

# Порядок сложности укладки деревьев на плоскость

В. А. Ли

В работе рассматривается задача укладки деревьев на 2-х мерную прямоугольную решетку. Предложено несколько алгоритмов укладки, оптимальных по порядку, как для суммарной длины ребер, так и для площади укладки.

**Ключевые слова:** укладка дерева, укладка в прямоугольную решетку, длина укладки, площадь укладки, минимальная укладка, алгоритм укладки.

## 1. Введение

Основной задачей теории синтеза управляющих систем (см., например, [1, 2, 3]) является изучение вопросов оптимальной структурной реализации дискретных функций и, в частности, функций алгебры логики (ФАЛ) или, иначе, булевских функций в различных классах схем. Во многих случаях схема, вычисляющая заданную функцию, подвергается дальнейшей «геометрической» реализации, то есть вложению в некоторую геометрическую структуру. При этом критерием оптимальности схемы, как правило, является не ее «обычная» сложность, а функционал, отражающий минимальную размерность геометрической структуры, в которую данную схему удалось вложить. Основными классами схем, в которых обычно реализуются ФАЛ, являются контактные схемы и схемы из функциональных элементов (СФЭ) [1], а в последнее время — двоичные решающие диаграммы (BDD) [4]. В качестве структур, в которых происходит геометрическая реализация схем, выступают, как правило, 2-х и 3-х

мерные прямоугольные решетки ( $\mathbb{N}^2$  и  $\mathbb{N}^3$ ) [5], клеточные схемы [6, 7], гиперкуб, или, иначе, единичный булев куб [8].

Имеется большое число работ посвященных вложениям графов в различные геометрические структуры (см., например, [9, 10, 11]). Так, исследовано вложение одномерных (линейка, кольцо) [12] и двумерных (решетка, тор) [13] структур параллельных программ в регулярные структуры. В работах [14, 15, 16], например, получены оценки некоторых параметров прямоугольных решеток, допускающих вложение в них гиперкубов, и рассмотрена проблема вложения  $n$ -мерного куба в прямоугольные решетки с  $2n$  вершинами.

Исследование вопросов сложности реализации алгоритмов укладки на 2-х мерную прямоугольную решетку ( $\mathbb{N}^2$ ) различных деревьев имеет ярко выраженное практическое значение. Архитектура 2-х мерной прямоугольной решетки хорошо подходит для моделирования различных алгоритмов, а укладки различных деревьев на нее могут быть полезны в области синтеза схем, химии и нанотехнологиях. Так, например, в [17] исследованы вложения некоторых реализованных на плоскости планарных графов, применяемых в химии, в кубические решетки с сохранением или же удвоением всех расстояний.

В настоящей работе рассматривается задача алгоритмизации процесса укладки различных видов деревьев на 2-х мерную прямоугольную решетку ( $\mathbb{N}^2$ ). Рассматриваются две меры сложности укладки: суммарная длина ребер при укладке и площадь укладки. Предложены несколько алгоритмов укладки, применимые к разным классам деревьев и имеющих разные соотношения длины и площади укладки. Все предложенные алгоритмы оптимальны по порядку для обеих мер сложности, а один из них асимптотически оптимален по площади укладки.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю д.ф.-м.н., профессору Э. Э. Гасанову за постановку задачи и поддержку при ее решении, а также А. П. Пивоварову за оказанную помощь в работе.

## 2. Основные понятия и формулировка результатов

Дано множество  $\mathbb{N}^2$  — всевозможные пары  $(x, y)$ , где  $x, y \in \mathbb{N}$  — множество натуральных чисел. Пары  $(x, y) \in \mathbb{N}^2$  назовем *координатами*. Множество  $\mathbb{N}^2$  будем называть *координатной сеткой*, она представляет собой прямоугольную решетку, ячейки которой есть координаты  $(x, y)$ .

Рассмотрим граф  $G = \{V, W\}$ , где  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  — множество вершин графа,  $V^{(2)}$  — множество двухэлементных подмножеств  $V$ ,  $W \subseteq V^{(2)}$  — множество ребер.

*Укладкой* графа  $G = \{V, W\}$  на плоскость будем называть отображение  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{N}^2$ , которое сопоставляет вершинам данного графа некоторые координаты  $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ , причем разным вершинам соответствуют разные координаты, то есть отображение множества вершин на плоскость является инъективным. Через  $\Phi(G)$  обозначим множество всех упадок графа  $G$ .

Пусть дан граф  $G = \{V, W\}$  и задана его укладка  $\varphi$ , введем следующие характеристики.

*Длиной ребра*  $w = (v_1, v_2)$  графа  $G$ , при укладке  $\varphi$  будем называть величину

$$L(\varphi(w)) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|,$$

где  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  координаты вершин  $v_1$  и  $v_2$  ребра  $w$ , соответственно.

*Длина укладки  $\varphi$  графа  $G$*  есть сумма длин всех уложенных ребер графа при данной укладке  $\varphi$

$$L(\varphi(G)) = \sum_{w \in W} L(\varphi(w)).$$

*Площадь укладки  $\varphi$  графа  $G$*  есть площадь минимального прямоугольника, содержащего все вершины уложенного графа, такого, что стороны прямоугольника параллельны осям координат сетки, а левая нижняя точка совпадает с началом координат  $(0, 0)$ . Обозначается  $S(\varphi(G))$ .

*Минимальной длиной укладки графа* будем называть величину

$$L(G) = \min_{\varphi \in \Phi(G)} L(\varphi(G)).$$

Поскольку длины упаковок графа являются натуральными числами, то минимум достигается, и укладку, на которой минимум достигается, будем называть *минимальной укладкой* графа  $G$ .

Укладывая граф в прямоугольник  $(1 \times |V|)$  получаем минимально возможную площадь графа, равную мощности множества его вершин  $|V|$ .

Обозначим  $\Phi(G, l) = \{\varphi \in \Phi(G) : L(\varphi(G)) \leq l\}$ , то есть это множество упаковок графа  $G$ , длина которых не больше  $l$ .

*Минимальной площадью укладки графа для длины  $l$*  будем называть величину

$$S(G, l) = \min_{\varphi \in \Phi(G, l)} S(\varphi(G)).$$

*Деревом* называется любой ациклический граф. Вершина дерева называется *листом* (или *висячей вершиной*), если степень ее инцидентности равна единице. *Корневым деревом* называется дерево с выделенной вершиной. *Расстояние* между вершинами  $v_1$  и  $v_2$  дерева есть количество ребер в пути, соединяющем  $v_1$  и  $v_2$ . *Радиусом дерева с корнем* будем обозначать максимальное расстояние от корневой вершины дерева до какого-либо листа.

*$n$ -ичным деревом* будем называть дерево у которого степень инцидентности корневой вершины не более  $n$ , а степень инцидентности остальных вершин не более  $n + 1$ .

*Полным  $n$ -ичным деревом* будем называть дерево у которого степень инцидентности корневой вершины равна  $n$ , степень инцидентности висячих вершин равна единице, а остальные вершины имеют степень инцидентности  $n + 1$ , и расстояние между корневой вершиной и любой из висячих одинаково, и соответственно равно радиусу дерева.

Обозначим через  $D_n^r$  — полное  $n$ -ичное дерево радиуса  $r$ .

**Теорема 1.** *Для любого натурального  $r$  выполнено*

$$N - 1 \leq L(D_2^r) < \frac{23}{16} \cdot N,$$

$$N \leq S(D_2^r, 23N/16) < \frac{9}{4} \cdot N,$$

где  $N = 2^{r+1} - 1$  — число вершин в полном бинарном дереве радиуса  $r$ .

**Теорема 2.** Для любых натуральных  $n$  и  $r$  выполнено

$$\begin{aligned} N - 1 &\leq L(D_n^r) < n \cdot N, \\ N &\leq S(D_n^r, n \cdot N) < \frac{n}{n-1} \cdot N, \end{aligned}$$

где  $N = \frac{n^{r+1}-1}{n-1}$  — число вершин в полном  $n$ -ичном дереве радиуса  $r$ .

**Теорема 3.** Для любого натурального  $n$ , любого  $n$ -ичного дерева  $D$  и любого параметра  $C > n + 1$  выполнено

$$\begin{aligned} N - 1 &\leq L(D) \leq c_1 \cdot N - c_2 \cdot \sqrt{N}, \\ N &\leq S(D, c_1 \cdot N - c_2 \cdot \sqrt{N}) \leq N + c_3 \sqrt{N}, \end{aligned}$$

где  $N$  — число вершин в дереве  $D$ ,  $c_1 = (C + 1)(4 + \frac{12}{C-(n+1)}) + c_2$ ,  
 $c_2 = \frac{4C\sqrt{n+2}}{1+\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}}$ ,  $c_3 = 3(C + 1)$ .

### 3. Класс полных бинарных деревьев

Введем некоторые вспомогательные определения.

Для положительного вещественного числа  $a$  через  $]a[$  обозначим наименьшее целое, не меньшее чем  $a$ .

Алгоритмом укладки графов из  $\mathcal{G}$  будем называть отображение  $\mathcal{A}$ , задаваемое на множестве  $\mathcal{G}$ , которое каждому графу  $G \in \mathcal{G}$  сопоставляет определенную его укладку  $\varphi_{\mathcal{A}}(G)$ .

Длиной укладки графа  $G \in \mathcal{G}$  при заданном алгоритме  $\mathcal{A}$  называется величина

$$L_{\mathcal{A}}(G) = L(\varphi_{\mathcal{A}}(G))$$

и площадь укладки графа  $G \in \mathcal{G}$  при заданном алгоритме  $\mathcal{A}$  есть величина

$$S_{\mathcal{A}}(G) = S(\varphi_{\mathcal{A}}(G)).$$

По определению  $L(G) \leq L_{\mathcal{A}}(G)$ , поэтому, получая оценку длины укладки при заданном алгоритме  $\mathcal{A}$ , мы автоматически получаем оценку минимальной длины укладки и оценку минимальной площади укладки для полученной длины.

Исследуем полные бинарные деревья произвольного радиуса.

Справедлива следующая лемма.

**Лемма 1.** *Существует алгоритм укладки  $\mathcal{A}^1$ , с помощью которого полное бинарное дерево радиуса  $r$  можно уложить в прямоугольник со сторонами  $a_r$  и  $b_r$  следующим образом:*

- $a_r = b_r = 3 \cdot 2^{\frac{r-1}{2}} - 1$ , если  $r$  — нечетное;  $b_r = 3 \cdot 2^{\frac{r-2}{2}} - 1$ ,  $a_r = 2 \cdot b_r + 1 = 3 \cdot 2^{\frac{r}{2}} - 1$ , если  $r$  — четное;
- корень дерева находится в точке  $((a_r + 1)/2, (b_r + 1)/2)$ ;
- длина инцидентных корневой вершине ребер при  $r \leq 3$  равна 1, а при  $r > 3$  равна  $3 \cdot 2^{\lfloor \frac{r-3}{2} \rfloor - 1}$ ;
- для длины укладки дерева справедливы соотношения:  $L_{\mathcal{A}^1}(D_2^1) = 2$ ,  $L_{\mathcal{A}^1}(D_2^2) = 6$ ,  $L_{\mathcal{A}^1}(D_2^3) = 14$ ,

$$L_{\mathcal{A}^1}(D_2^r) = 23 \cdot 2^{r-3} - 6 \cdot 2^{\lfloor \frac{r-3}{2} \rfloor}$$

при  $r > 3$  четном и

$$L_{\mathcal{A}^1}(D_2^r) = 23 \cdot 2^{r-3} - 9 \cdot 2^{\lfloor \frac{r-3}{2} \rfloor}$$

при  $r > 3$  нечетном.

**Доказательство** будем вести индукцией по радиусу дерева.

Базис индукции. Укладки для случаев  $r \in \{1, 2, \dots, 6\}$ , приведены на рисунке 1. Легко проверить, что данные укладки удовлетворяют условиям леммы.

Индуктивный переход. Рассмотрим 2 случая:

1.  $r$  — нечетное. Согласно предположению индукции, дерево радиуса  $r - 1$  укладывается в прямоугольник со сторонами

$$a_{r-1} = 3 \cdot 2^{\frac{r-1}{2}} - 1, \quad b_{r-1} = 3 \cdot 2^{\frac{r-3}{2}} - 1.$$

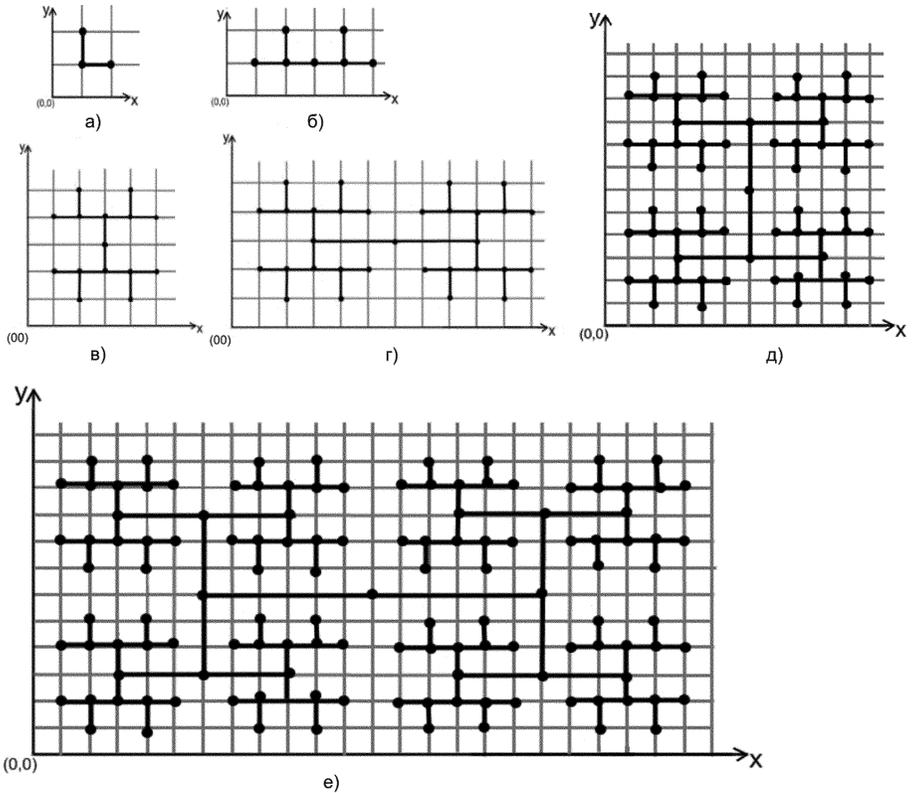


Рис. 1. Примеры укладки полного бинарного дерева на плоскость.

Бинарное дерево радиуса  $r$  строим следующим образом. Точку  $(b_{r-1} + 1, b_{r-1} + 1)$  объявляем корнем дерева. Легко проверить, что  $(a_r + 1)/2 = b_{r-1} + 1 = (b_r + 1)/2$ , то есть второе условие леммы выполняется.

Из корневой вершины выпускаем два вертикальных ребра длины  $(b_{r-1} + 1)/2 = 3 \cdot 2^{\frac{r-3}{2}} - 1$  в противоположные стороны и концы этих ребер будут корневыми для упадок полных бинарных деревьев радиуса  $r - 1$ . Схематично этот шаг изображен на рисунке 2 а).

В итоге получаем, что при нечетном  $r$  дерево укладывается в прямоугольник со сторонами

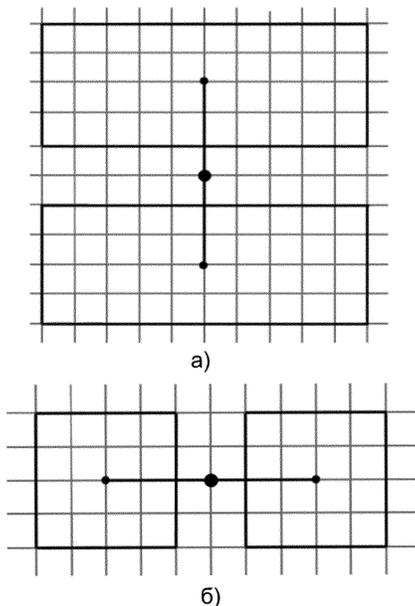


Рис. 2. Пример укладки полного бинарного дерева на плоскость а) нечетного радиуса; б) четного радиуса.

$$a_r = 2 \cdot a_{r-1} + 1 = 3 \cdot 2^{\frac{r-1}{2}} - 1, \quad b_r = b_{r-1} = 3 \cdot 2^{\frac{r-1}{2}} - 1$$

в соответствии с первым условием леммы, причем длина ребер, инцидентных корневой вершине, удовлетворяют третьему условию леммы.

Длина укладки дерева радиуса  $r$  находится следующим образом:

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{A}^1}(D_2^r) &= 2 \cdot L_{\mathcal{A}^1}(D_2^{r-1}) + 2 \cdot 3 \cdot 2^{\lfloor \frac{r-3}{2} \rfloor - 1} = \\ &= 2 \cdot (23 \cdot 2^{r-4} - 6 \cdot 2^{\lfloor \frac{r-4}{2} \rfloor}) + 3 \cdot 2^{\lfloor \frac{r-3}{2} \rfloor} = \\ &= 23 \cdot 2^{r-3} - 12 \cdot 2^{\lfloor \frac{r-3}{2} \rfloor} + 3 \cdot 2^{\lfloor \frac{r-3}{2} \rfloor} = 23 \cdot 2^{r-3} - 9 \cdot 2^{\lfloor \frac{r-3}{2} \rfloor}. \end{aligned}$$

**2.**  $r$  — четное. Согласно предположению индукции, дерево радиуса  $r - 1$  укладывается в квадрат со сторонами

$$a_{r-1} = b_{r-1} = 3 \cdot 2^{\frac{r-2}{2}} - 1.$$

Бинарное дерево радиуса  $r$  строим следующим образом. Точку  $(a_{r-1} + 1, (b_{r-1} + 1)/2)$  объявляем корнем дерева. Легко проверить, что  $a_{r-1} + 1 = (a_r + 1)/2$  и  $(b_{r-1} + 1)/2 = 3 \cdot 2^{\frac{r-2}{2}-1} = (b_r + 1)/2$ , то есть второе условие леммы выполняется.

Из корневой вершины выпускаем два горизонтальных ребра длины  $(a_{r-1} + 1)/2 = 3 \cdot 2^{\frac{r-2}{2}-1}$  в противоположные стороны и концы этих ребер будут корневыми для упадок полных бинарных деревьев радиуса  $r - 1$ . Схематично этот шаг изображен на рисунке 2 б).

В итоге получаем, что при нечетном  $r$  дерево укладывается в прямоугольник со сторонами

$$a_r = 2 \cdot a_{r-1} + 1 = 3 \cdot 2^{\frac{r}{2}} - 1, \quad b_r = b_{r-1} = 3 \cdot 2^{\frac{r-2}{2}} - 1$$

в соответствии с первым условием леммы, причем длина ребер, инцидентных корневой вершине, удовлетворяют третьему условию леммы.

Длина укладки дерева радиуса  $r$  находится следующим образом:

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{A}^1}(D_2^r) &= 2 \cdot L_{\mathcal{A}^1}(D_2^{r-1}) + 2 \cdot 3 \cdot 2^{\lfloor \frac{r-3}{2} \rfloor - 1} = \\ &= 2 \cdot (23 \cdot 2^{r-4} - 9 \cdot 2^{\lfloor \frac{r-4}{2} \rfloor}) + 3 \cdot 2^{\lfloor \frac{r-3}{2} \rfloor} = \\ &= 23 \cdot 2^{r-3} - 9 \cdot 2^{\lfloor \frac{r-3}{2} \rfloor} + 3 \cdot 2^{\lfloor \frac{r-3}{2} \rfloor} = 23 \cdot 2^{r-3} - 6 \cdot 2^{\lfloor \frac{r-3}{2} \rfloor}. \end{aligned}$$

Тем самым доказательство леммы 1 полностью завершено.

### Доказательство теоремы 1.

Покажем, что справедливы следующие оценки

$$L_{\mathcal{A}^1}(D_2^r) < \frac{23}{16} \cdot N, \quad S_{\mathcal{A}^1}(D_2^r) < \frac{9}{4} \cdot N,$$

где  $N = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^k + \dots + 2^r = 2^{r+1} - 1$  — число вершин в полном бинарном дереве радиуса  $r$ .

Справедливость неравенств для  $r \leq 3$  проверяется непосредственно.

Рассмотрим случай, когда  $r$  четное и  $r > 3$ .

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{A}^1}(D_2^r) &= 23 \cdot 2^{r-3} - 6 \cdot 2^{\lfloor \frac{r-3}{2} \rfloor} = \\ &= \frac{23}{16} \cdot (2^{r+1} - 1) + \frac{23}{16} - 6 \cdot 2^{\lfloor \frac{r-3}{2} \rfloor} < \frac{23}{16} \cdot N. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{A}^1}(D_2^r) &= a_r \cdot b_r = (3 \cdot 2^{\frac{r}{2}} - 1) \cdot (3 \cdot 2^{\frac{r-2}{2}} - 1) = \\ &= \frac{9}{4} \cdot (2^{r+1} - 1) + \frac{9}{4} - 9 \cdot 2^{\frac{r}{2}-1} + 1 < \frac{9}{4} \cdot N. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай, когда  $r$  нечетное и  $r > 3$ .

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{A}^1}(D_2^r) &= 23 \cdot 2^{r-3} - 9 \cdot 2^{\lfloor \frac{r-3}{2} \rfloor} = \\ &= \frac{23}{16} \cdot (2^{r+1} - 1) + \frac{23}{16} - 9 \cdot 2^{\lfloor \frac{r-3}{2} \rfloor} < \frac{23}{16} \cdot N. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{A}^1}(D_2^r) &= a_r \cdot b_r = (3 \cdot 2^{\frac{r-1}{2}} - 1) \cdot (3 \cdot 2^{\frac{r-1}{2}} - 1) = \\ &= \frac{9}{4} \cdot (2^{r+1} - 1) + \frac{9}{4} - 6 \cdot 2^{\frac{r-1}{2}} + 1 < \frac{9}{4} \cdot N. \end{aligned}$$

Нижние оценки следуют из простых мощностных соображений, что длина укладки графа не может быть меньше числа ребер в графе, а площадь укладки — меньше числа вершин в графе, и того факта, что в дереве с  $N$  вершинами будет  $N - 1$  ребро.

Тем самым теорема 1 полностью доказана.

## 4. Класс полных $n$ -ичных деревьев

Исследуем полные  $n$ -ичные деревья произвольного радиуса. Справедлива следующая лемма.

**Лемма 2.** *Существует алгоритм укладки  $\mathcal{A}^2$ , который позволяет полное  $n$ -ичное дерево радиуса  $r$  прямоугольником со сторонами  $a_r$  и  $b_r$  укладывать следующим образом:*

- $a_r = b_r = \frac{n^{t+1}-1}{n-1}$ , если радиус  $r = 2t$  четный;  $a_r = \frac{n^{t+1}-1}{n-1}$ ,  $b_r = \frac{n^{t+2}-1}{n}$ , если радиус  $r = 2t + 1$  нечетный;
- корень дерева находится в правом верхнем углу прямоугольника;
- справедливы следующие оценки длины и площади укладки полного  $n$ -ичного дерева радиуса  $r$ :

$$L_{\mathcal{A}^2}(D_{n,r}^c) < n \cdot N, \quad S_{\mathcal{A}^2}(D_{n,r}^c) < \frac{n}{n-1} \cdot N,$$

где  $N = \frac{n^{r+1}-1}{n-1}$  — число вершин в полном  $n$ -ичном дереве радиуса  $r$ .

**Доказательство** будем вести индукцией по радиусу дерева  $r$ .

Базис индукции.  $r = 1$ .

Укладываем дерево в линейку, как показано на рис. 3 а).

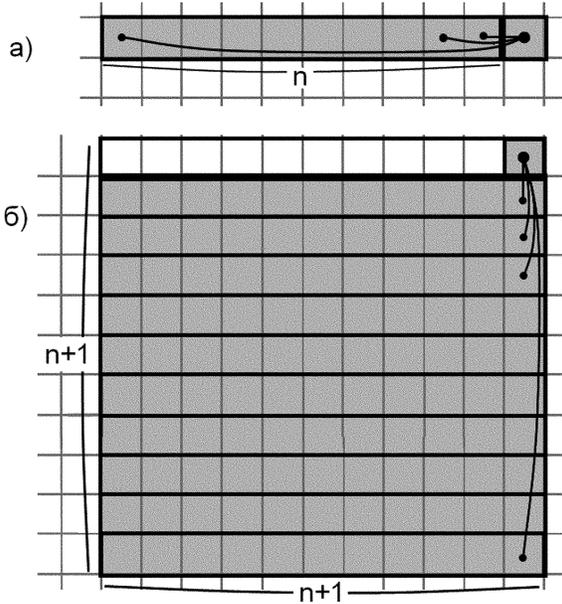


Рис. 3. Пример укладки максимального  $n$ -ичного дерева на плоскость: а)  $r = 1$ ; б)  $r = 2$ .

От корневой вершины откладываем  $n$  ребер в ряд. Получаем прямоугольник  $1 \times (n + 1)$  и корень дерева расположен в его правом верхнем углу.  $N = n + 1$  и

$$L_{A^2}(D_n^1) = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n}{2} \cdot (n + 1) < n \cdot (n + 1),$$

$$S_{A^2}(D_n^1) = 1 \times (n + 1) < \frac{n}{n - 1} \cdot (n + 1).$$

Радиус  $r = 2$ . Укладываем дерево в квадрат (рис. 3 б)). От корневой вершины подряд откладываем  $n$  ребер, на концы которых при-

крепляем дерево радиуса один, уложенное на предыдущем шаге. Получаем квадрат  $(n + 1) \times (n + 1)$  и корень дерева расположен в его правом верхнем углу.  $N = n^2 + n + 1$  и

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{A}^2}(D_n^2) &= n \cdot L_{\mathcal{A}^2}(D_n^1) + (1 + 2 + \dots + n) = \\ &= n(1 + 2 + \dots + n) + (1 + 2 + \dots + n) = \\ &= \frac{1}{2}n(n + 1)^2 = \frac{n^3}{2} + n^2 + \frac{n}{2} < n \cdot (n^2 + n + 1), \\ S_{\mathcal{A}^2}(D_n^2) &= (n + 1)(n + 1) = \frac{(n - 1)(n^2 + 2n + 1)}{n - 1} = \\ &= \frac{n^3 + n^2 - n - 1}{n - 1} < \frac{n}{n - 1} \cdot (n^2 + n + 1). \end{aligned}$$

Индуктивный переход.

Пусть  $r = 2t$ . Дерево строим следующим образом: из корневой вершины выпускаем  $n$  ребер подряд, причем длина первого ребра равна единице, длина второго равна  $a_{r-1} + 1$ , длина третьего равна  $2a_{r-1} + 1, \dots$ , длина  $n$ -го ребра равна  $(n - 1)a_{r-1} + 1$ , где согласно предположению индукции  $a_{r-1} = n^{t-1} + n^{t-2} + \dots + 1$ ,  $b_{r-1} = n^t + n^{t-1} + \dots + 1$  и на концы ребер прикрепляем дерево радиуса  $r - 1$ . Тогда дерево радиуса  $r$  укладывается в прямоугольник со сторонами  $a_r = b_{r-1} = n^t + n^{t-1} + \dots + 1$  и  $b_r = n \cdot a_{r-1} = n(n^{t-1} + n^{t-2} + \dots + 1) + 1 = n^t + n^{t-1} + \dots + 1$ , то есть квадрат. Корень дерева расположен в его правом верхнем углу. Всего вершин в полном  $n$ -ичном дереве радиуса  $r$  равно

$$N = n^r + n^{r-1} + \dots + 1 = \frac{n^{r+1} - 1}{n - 1}.$$

Длина вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{A}^2}(D_n^r) &= n \cdot L_{\mathcal{A}^2}(D_n^{r-1}) + 1 + a_{r-1} + 1 + 2a_{r-1} + 1 + \dots + (n - 1)a_{r-1} + 1 = \\ &= n \cdot L_{\mathcal{A}^2}(D_n^{r-1}) + 1 + (n^{t-1} + n^{t-2} + \dots + 1) + 1 + 2(n^{t-1} + n^{t-2} + \dots + 1) + 1 + \\ &\quad + \dots + (n - 1)(n^{t-1} + n^{t-2} + \dots + 1) + 1 = \\ &= n^{r-1} \left( \frac{1}{2}n(n + 1) \right) + n^{r-2} \left( \frac{1}{2}n(n + 1) \right) + n^{r-3} \left( (n + 1) \frac{1}{2}n(n - 1) + n \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ n^{r-4}((n+1)\frac{1}{2}n(n-1)+n) + n^{r-5}((n^2+n+1)\frac{1}{2}n(n-1)+n) + \dots + \\
 &+ n^2((n^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor - 2} + n^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor - 3} + \dots + 1)\frac{1}{2}n(n-1)+n) + \\
 &+ n((n^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor - 2} + n^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor - 3} + \dots + 1)\frac{1}{2}n(n-1)+n) + \\
 &+ (n^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor - 1} + n^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor - 2} + \dots + 1)\frac{1}{2}n(n-1)+n = \\
 &= n^{r-1}(\frac{1}{2}n(n+1)) + n^{r-2}(\frac{1}{2}n(n+1)) + \\
 &+ \sum_{i=1}^{r-3} n^i (\frac{n(n-1)}{2} (n^{\lfloor \frac{r-i}{2} \rfloor} + \dots + 1) + n) =
 \end{aligned}$$

для сокращения записи, обозначим  $C = n^{r-1}(\frac{1}{2}n(n+1)) + n^{r-2}(\frac{1}{2}n(n+1))$ , тогда

$$\begin{aligned}
 &= C + \sum_{i=1}^{r-3} n^i \left( \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{n^{\lfloor \frac{r-i}{2} \rfloor + 1} - 1}{\sqrt{n} - 1} + n \right) = \\
 &= C + \frac{n(n-1)}{2(\sqrt{n} - 1)} \cdot \left( \sum_{i=1}^{r-3} n^{\lfloor \frac{r+i}{2} \rfloor + 1} - \sum_{i=1}^{r-3} n^i \right) + \sum_{i=1}^{r-3} n^{i+1} < \\
 &< C + \frac{n(n-1)}{2(\sqrt{n} - 1)} \cdot \sum_{i=1}^{r-3} n^{\lfloor \frac{r+i}{2} \rfloor + 1} = \\
 &= C + \frac{n(n-1)}{2(\sqrt{n} - 1)} \cdot (n^{\lfloor \frac{r+3}{2} \rfloor} + n^{\lfloor \frac{r+4}{2} \rfloor} + \dots + n^{\lfloor \frac{2r+5}{2} \rfloor}) = \\
 &= C + \frac{n(n-1)}{2(\sqrt{n} - 1)} \cdot \frac{n^{\lfloor \frac{r+3}{2} \rfloor} (n^{\frac{r-3}{2}} - 1)}{\sqrt{n} - 1} = \\
 &= n^{r-1}(n(n+1)/2) + n^{r-2}(n(n+1)/2) + \frac{n(n-1)}{2(n-1)} \cdot n^r = \\
 &= \frac{n^{r-1}}{2} (n^2 + n + n + 1 + n^2) < n^{r-1} (n^2 + n + 1) = n^{r-1} \frac{n^3 - 1}{n - 1} < \\
 &< n \frac{n^{r+1} - 1}{n - 1} = n \cdot N.
 \end{aligned}$$

Площадь равна

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{A}^2}(D_n^r) &= (n^t + n^{t-1} + \dots + 1) \cdot (n^t + n^{t-1} + \dots + 1) = \\ &= \left( \frac{n^{t+1} - 1}{n - 1} \right)^2 < \frac{n^{2t+2} - n}{(n - 1)^2} = \frac{n}{n - 1} N. \end{aligned}$$

Пусть  $r = 2t + 1$ . Дерево строим аналогично четному случаю и согласно предположению индукции,  $a_{r-1} = n^t + n^{t-1} + \dots + 1$ . Тогда дерево радиуса  $r$  укладывается в прямоугольник со сторонами  $a_r = a_{r-1} = n^t + n^{t-1} + \dots + 1$  и  $b_r = n \cdot a_{r-1} = n(n^t + n^{t-1} + \dots + 1) + 1 = n^{t+1} + n^t + \dots + 1$ . Корень дерева находится в его правом верхнем углу. Всего вершин равно  $N = n^r + n^{r-1} + \dots + 1 = \frac{n^{r+1}-1}{n-1}$ . Длина вычисляется по формуле:

$$L_{\mathcal{A}^2}(D_n^r) = n \cdot L_{\mathcal{A}^2}(D_n^{r-1}) + 1 + a_{r-1} + 1 + 2a_{r-1} + 1 + \dots + (n-1)a_{r-1} + 1.$$

И рассуждая аналогично четному случаю, приходим к тому, что

$$L_{\mathcal{A}^2}(D_n^r) < n \cdot N.$$

Площадь равна

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{A}^2}(D_n^r) &= (n^t + n^{t-1} + \dots + 1) \cdot (n^{t+1} + n^t + \dots + 1) = \\ &= \frac{n^{t+1} - 1}{n - 1} \cdot \frac{n^{t+2} - 1}{n - 1} = \frac{n^{2t+3} - n^{t+2} - n^{t+1} + 1}{(n - 1)^2} < \\ &< \frac{n^{2t+3} - n}{(n - 1)^2} = \frac{n}{n - 1} N. \end{aligned}$$

Тем самым лемма 2 полностью доказана.

Из леммы 2, применяя те же рассуждения о мощностных оценках, что и для теоремы 1, получаем утверждение теоремы 2.

## 5. Класс произвольных $n$ -ичных деревьев

*Весом дерева*  $D$  назовем величину, равную количеству вершин, содержащихся в данном дереве. Обозначается как  $weight(D)$ . *Центром тяжести  $n$ -ичного дерева*  $D = (V, W)$  назовем ребро  $w = (v_1, v_2)$ , которое делит данное дерево на два поддерева (левое  $D_l$  и правое  $D_r$ ) в соотношении  $weight(D_l) \leq n \cdot weight(D_r) + 1$ .

### 5.1. Алгоритм нахождения центра тяжести

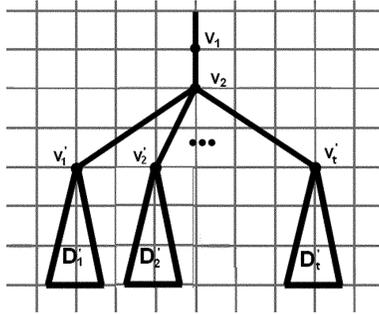


Рис. 4.

Дано дерево  $D = (V, W)$ ,  $weight(D) = N$ . Выберем в нем произвольным образом ребро  $w = (v_1, v_2)$ , назовем его *исходным*.

1) исходное ребро  $w = (v_1, v_2)$  делит дерево на поддеревья  $D_1$  и  $D_2$ .  $weight(D_1) = x$ ,  $weight(D_2) = N - x$  и  $x \leq N - x$ .

◦ если  $weight(D_2) \leq n \cdot weight(D_1) + 1$ , то останов и исходное ребро  $w$  — есть центр тяжести.

◦ иначе рассмотрим дерево  $D_2$ . Пусть  $deg(v_2) = t + 1$ , тогда  $D_2$  состоит из  $t$  поддеревьев, исходящих из вершины  $v_2$ ,  $t \leq n$  (рис. 4).

2) считаем вес каждого из  $D'_i$  поддерева,  $i = 1, \dots, t$ .

3)  $D'_i$  — поддерево с наибольшим весом,  $i = 1, \dots, t$ ,  $v_i$  — его корень. Обозначим ребро  $w = (v_2, v'_i)$  как исходное, переходим к пункту 1) алгоритма.

**Утверждение 1.** Алгоритм нахождения центра тяжести в  $n$ -ичном дереве  $D$  останавливается за конечное число шагов и выдает результат.

**Доказательство.** Доказывать будем от противного.

На каждой итерации исходное ребро, обозначим его как  $w = (v_1, v_2)$ , делит дерево  $D$  на поддеревья  $D_1$  и  $D_2$ ,  $weight(D_1) = x$ ,  $weight(D_2) = N - x$  и  $x \leq N - x \leq \frac{N}{2}$ . Допустим алгоритм не останавливается, то есть не достигается условие останова:  $weight(D_2) \leq$

$n \cdot \text{weight}(D_1) + 1$ . Или другими словами на каждой итерации алгоритма выполняется условие  $\text{weight}(D_2) > n \cdot \text{weight}(D_1) + 1$ . Но так как дерево  $D_2$  состоит из  $t$  поддеревьев, то верно  $\sum_{i=1}^t D'_i > n \cdot \text{weight}(D_1)$ ,  $t \leq n$ , что означает, что на каждой итерации существует поддерево  $D'_i$  такое, что  $\text{weight}(D'_i) > \text{weight}(D_1)$ . То есть вес меньшего поддерева  $D_1$  увеличивается с каждой итерацией и на каком-то шаге превысит значение  $\frac{N}{2}$ , чего не может быть по условию.

Утверждение доказано.

### Алгоритм укладки

Дано произвольное  $n$ -ичное дерево  $D = (V, W)$ ,  $|V| = N$ .

1. Выделяем под укладку исходного дерева прямоугольник со сторонами  $a \times b$ , обладающий свойствами:

$$\begin{aligned} a \times b &> N, & (a - 2) \times (b - 2) &\leq N, \\ b &\leq a, & a &\leq C \cdot b, \end{aligned}$$

где  $C \geq 1$ ,  $C \in \mathbb{R}$  — действительный параметр алгоритма укладки.

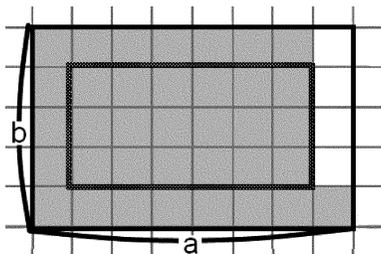


Рис. 5. Прямоугольник с активными вершинами.

2. Определяем активные ячейки выделенной площади. Под *активными*, понимаем ячейки прямоугольника, в которых будут содержаться вершины исходного дерева. Остальные ячейки — *свободные*. Получаем  $N$  активных ячеек и  $a \cdot b - N$  свободных (рис. 5).

Прямоугольник  $a \times b$ , содержащий все активные ячейки, будем называть *основным*. Прямоугольник  $(a - 2) \times (b - 2)$ , отстоящий от основного на одну ячейку с каждой стороны, назовем *внутренним* и

он не должен содержать ни одну свободную ячейку. То есть не может быть случая, как на (рис. 6).

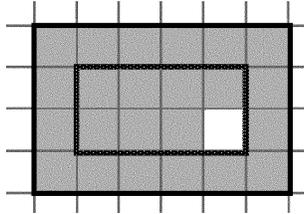


Рис. 6. Неправильное определение активных ячеек в выделенной площади.

3. Ставим в соответствие этому прямоугольнику с активными вершинами матрицу  $M = (m_{i,j})$ , размерности  $b$  на  $a$  ( $b$  — строк,  $a$  — столбцов (рис. 7)), в которой  $m_{i,j} = 1$ , если соответствующая ячейка  $(i, j)$  прямоугольника  $a \times b$  активная, и  $m_{i,j} = 0$ , если ячейка  $(i, j)$  свободная.

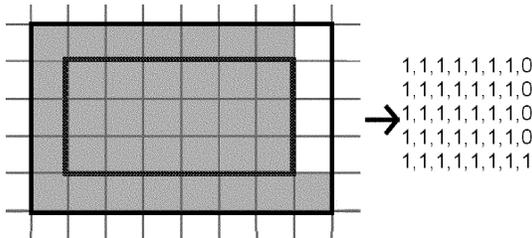


Рис. 7. Матрица, соответствующая прямоугольнику с активными вершинами.

**Определение.**  $M = (m_{i,j})$ ,  $i = \overline{1, b}$ ,  $j = \overline{1, a}$  — матрица, соответствующая прямоугольнику с активными ячейками  $a \times b$ . Представим ее в виде вектора столбцов  $M = (c_1, c_2, \dots, c_a)$ , где  $c_j$  —  $j$ -ый столбец матрицы  $M$ . Две матрицы  $M_1$  и  $M_2$  являются *разрезом* матрицы  $M$ , если они имеют вид:  $\circ M_1 = (c_1, \dots, c_j, c'_{j+1}, \underbrace{\overline{0}, \dots, \overline{0}}_{a-j-1})$  и

$M_2 = (\underbrace{\bar{0}, \dots, \bar{0}}_j, c''_{j+1}, c_{j+2}, \dots, c_a)$ , где  $\bar{0}$  — нулевой столбец матрицы, а  $c'_{j+1} = (m_1, \dots, m_i, \underbrace{0, \dots, 0}_{b-i})^\top$  и  $c''_{j+1} = (\underbrace{0, \dots, 0}_i, m_{i+1}, \dots, m_b)^\top$ ,  $m_i$  — элементы  $(j+1)$ -го столбца матрицы  $M$ ,  $i = 0, 1, \dots, b$ . Если  $i = 0$ , то  $c'_{j+1}$ -ый столбец также является нулевым.

Образованные матрицы  $M_1$  и  $M_2$  однозначно определяют прямоугольники с активными вершинами  $(j+1) \times b$  и  $(a-j) \times b$ .

Аналогично можно сделать разрез матрицы по строке. Для этого представим матрицу  $M$  в виде вектора-столбца строк  $M = (s_1, s_2, \dots, s_b)^\top$ , где  $s_i$  —  $i$ -ая строка матрицы  $M$ . Две матрицы  $M_1$  и  $M_2$  являются *разрезом* матрицы  $M$ , если они имеют вид:  $M_1 = (s_1, \dots, s_i, s'_{i+1}, \underbrace{\bar{0}, \dots, \bar{0}}_{b-i-1})^\top$  и  $M_2 = (\underbrace{\bar{0}, \dots, \bar{0}}_i, s''_{i+1}, s_{i+2}, \dots, s_b)^\top$ , где  $\bar{0}$  — нулевая строка матрицы, а  $s'_{i+1} = (m_1, \dots, m_j, \underbrace{0, \dots, 0}_{a-j})$  и  $s''_{i+1} = (\underbrace{0, \dots, 0}_i, m_{j+1}, \dots, m_a)$ ,  $m_j$  — элементы  $(i+1)$ -ой строки матрицы  $M$ ,  $j = 0, 1, \dots, a$ . Если  $j = 0$ , то  $s'_{i+1}$ -ая строка также является нулевой.

Образованные матрицы  $M_1$  и  $M_2$  однозначно определяют прямоугольники с активными вершинами  $a \times (i+1)$  и  $a \times (b-i)$ .

А также матрицы  $M_1$  и  $M_2$  однозначно определяют расположение этих прямоугольников в прямоугольнике  $a \times b$ , при этом понятно, что иногда прямоугольники  $a_1 \times b_1$  и  $a_2 \times b_2$  могут пересекаться в прямоугольнике  $a \times b$  (рис. 8).

4. Ищем центр тяжести дерева. Это ребро  $w = (v_1, v_2)$ , разбивающее исходное дерево на два поддерева  $D_1$  и  $D_2$ , с множествами вершин  $|V_1| = x$  и  $|V_2| = N - x$ .

5. Разрезаем матрицу  $M = (m_{i,j})$ .

**Лемма 3.**  $D = (V, W)$  — произвольное  $n$ -ичное дерево,  $|V| = N$ .  $M = (m_{i,j})$  — матрица, соответствующая основному прямоугольнику с активными вершинами  $a \times b$ , в который укладывается дерево  $D$ . Фиксируем параметр  $C > n + 1$ . Прямоугольник  $a \times b$  удовлетворяет условиям алгоритма, то есть  $a \cdot b > N$ ,  $(a-2) \cdot (b-2) \leq N$ ,

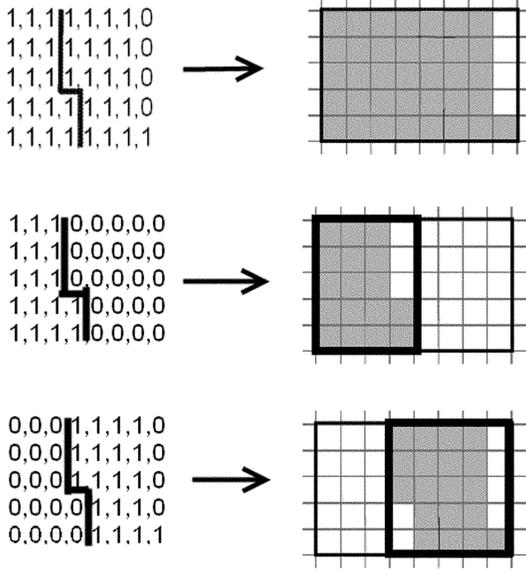


Рис. 8. Разрез матрицы по столбцам.

$b \leq a$ ,  $a \leq C \cdot b$ . Пусть центр тяжести этого дерева делит его на поддеревья  $D_1 = (V_1, W_1)$  и  $D_2 = (V_2, W_2)$ ,  $|V_1| = x$ ,  $|V_2| = N - x$ . Если  $b \geq 4 + \frac{12}{C - (n+1)}$ , то существует такой разрез матрицы  $M$ , что прямоугольники  $a_1 \times b_1$  и  $a_2 \times b_2$ , определяемые разрезом матрицы, являются прямоугольниками с активными вершинами, в которые укладываются поддеревья  $D_1$  и  $D_2$ , удовлетворяют условиям алгоритма с тем же фиксированным параметром  $C$ , то есть

$$\begin{aligned}
 a_1 \times b_1 &\geq x, & (a_1 - 2) \times (b_1 - 2) &< x; \\
 a_2 \times b_2 &\geq N - x, & (a_2 - 2) \times (b_2 - 2) &< N - x \\
 b_1 &\leq a_1, & a_1 &\leq C \cdot b_1; & b_2 &\leq a_2, & a_2 &\leq C \cdot b_2,
 \end{aligned}$$

и так же выполняется то, что основной прямоугольник содержит все активные ячейки, а внутренний прямоугольник не содержит ни одну свободную ячейку.

**Доказательство.** Пусть  $x \leq N - x$ . Матрице  $M$  соответствует прямоугольник с активными вершинами  $a \times b$ . Для определенности

пусть  $a \geq b$ , тогда представим матрицу  $M$  в виде вектора столбцов  $M = (c_1, c_2, \dots, c_a)$ . Если в первом столбце количество единиц больше, чем в последнем, то начинаем с первого столбца, иначе с последнего. Пусть в первом столбце количество единиц больше. Тогда выбираем такое максимальное  $j$ , что сумма единиц в столбцах  $c_1, \dots, c_j$  не больше  $x$ . Обозначим эту сумму как  $\Sigma$ .

Если  $\Sigma = x$ , то разрезом будут матрицы  $M_1 = (c_1, \dots, c_i, c'_{j+1}, \bar{0}, \dots, \bar{0})$  и  $M_2 = (\bar{0}, \dots, \bar{0}, c''_{j+1}, \dots, c_a)$ , где  $c'_{j+1} = \bar{0}$ , а  $c''_{j+1} = c_{j+1}$ .

Если  $\Sigma < x$ , то выбираем из  $(j+1)$ -го столбца матрицы  $M$  подряд идущие элементы  $m_1, \dots, m_i$ , где  $i$  — индекс  $x - \Sigma$  единицы. Тогда разрезом будут матрицы  $M_1 = (c_1, \dots, c_j, c'_{j+1}\bar{0}, \dots, \bar{0})$  и  $M_2 = (\bar{0}, \dots, \bar{0}, c''_{j+1}, c_{j+2}, \dots, c_a)$ , а  $c'_{j+1} = (m_1, \dots, m_i, 0, 0)^T$  и  $c''_{j+1} = (0, \dots, 0, m_{i+1}, \dots, m_b)^T$ .

Этим матрицам соответствуют прямоугольники  $b \times (j+1)$  и  $b \times (a-j)$ .

Очевидно, что  $b \cdot (j+1) > x$  и  $(b-2)(j-1) \leq x$ ,  $b \cdot (a-j) > N-x$  и  $(b-2)(a-j-2) \leq N-x$ , выполняется в силу того, что мы так разрежали матрицу  $M$ . И так как для прямоугольника, соответствующего матрице  $M$ , выполнялось свойство основного и внутреннего прямоугольников, то для прямоугольников, соответствующих матрицам  $M_1$  и  $M_2$ , это свойство тоже выполняется, то есть  $(j+1) \times b$  — основной прямоугольник и он содержит все активные ячейки, в которые будут уложены вершины дерева  $D_1$ , и его внутренний прямоугольник не содержит ни одну свободную ячейку, а  $b \times (a-j)$  — основной прямоугольник, содержащий все активные ячейки, в которые будут уложены вершины дерева  $D_2$ . Тогда остается проверить только отношение сторон прямоугольников.

о  $b \times (j+1)$  — прямоугольник с активными вершинами, соответствующий матрице  $M_1$ . Пусть  $j+1 \leq b$ , нужно доказать, что  $b \leq C \cdot (j+1)$ . Известно, что  $b \cdot (j+1) > x \geq \frac{N-1}{n+1}$ , тогда  $j+1 > \frac{N-1}{(n+1)b} \geq \frac{(a-2)(b-2)-1}{(n+1)b} \geq \frac{(a-2)(b-2)-1}{(n+1)a} = \frac{b-2}{n+1} + \frac{-2b+3}{(n+1)a} \geq \frac{b-2}{n+1} + \frac{-2a+3}{(n+1)a} > \frac{b-2}{n+1} - \frac{2}{n+1} \geq \frac{b}{C}$ , если  $C \cdot b - 4C - (n+1)b \geq 0$ , то есть при  $b \geq \frac{4C}{C-(n+1)} = 4 + \frac{12}{C-(n+1)}$  соотношение сторон сохраняется. Получили, что  $C \cdot (j+1) \geq b$ .

Пусть  $b \leq j+1$ , то очевидно, что  $j+1 \leq C \cdot b$ , так как по условию  $j+1 \leq a \leq Cb$ .

$$\circ b \times (a - j).$$

Пусть  $a - j \leq b$ , нужно доказать, что  $b \leq C \cdot (a - j)$ . Известно, что  $b(a - j) \geq N - x \geq N - \frac{N}{2} = \frac{N}{2}$ , так как  $\frac{N-1}{n+1} \leq x \leq \frac{N}{2}$ , тогда  $a - j \geq \frac{N}{2b} \geq \frac{(a-2)(b-2)}{2b} \geq \frac{(a-2)(b-2)}{2a} = \frac{b-2}{2} - \frac{b-2}{a} \geq \frac{b-2}{2} - 1 \geq \frac{b}{C}$ , если  $b \cdot C - 4C - 2b \geq 0$ , то есть при  $b \geq \frac{4C}{C-2} = 4 + \frac{8}{C-2}$ . Получили, что  $b \leq C \cdot (a - j)$ .

Пусть  $a - j \geq b$ , тогда очевидно, что  $(a - j) \leq C \cdot b$ , так как  $a \leq C \cdot b$ .

Тем самым лемма 3 доказана.

6. Для каждого поддерева повторим данную процедуру, начиная с пункта 4. Продолжаем до тех пор пока стороны прямоугольников удовлетворяют условиям леммы 3.

**Лемма 4.** *Вышеизложенный алгоритм  $\mathcal{A}_C$  укладки произвольных  $n$ -ичных деревьев при фиксированном параметре  $C$  обеспечивает следующую оценку длины и площади укладки:*

$$L_{\mathcal{A}_C}(D) \leq c_1 \cdot N - c_2 \cdot \sqrt{N} \quad S_{\mathcal{A}_C}(D) \leq N + c_3 \sqrt{N},$$

где  $N$  — количество вершин в дереве,  $c_1 = (C + 1)(4 + \frac{12}{C-(n+1)}) + c_2$ ,  $c_2 = \frac{4C}{\sqrt{\frac{1}{n+2} + \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} - 1}}$ ,  $c_3 = 3(C + 1)$ . При этом длина ребра  $w$ , являющегося центром тяжести дерева с  $N$  вершинами не превосходит

$$L_{\mathcal{A}_C}(w) \leq 4C\sqrt{N}.$$

**Доказательство.** При заданном параметре  $C$  базисными деревьями являются деревья, для которых выделенная под укладку площадь удовлетворяет всем условиям Леммы, кроме ограничения на длину стороны прямоугольника, то есть  $b < 4 + \frac{12}{C-(n+1)}$ . Пусть базисные деревья укладываются в прямоугольник с активными ячейками произвольным образом. Оценим длину ребра при такой укладке:  $L_{\mathcal{A}_C}(w) \leq a + b < C(4 + \frac{12}{C-(n+1)}) + 4 + \frac{12}{C-(n+1)} = (C + 1)(4 + \frac{12}{C-(n+1)})$ . С учетом этого оценим длину укладки дерева:  $L_{\mathcal{A}_C}(D) < (N_0 - 1) \times (C + 1)(4 + \frac{12}{C-(n+1)}) < N_0(C + 1)(4 + \frac{12}{C-(n+1)}) + c_2 \cdot N_0 - c_2 \cdot N_0 \leq N_0 \cdot ((C + 1)(4 + \frac{12}{C-(n+1)}) + c_2) - c_2 \cdot N_0 \leq c_1 \cdot N_0 - c_2 \cdot \sqrt{N_0}$ , где  $N_0$  — количество вершин в базисном дереве.

Пусть утверждение теоремы верно для всех  $n$ -ичных деревьев с числом вершин меньшим  $N$ . Рассмотрим  $n$ -ичное дерево  $D(V, W)$  с  $|V| = N$ . По определению алгоритма, это дерево укладывается в прямоугольник  $a \times b$ , где  $a \times b \geq N$ ,  $(a-2) \times (b-2) \leq N$ ,  $a \geq b$ ,  $a \leq C \cdot b$ . Тогда, так как верно  $N \geq (a-2) \times (b-2) \geq (b-2)^2$ , то верно  $b \leq \sqrt{N} + 2$ ,  $a \leq Cb \leq C(\sqrt{N} + 2)$ . Отсюда легко вывести, что

$$\begin{aligned} S_{A_C}(D) &= a \times b = a \times b - 2b - 2a + 4 + 2b + 2a - 4 \leq \\ &\leq N + 2b + 2a - 4 \leq N + 2(\sqrt{N} + 2) + 2C(\sqrt{N} + 2) - 4 \leq \\ &\leq N + 2(C + 1)(\sqrt{N} + 2) \leq N + 3(C + 1)\sqrt{N} = N + c_3\sqrt{N}. \end{aligned}$$

Длина ребра  $w$ , являющегося центром тяжести дерева будет не больше чем полупериметр основного прямоугольника, то есть  $L_{A_C}(w) \leq a + b$ .

$$\begin{aligned} \begin{cases} ab \leq N + c_3\sqrt{N} \\ a \leq C \cdot b \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a \leq \frac{N + c_3\sqrt{N}}{b} \\ b \geq \frac{a}{C} \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow a \leq \frac{N + c_3\sqrt{N}}{b} \leq \frac{N + c_3\sqrt{N} \cdot C}{a} \Rightarrow \\ &\Rightarrow a \leq \sqrt{C(N + c_3\sqrt{N})} \Rightarrow b \leq a \leq \sqrt{C(N + c_3\sqrt{N})}. \end{aligned}$$

Таким образом  $L_{A_C}(w) \leq a + b \leq 2\sqrt{C(N + c_3\sqrt{N})} < 2\sqrt{C(c_3 + 1)\sqrt{N}} < 2\sqrt{C(3C + 4)\sqrt{N}} < 4C\sqrt{N}$ .

Докажем оценку длины укладки. Центр тяжести дерева  $D$  делит его на поддеревья  $D_1(V_1, W_1)$  и  $D_2(V_2, W_2)$ , где  $|V_1| = x$ ,  $|V_2| = N - x$  и  $\frac{N-1}{n+1} \leq x \leq \frac{nN+1}{n+1}$ . Функцию длины укладки можно ограничить функцией  $L(N)$ , зависящей только от веса дерева, тогда

$$\begin{aligned} L_{A_C}(D) &\leq L(N) \leq L_{A_C}(w) + \max_{\frac{N-1}{n+1} \leq x \leq \frac{nN+1}{n+1}} (L(x) + L(N-x)) \leq \\ &\leq L_{A_C}(w) + \max_{\frac{N}{n+2} \leq x \leq \frac{(n+1)N}{n+2}} (L(x) + L(N-x)) \leq \end{aligned}$$

$(L'(x) = c_1 - \frac{c_2}{2\sqrt{x}}, L''(x) = \frac{c_2}{4\sqrt{x^3}} > 0$ , значит функция  $L(x)$  выпукла вниз и достигает своего максимума в точке  $\frac{N}{n+2}$ .)

$$\begin{aligned} &\leq L_{\mathcal{A}_C}(w) + L\left(\frac{N}{n+2}\right) + L\left(\frac{(n+1)N}{n+2}\right) \leq \\ &\leq 4C\sqrt{N} + c_1\frac{N}{n+2} - c_2\sqrt{\frac{N}{n+2}} + c_1\frac{(n+1)N}{n+2} - c_2\sqrt{\frac{(n+1)N}{n+2}} \leq \\ &\leq 4C\sqrt{N} + c_1 \cdot N - c_2\sqrt{\frac{N}{n+2}} - c_2\sqrt{\frac{(n+1)N}{n+2}} = \\ &= c_1 \cdot N + 4C\sqrt{N} - c_2\left(\sqrt{\frac{1}{n+2}} + \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right)\sqrt{N} \leq c_1 \cdot N - c_2\sqrt{N}, \end{aligned}$$

так как по условию  $c_2 = \frac{4C}{\sqrt{\frac{1}{n+2} + \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} - 1}}$  или иначе  $4C - c_2\left(\sqrt{\frac{1}{n+2}} + \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right) = -c_2$ .

Тем самым лемма 4 доказана.

Из леммы 4, применяя те же рассуждения о мощностных оценках, что и для теоремы 1, получаем утверждение теоремы 3.

## Список литературы

- [1] Лупанов О.Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.
- [2] Яблонский С. Основные понятия кибернетики // Проблемы кибернетики. Вып. 2. 1959. С. 7–38.
- [3] Shannon C. The syntesis of two-terminal switching circuits // Bell Syst. Techn. J. 1949. Vol. 28. No. 1. P. 59–98.
- [4] Lee C. Representation of Switching Circuits by Binary-Decision Programs // Bell Systems Technical Journal. 1959. July. Vol. 38. P. 985–999.
- [5] Ложкин С.А., Ли Да Мин. О некоторых оптимальных вложениях двоичных и троичных деревьев в плоские прямоугольные решетки // Вестник московского университета. Сер. 15. М., 1995.

- [6] Альбрехт А. О. О схемах из клеточных элементов // Проблемы кибернетики. 1975. Вып. 33. С. 209–214.
- [7] Шкаликowa Н. А. О реализации булевых функций схемами из клеточных элементов // Математические вопросы кибернетики. 1989. Вып. 2. С. 177–197.
- [8] Седелев О. Б. О реализации функций алгебры логики схемами из некоторых классов, вложенными в гиперкубы / дисс. на соискание уч. степени канд. физ.-мат. наук. М., 2008.
- [9] Деза М., Штогрин М. Изометрические вложения полуправильных многогранников, разбиений и им дуальных в гиперкубы и кубические решетки // УМН. 1996. Т. 51. № 6. С. 199–200.
- [10] Никонов В. Г., Шевелев Д. С. Булевы графы и функции // Дискретная математика. 1991. Т. 3, вып. 4. С. 51–61.
- [11] Fu W. S., Huang H. C., Sengupta A. On ring embedding in hypercubes with faulty nodes and links // Information Processing Letters. 1998. Vol. 68. P. 207–214.
- [12] Тарков М. С. Вложение структур параллельных программ в структуры живучих распределенных вычислительных систем // Автометрия. 2003. Т. 39. № 3. С. 84–96.
- [13] Chan M. Y. Embedding of grids into optimal hypercubes // SIAM J. Comput. 1991. Vol. 20. No. 5. P. 834–864.
- [14] Bezrukov S. L. Embedding complete trees into the hypercube // Discrete Appl. Math. 2001. Vol. 110. No. 2–3. P. 101–119.
- [15] Bezrukov S. L., Chavez J. D., Harper L. H. et al. The congestion of  $n$ -cube layout on a rectangular grid // DMATH: Discrete Mathematics. 2000. Vol. 213. P. 13–19.
- [16] Bezrukov S. L., Chavez J. D., Harper L. H. et al. Embedding of hypercubes into grids // Lecture Notes in Computer Science. 1998. Vol. 1450.
- [17] Деза М., Штогрин М. Вложение химических графов в гиперкубы. Матем. заметки. Т. 68. № 3. М., 2000. С. 339–355.