(x_1, \ldots, x_n)$ при любых значениях весового коэффициента w_{n+1}. Доопределим f' следующим образом $f'(0, \ldots, 0, 1) = 1$.

Очевидно, что пороговая функция f', обладающая таким свойством существует. В таком случае $w_{n+1} > \sigma$, а, следовательно, $w_{n+1} > \sigma > \sum\limits_{i\colon a_i=1} w_i$ или же

$$w_{n+1} \geqslant \sum_{i\colon a_i=1} w_i + 2.$$

Теорема доказана.

Доказательство следствия 1. Для доказательства следствия построим последовательность пороговых функций $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ и соответствующие им линейные формы минимального размаха и веса.

Положим $f_1(x_1) = x$. Легко видеть, что набор $(2, 1)$ задает линейную форму минимального размаха и веса для f_1. Отметим также, что $f_1(0) = 0$.

Далее, если задана пороговая функция f_i, $i \geqslant 1$, задаваемая линейной формой минимального размаха (веса) — $(w_1, \ldots, w_i, \sigma)$, и

$$f_i\left(\underbrace{1, \ldots, 1}_{i-1}, 0\right) = 0,$$

тогда по теореме 2 линейная форма $(w_1, \ldots, w_i, w_{i+1}, \sigma)$, где $w_{i+1} = \sum\limits_{j=1}^{i-1} w_i + 2$, является линейной формой минимального размаха (веса) для некоторой пороговой функции g_{i+1} от $i+1$ переменных. При этом, будет выполнено

$$g_{i+1}\left(\underbrace{0, \ldots, 0}_{i}, 1\right) = 1.$$

Рассмотрим функцию f_{i+1} двойственную к g_{i+1}, то есть $f_{i+1} = g^*_{i+1}$. По теореме 1 линейная форма

$$\left(w_1, \ldots, w_i, w_{i+1}, \sum_{j=1}^{i+1} w_j - \sigma\right)$$

является формой минимального размаха (веса) для f_{i+1}. Отметим также, что по определению двойственности выполнено

$$f_{i+1}\left(\underbrace{1, \ldots, 1}_{i}, 0\right) = 0.$$

При этом, по теореме 1 имеем

$$L\left(f_{i+1}\right) = L\left(g\right) = L\left(f_i\right) + \sum_{j=1}^{i-1} w_j + 2.$$

Условия теоремы 2 опять выполнены. Таким образом осуществляется построение последовательности пороговых функций $f_1, \ldots, f_n, \ldots$.

Для оценки веса и размаха функции f_n отметим, что для соответствующей линейной формы минимального размаха $(w_1, \ldots, w_n, \sigma)$ выполнено

$$w_n = \sum_{j=1}^{n-2} w_j + 2,$$

при этом, $w_1 = 2$.

Легко видеть, что $w_n = 2 \cdot F_n$, где F_n — n-е число Фибоначчи.

Следовательно, линейная форма $l_{\bar{w},\sigma}$, задающая функцию f_n строгим образом, имеет вид $(w_1, \ldots, w_n, \sigma)$, где $w_i = 2 \cdot F_n$, для всех $i = 1, \ldots, n$, и $\sigma = 2F_{n+1} - 1$.

Размах и вес линейной формы $l_{\bar{w},\sigma}$ выражаются следующим образом

$$L\left(f_n\right) = 2 \cdot F_n,$$

$$\mu\left(f_n\right) = 2 \sum_{i=1}^{n} F_n = 2 \cdot F_{n+2} - 2.$$

Следствие доказано.

Доказательство следствия 2. Известно [3], что при $n \to \infty$ имеет место асимптотика $F_n \sim \frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$, где $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Следствие доказано.

Благодарности

Автор благодарит профессора Валерия Борисовича Кудрявцева за постановку задачи, доцента Анатолия Александровича Часовских за ряд важных замечаний, а также участников семинара «Кибернетика и информатика» за ценные обсуждения, возникавшие по ходу работы.

Список литературы

[1] Hastad J. On the size of weights for threshold gates // SIAM J. Discr. Math. 1994.

[2] Parberry I. Circuit Complexity and Neural Networks. Cambridge, MA: MIT Press, 1994.

[3] Грэхем Р., Кнут Д., Поташник О. Конкретная математика. М.: Мир, 1998.

[4] Соколов А. П. О конструктивной характеризации пороговых функций // Интеллектуальные системы. 2008. Т. 12, вып. 1–4. С. 363–388.

[5] Соколов А. П. Об одном семействе нейронов с ограниченной сложностью взаимной перестройки // Интеллектуальные системы. 2009. Т. 13, вып. 1–4. С. 477–490.