

# О кодировании дискретных фигур отрезками

А. А. Муравьева

В работе изучается кодировка фигур, состоящих из конечного числа точек, упорядоченным по величине набором всех попарных расстояний между их точками (спектром). Приводится условный алгоритм построения всех фигур с заданным спектром в пространстве любой размерности. Изучаются свойства спектров и способы продолжения подспектра, являющегося конечной последовательностью чисел, до спектра путем добавления новых элементов.

**Ключевые слова:** распознавание образов, дискретная геометрия.

Реальные геометрические образы аппроксимируются конечным множеством точек, и «похожесть» этих образов можно изучать на основе таких аппроксимаций. В качестве характеристики таких дискретных аппроксимаций возьмем множество попарных расстояний между точками. Отличие такой характеристики фигур от подробной, но более емкой характеристики с помощью симплексов состоит в том, что здесь в качестве кодов фигур выступают их одномерные характеристики. В случае характеристики симплексами и производными от них, возникает кодировка, восстанавливающая фигуры с точностью до аффинной эквивалентности [1].

Назовем множество  $A$  из  $n$  точек в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^m$ , где  $m$  — фиксированная размерность пространства,  $n$ -образом и через  $|A|$  обозначим мощность  $A$ . Выпишем все попарные расстояния между точками  $A$  в порядке убывания. Получим упорядоченный набор  $S(A) = (d_1, \dots, d_{C_n^2})$ ,  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_{C_n^2}$ , который назовем спектром  $A$ . Графиком назовем произвольную невозрастающую конечную

последовательность  $\Gamma$  положительных действительных чисел. Говорим, что  $A$  — модель для  $\Gamma$ , если спектр  $A$  совпадает с  $\Gamma$ , то есть  $S(A) = \Gamma$ . Модели будем рассматривать с точностью до изометрических преобразований.

**Теорема 1.** *Число неизометричных моделей для графика  $\Gamma$  из  $C_m^2$  элементов не превосходит  $(C_m^2 - 1)!$ , и существует условный алгоритм построения по графику всех его моделей в пространстве заданной размерности.*

**Доказательство.** Пусть  $\Gamma = (d_1, \dots, d_l)$ , где  $l = C_m^2$ . Будем строить модель в пространстве  $\mathbb{R}^n$ .

Сопоставим каждому элементу графика  $\Gamma$  пару точек, расстояниями между которыми он является. Для этого введем биективную функцию  $NUM$  и однозначно определяемую по ней функцию  $\varphi$ , полагая

$$NUM : \{(1, 2), \dots, (m-1, m)\} \rightarrow \{1, \dots, l\} \text{ и}$$

$$\varphi : \{(1, 2), \dots, (m-1, m)\} \rightarrow \{d_1, \dots, d_l\} : \varphi(i, j) = d_{NUM(i, j)}.$$

Число различных функций  $NUM$  равно  $(C_m^2)!$ , но нам достаточно рассмотреть лишь такие, для которых  $NUM(1, 2) = 1$ , то есть будем использовать  $(C_m^2 - 1)!$  функций.

Необходимым условием для существования модели при фиксированном сопоставлении  $NUM$  пары точек элементам графика является выполнение для каждого трех различных натуральных чисел  $i, j, k$ , не превосходящих  $m$ , следующих неравенств:

$$\varphi(i, j) \leq \varphi(i, k) + \varphi(j, k),$$

где функция  $\varphi$  определена выше.

Для каждой функции  $NUM$ , для которой это условие выполняется, проводим построение модели.

Пусть  $Base[i] = [Base[0], Base[1], \dots, Base[n-1]]$  — массив натуральных чисел длины  $n$ , заполненный нулями;  $rang$  — некоторая величина, принимающая целые значения, изначально равная нулю.

Зафиксируем в пространстве некоторый ортогональный базис. Координаты точки с номером 1 полагаем равными  $(0, \dots, 0)$ .

Шаг  $s$  ( $1 \leq s \leq m - 1$ ). Координаты точки с номером  $s + 1$ , то есть  $(x_{s,1}, x_{s,2}, \dots, x_{s,rang+1}, 0, \dots, 0)$ , находим по формулам:

$$x_{s,i} = \frac{1}{2} \left( x_{Base[i],i} + \frac{\varphi^2(Base[i-1]+1, s+1) - \varphi^2(Base[i]+1, s+1)}{x_{Base[i],i}} - \frac{\sum_{j=1}^{i-1} ((x_{s,j} - x_{Base[i-1],j})^2 - (x_{s,j} - x_{Base[i],j})^2)}{x_{Base[i],i}} \right), \quad i = 1, \dots, rang;$$

$$x_{s,rang+1} = \sqrt{\varphi^2(1, s+1) - \sum_{j=1}^{rang} x_{s,j}^2},$$

если подкоренное выражение неотрицательно, иначе говорим, что модели с данным соответствием  $NUM$  пар точек и расстояний нет, и берем другую функцию  $NUM$ .

Если  $x_{s,rang+1} \neq 0$  и  $rang < n - 1$ , то  $rang := rang + 1$ ,  $Base[rang] := s$ .

Шаг  $s.1$ . Для каждого натурального числа  $j$ , не превосходящего  $s$ , такого, что  $j \neq Base[i]$  для всех  $i = 1, \dots, rang$ , вычисляем

$$\rho(j, s + 1) = \sum_{r=1}^{rang} (x_{s,r} - x_{j-1,r})^2.$$

Если  $\rho(j, s + 1) \neq \varphi^2(j, s + 1)$ , то:

1) если  $x_{s,rang} > 0$ , то меняем его знак на противоположный и возвращаемся к Шагу  $s.1$ .

2) иначе прекращаем построение для данной функции  $NUM$  и говорим, что нет модели с таким соответствием пар точек и расстояний.

Если  $s + 1 \neq m$ , то переходим к Шагу  $s + 1$ .

Если  $s + 1 = m$ , то мы построили модель для данной функции  $NUM$ .

Переходим к построению модели для следующей функции  $NUM$ . Этот алгоритм называем  $C$ -алгоритмом.

Покажем, что в результате работы  $C$ -алгоритма мы действительно построим все модели для  $\Gamma$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , с точностью до изометрических преобразований в данном пространстве. Действительно,

для каждого фиксированного соответствия элементов графика номерам точек, расстояниями между которыми эти элементы являются, существует не более одной модели, с точностью до изометрических преобразований в пространстве. Это следует из работы [1]. Легко видеть, что в результате работы алгоритма такая модель, если она существует, будет построена, иначе будет дан ответ, что ее нет, причем для этого понадобится не более  $t$  шагов работы алгоритма. Так как алгоритм запускается для всевозможных сопоставлений точек элементам графика, а их, как было показано выше, не более  $(C_m^2 - 1)!$ , то очевидно, что все модели заданной размерности для графика  $\Gamma$  будут построены в результате работы  $C$ -алгоритма за конечное число шагов. Теорема доказана.

**Замечание 1.** В результате работы  $C$ -алгоритма получаются модели, некоторые из которых могут быть изометричными.

**Замечание 2.** Существует условный алгоритм проверки изометричности двух фигур, состоящих из конечного числа точек.

**Доказательство.** Пусть  $A$  и  $B$  — фигуры мощности  $t$  в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Занумеруем точки в каждой из фигур номерами от 1 до  $t$ . Фигуры  $A$  и  $B$  изометричны тогда и только тогда, когда существует перестановка  $\varphi \in S_m$ , такая, что  $\rho_1(i, j) = \rho_2(\varphi(i), \varphi(j))$  для всех  $1 \leq i < j \leq t$ , где  $\rho_1(i, j)$  — расстояние между точками с номерами  $i$  и  $j$  в фигуре  $A$ , а  $\rho_2$  — аналогичное расстояние в фигуре  $B$ . Таким образом, условный алгоритм проверки изометричности фигур  $A$  и  $B$  выглядит так.

Фиксируем перестановку  $\varphi : \{1, \dots, t\} \mapsto \{1, \dots, t\}$  и для каждого  $i = 1, \dots, t - 1$  вычисляем  $\rho_1(i, j)$  и  $\rho_2(\varphi(i), \varphi(j))$ , где  $j = i + 1, \dots, t$ . Если для какого-то  $j$  выполнено  $\rho_1(i, j) \neq \rho_2(\varphi(i), \varphi(j))$ , то:

1) если были рассмотрены все перестановки  $\varphi \in S_n$ , говорим, что фигуры  $A$  и  $B$  не изометричны.

2) иначе переходим к следующей перестановке  $\varphi \in S_n$ .

Если для всех  $1 \leq i < j \leq t$  выполнено  $\rho_1(i, j) = \rho_2(\varphi(i), \varphi(j))$ , то говорим, что  $A$  и  $B$  изометричны. Доказательство окончено.

Рассмотрим два способа продолжения графика до спектра путем добавления в него новых элементов. При первом способе элементы приписываются к началу графика, а при втором разрешено добавлять элементы «внутри» графика. Введем величину  $J_\Gamma$ , равную минимальному числу элементов, которые необходимо приписать к  $\Gamma$  для продолжения его до спектра. Аналогично введем величину  $N_\Gamma$ , равную минимальному числу элементов, которые необходимо добавить в  $\Gamma$  для продолжения его до спектра. Положим

$$J(m) = \max_{|\Gamma|=m} J_\Gamma, \quad N(m) = \max_{|\Gamma|=m} N_\Gamma.$$

Найдем точные значения этих величин.

**Теорема 2.** *Имеет место  $J(m) = C_{2(m-1)}^2 - m$ .*

**Доказательство.** Рассмотрим график  $\Gamma = (d_1, \dots, d_m)$ , в котором

$$d_k > \sum_{i=k+1}^m d_i, \quad k = 1, \dots, m - 2,$$

тогда фигура, спектром которой является продолженный график, состоит как минимум из  $2(m - 1)$  точек, так как никакие из отрезков длин  $d_2, \dots, d_m$ , соответствующих попарным расстояниям между точками фигуры, не могут иметь общих концов.

Покажем, что любой график  $\Gamma = (d_1, \dots, d_m)$  всегда можно продолжить до спектра фигуры  $A$  из  $2(m - 1)$  точек.

Фиксируем в пространстве  $\mathbb{R}^n$  декартову систему координат и полагаем

$$A = \left\{ (x_{i,1}, \dots, x_{i,n}) \mid x_{i,1} = [(i - 1)/2] \cdot d_1 + \sum_{k=2}^{[i/2]+1} d_k, \right. \\ \left. x_{i,j} = 0, j = 2, \dots, n, i = 1, \dots, 2(m - 1) \right\}$$

Очевидно, что спектр  $A$  является продолжением  $\Gamma$ . Теорема доказана.

**Теорема 3.** *Имеет место  $N(m) = C_{m+1}^2 - m$ .*

**Доказательство.** Рассмотрим график  $\Gamma = (d_1, \dots, d_m)$ , в котором

$$d_k > \sum_{i=k+1}^m d_i, \quad k = 1, \dots, m-2. \quad (*)$$

Покажем, что фигура  $A$ , спектром которой является продолженный график, состоит не менее, чем из  $m+1$  точки. Рассмотрим граф, ребрами которого являются попарные расстояния между точками  $A$ , соответствующие элементам графика  $\Gamma$ , а вершинами — само множество  $A$ . Очевидно, что в построенном графе нет циклов, а, следовательно, число вершин больше числа ребер, то есть  $|A| \geq m+1$ .

Покажем, что любой график  $\Gamma = (d_1, \dots, d_m)$  всегда можно продолжить до спектра фигуры  $A$  из  $m+1$  точки.

Фиксируем в пространстве  $\mathbb{R}^n$  декартову систему координат и полагаем

$$A = \left\{ (x_{i,1}, \dots, x_{i,n}) \mid x_{i,1} = \sum_{k=1}^{i-1} d_k, \right. \\ \left. x_{i,j} = 0, j = 2, \dots, n, i = 1, \dots, m+1 \right\}$$

Очевидно, что спектр  $A$  является продолжением  $\Gamma$ . Теорема доказана.

**Следствие 1.** Если в графике  $\Gamma$  из  $C_n^2$  элементов найдётся подграфик вида  $(*)$  из  $n$  элементов, то  $\Gamma$  не является спектром.

Далее рассмотрим некоторые свойства графиков, являющихся спектрами. В качестве характеристики графиков рассмотрим отношение максимального элемента графика к минимальному. Оказывается, что в графиках, являющихся спектрами, на значение этого отношения накладываются некоторые ограничения. Положим

$$R_m(n) = \inf_{A \subseteq \mathbb{R}^m: |A|=n} \frac{d_1(A)}{d_{C_n^2}(A)}, \quad \text{где } S(A) = (d_1(A), \dots, d_{C_n^2}(A)).$$

Оценки для этой величины в случае плоскости и трехмерного пространства содержатся в следующих теоремах.

**Теорема 4.** *Имеет место  $R_2(n) > \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{\pi}}\sqrt{n} - \frac{4}{3}$ .*

**Доказательство.** Пусть максимальное из попарных расстояний между точками множества  $A$  ( $|A| < \infty$ ) равно  $R$ , а минимальное равно 1. Оценим мощность множества  $|A|$  сверху, из чего и будет вытекать искомая оценка. Нетрудно видеть, что площадь выпуклой оболочки множества  $A$  ( $T(A)$ ) не превосходит площади круга диаметра  $R$ . Построим множество кругов радиуса  $0,5$  с центрами в точках множества  $A$ . Эти круги не пересекаются и расположены в области  $T(A, \frac{1}{2})$ , которая является оболочкой ширины  $0,5$  фигуры  $T(A)$ . Площадь  $T(A, \frac{1}{2}) = T(A) + \frac{L}{2} + \frac{\pi}{4}$ , где  $L$  — периметр  $T(A)$ . В силу оценок  $T(A) \leq \frac{\pi R^2}{4}$ ,  $L < \frac{4}{3}\pi R$ , получаем

$$T(A, \frac{1}{2}) < \frac{\pi R^2}{4} + \frac{2}{3}\pi R + \frac{\pi}{4}.$$

Так как плотность любой системы равных, не перекрывающихся кругов не превосходит  $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$ , число кругов (а, следовательно, и точек фигуры  $A$ ) радиуса  $\frac{1}{2}$ , расположенных в области  $T(A, \frac{1}{2})$ , не превосходит  $T(A, \frac{1}{2}) \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

$$|A| < \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi R^2}{4} + \frac{2}{3}\pi R + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}R^2 + \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}R + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

Отсюда  $R(n) > \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{\pi}}\sqrt{n} - 4/3$ . Теорема доказана.

**Следствие 1.** *Если в графике  $\Gamma = (d_1, d_2, \dots, d_{C_n^2})$  выполнено  $\frac{d_1}{d_{C_n^2}} < \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{\pi}}\sqrt{n} - \frac{4}{3}$ , то  $\Gamma$  не является спектром на плоскости.*

**Теорема 5.** *Существует возрастающая подпоследовательность  $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$  натуральных чисел, для которой*

$$R(n_k) \sim \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{\pi}}\sqrt{n_k} \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

**Доказательство.** Построим образ  $A$  следующего вида. На диагонали круга натурального радиуса  $k$  разместим  $2k + 1$  точку на расстоянии 1 друг от друга, на полученных отрезках как на основаниях построим правильные треугольники; распространив подобное построение далее, получим покрытие круга правильными непересекающимися треугольниками со стороной 1; объявим все вершины треугольников, попавших в исходный круг, точками образа  $A$ . Очевидно, что отношение максимального попарного расстояния в  $A$  к минимальному равно  $2k$ . Найдем  $|A|$ .

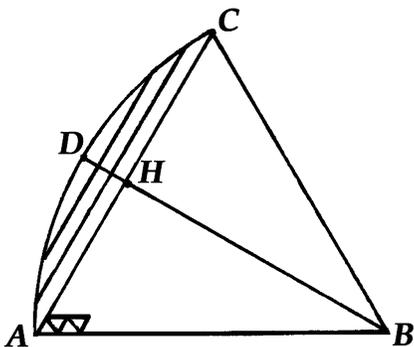


Рис. 1.

На рис. 1  $BADC$  — сектор исходного круга радиуса  $k$ ,  $AB = k$ ,  $BH = \frac{k\sqrt{3}}{2}$ ,  $DH = k(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$ . Число слоев, на которые разбивается сегмент  $ADC$  сторонами треугольников, параллельными  $AC$ , равно  $[k(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1)]$ . Занумеруем получившиеся полосы номерами  $1, \dots, [k(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1)]$ , отсчитывая по направлению от  $H$  к  $D$ .

Длина  $l_i$  отрезка, ограничивающего полосу с номером  $i$ , равна

$$\sqrt{k^2 - 6ik - 3i^2}, \quad i = 1, 2, \dots, \left[ k\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) \right].$$

Пусть  $k_i$  — число точек образа  $A$  на таком отрезке. Тогда

$$k_i = 2 \left[ \sqrt{\frac{k^2}{4} - \frac{3ik}{2} - \frac{3}{4}i^2} - \frac{1}{2} \right] + 2 \quad \text{для } i \text{ той же четности, что и } k,$$

$$k_i = 2 \left[ \sqrt{\frac{k^2}{4} - \frac{3ik}{2} - \frac{3}{4}i^2} \right] + 1 \quad \text{для } i \text{ отличной от } k \text{ четности.}$$

Ясно, что имеет место

$$k_i \geq \sqrt{k^2 - 6ik - 3i^2} - 1, \quad i = 1, \dots, \left[ k\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) \right].$$

Отсюда

$$\begin{aligned} |A| &\geq 3k^2 + 3k + 1 + 6 \sum_{i=1}^{\left[ k\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) \right]} (\sqrt{k^2 - 6ik - 3i^2} - 1) > \\ &> 3k^2 + k(9 - 4\sqrt{3}) + 6 \sum_{i=1}^{\left[ k\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) \right]} \sqrt{k^2 - 6ik - 3i^2} \quad (**) \end{aligned}$$

Так как функция  $f(x) = \sqrt{k^2 - 6kx - 3x^2}$  монотонно убывает на отрезке  $[1, k(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1)]$ , то

$$\sum_{i=1}^{\left[ k\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) \right]} \sqrt{k^2 - 6ik - 3i^2} > \int_1^{k\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)} \sqrt{k^2 - 6kx - 3x^2} dx.$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} &\int_1^{k\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)} \sqrt{k^2 - 6kx - 3x^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \left( (x+k)\sqrt{k^2 - 6kx - 3x^2} + \frac{4}{\sqrt{3}}k^2 \arcsin \frac{\sqrt{3}(x+k)}{2k} \right) \Big|_1^{k\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)} = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{\sqrt{3}}k^2\pi - (k+1)\sqrt{k^2 - 6k - 3} - \frac{4}{\sqrt{3}}k^2 \arcsin \frac{\sqrt{3}(k+1)}{2k} \right) > \\ &> k^2 \left( \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \right) + C_1k, \end{aligned}$$

где  $C_1$  — некоторая константа. Подставив найденную оценку для суммы в неравенство (\*\*), получаем

$$|A| > 3k^2 + 6k^2\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\right) + C_2k = k^2\frac{2\pi}{\sqrt{3}} + C_2k,$$

где  $C_2$  — некоторая константа. Обозначая  $|A|$  через  $n_k$ , а отношение максимального попарного расстояния между точками  $A$  к минимальному через  $R(A)$ , получаем:

$$R(n_k) \leq R(A) = 2k = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{\pi}\sqrt{n_k} + o(\sqrt{n_k})} \quad \text{при } n_k \rightarrow \infty.$$

С учетом нижней оценки для  $R(n)$  из Теоремы 4 следует искомое утверждение. Теорема доказана.

**Теорема 6.** *Имеет место  $R_3(n) > \frac{4}{5}\sqrt[3]{n} - \frac{4}{5}$ .*

**Доказательство.** Рассмотрим произвольную фигуру  $A$  в пространстве  $\mathbb{R}^3$ , состоящую из  $n$  точек. Без ограничения общности считаем, что наименьшее попарное расстояние между ее точками (то есть  $d_{C_2^2}(A)$ ) равно 1. Максимальное попарное расстояние ( $d_1(A)$ ) обозначим через  $R$ , пусть оно реализуется между точками  $C$  и  $D$  фигуры  $A$ . Зафиксируем произвольную плоскость в пространстве  $\mathbb{R}^3$ , содержащую прямую  $(CD)$ , и построим в этой плоскости два круга радиуса  $R + \frac{1}{2}$  с центрами в точках  $C$  и  $D$ . Пересечение построенных кругов обозначим через  $\mu$ . Трехмерную фигуру, образуемую вращением фигуры  $\mu$  относительно прямой  $(CD)$ , обозначим через  $M$ . Построим теперь шары радиуса  $\frac{1}{2}$  с центрами в каждой точке множества  $A$ . Очевидно, что построенные шары не пересекаются (но могут касаться) и целиком содержатся в фигуре  $M$ . Оценим число непересекающихся шаров, содержащихся в  $M$ , откуда и будет вытекать доказываемая нами оценка для  $R_3(n)$ . Ясно, что

$$n \leq \frac{6}{\pi}V\rho, \quad (***)$$

где  $V$  — объем фигуры  $M$ , а  $\rho$  — плотность самой плотной упаковки шаров одинакового радиуса в  $\mathbb{R}^3$ . Для  $\rho$  известна оценка сверху [2]:

$$\rho \leq \sqrt{2}(3 \arccos(1/3) - \pi) < 0.78$$

Имеет место

$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \int_0^{\frac{R}{2} + \frac{1}{2}} \left( \left( R + \frac{1}{2} \right)^2 - \left( x + \frac{R}{2} \right)^2 \right) dx = \\
 &= 2\pi \left( \left( R + \frac{1}{2} \right)^2 \left( \frac{R}{2} + \frac{1}{2} \right) - \frac{\left( x + \frac{R}{2} \right)^3}{3} \Big|_0^{\frac{R}{2} + \frac{1}{2}} \right) = \\
 &= \pi \left( \left( R + \frac{1}{2} \right)^2 (R + 1) - \frac{2}{3} \left( \left( R + \frac{1}{2} \right)^3 - \frac{R^3}{8} \right) \right) = \\
 &= \pi \left( R^3 + 2R^2 + \frac{5}{4}R + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} (7R^3 + 12R^2 + 6R + 1) \right) = \\
 &= \pi \left( \frac{5}{12}R^3 + R^2 + \frac{3}{4}R + \frac{1}{6} \right).
 \end{aligned}$$

Подставив в неравенство (\*\*\*) найденное значение  $V$  и оценку для  $\rho$ , получаем

$$n \leq (2.5R^3 + 6R^2 + 4.5R + 1) \cdot 0.78 < 1.95(R + 0.8)^3.$$

Отсюда  $R > \sqrt[3]{\frac{20}{39}n} - 0.8 > 0.8\sqrt[3]{n} - 0.8$ .

Так как полученное неравенство выполняется для любой фигуры из  $n$  точек, то справедлива оценка для  $R_3(n)$  из утверждения теоремы. Теорема доказана.

**Следствие 1.** Если в графике  $\Gamma = (d_1, d_2, \dots, d_{C_n^2})$  выполнено условие  $\frac{d_1}{d_{C_n^2}} < \frac{4}{5}\sqrt[3]{n} - \frac{4}{5}$ , то  $\Gamma$  не является спектром в пространстве.

**Замечание 3.**  $R_3(n) \asymp \sqrt[3]{n}$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Доказательство.** Покажем, что  $R_3(n) < \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{n}$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда, с учетом нижней оценки для  $R_3(n)$  из Теоремы 6, и получим искомое утверждение.

Для доказательства неравенства для каждого  $n$  построим фигуру  $A$ , состоящую из  $n$  точек, следующим образом.

Находим натуральное  $k$ , такое, что  $k^3 < n \leq (k+1)^3$ . Фиксируем в  $\mathbb{R}^3$  декартову систему координат. Пусть

$$A \subseteq \{(x_1, x_2, x_3) | x_i \in \mathbb{Z}, 0 \leq x_i \leq k, i = 1, 2, 3\}.$$

Тогда  $R_3(n) \leq \frac{d_1(A)}{d_{C^2}(A)} \leq k\sqrt{3} < \sqrt{3}\sqrt[3]{n}$ . Утверждение доказано.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю академику Кудрявцеву В. Б. за постановку задачи, внимание к работе и ценные обсуждения.

## Список литературы

- [1] Козлов В. Н. Математическое моделирование зрительного восприятия // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. М.: Наука, 1996. С. 321–338.
- [2] Роджерс К. Укладки и покрытия. М.: Мир, 1968.
- [3] Муравьева А. А. Распознавание  $n$ -точечников // Интеллектуальные системы. Т. 11, вып. 1–4. 2007. С. 777–780.