Об автоматной сложности некоторых классов булевых функций

М. А. Кибкало

Под сложностью языка (его функцией Шеннона) будем понимать число состояний в представляющем его приведенном автомате. В данной работе устанавливается, что булевы языки, соответствующие замкнутым классам Поста, разбиваются на три пояса в соответствие с асимптотикой функции Шеннона, причем для некоторых классов устанавливается точное значение функции Шеннона.

Ключевые слова: сложность, конечный автомат, булева функция, решетка Поста, функция Шеннона.

В произвольном конечном алфавите A определим класс конечных языков, содержащих слова равной длины: $\mathcal{L}_n(A) = \{L \subseteq A^n\}$. Каждой $f \in P_2^n$ можно взаимно однозначно сопоставить конечный язык $L(f) \in \mathcal{L}_n(E)$, где $E = \{0,1\}$ по следующему правилу: слово $\tilde{\alpha} = \alpha_1 \ldots \alpha_n \in L(f) \Leftrightarrow f(\tilde{\alpha}) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$, $\alpha_i \in E$, $i \in 1, \ldots, n$.

Введем согласно [2] понятия инициального конечного автомата (ИКА) и представимости конечного языка в ИКА. Будем говорить, что ИКА $V_q = (E, Q, E, \varphi, \psi, q)$ представляет $f \in P_2^n$, если он представляет $L(f) \in \mathcal{L}_n(E)$.

Сложностью $S(V_q)$ ИКА V_q назовем число состояний в нем. Автоматной сложностью булевой функции $f \in P_2^n$ назовем наименьшую сложность ИКА, представляющего $L(f) \in \mathcal{L}_n(E)$: $S(f,n) = \min\limits_{V_q \sim L(f)} S(V_q)$. Пусть $\mathcal{K} \subseteq P_2$ — класс булевых функций, $\mathcal{K}(n) = \mathcal{K} \cap P_2^n$. Сложностью $\mathcal{K}(n)$ (функцией Шеннона класса $\mathcal{K}$) назовем $S(\mathcal{K}, n) = \max\limits_{f \in \mathcal{K}(n)} S(f,n)$. Поскольку множество $\mathcal{K}(n)$ определяет совокупность языков из класса $\mathcal{L}_n(E)$, будем называть $S(\mathcal{K}, n)$ функцией Шеннона соответствующего класса конечных языков. Для получения оценок функции Шеннона использовались результаты, изложенные в

[3]-[6]. Далее будем пользоваться нотацией классов Поста, введенной в [7]. Положим $A(n) \asymp B(n)$, если $\exists c_1, c_2, 0 < c_1 \leqslant c_2$ такие, что $c_1 \cdot B(n) \lesssim A(n) \lesssim c_2 \cdot B(n)$.

Теорема 1. *Имеют место следующие оценки функции Шеннона классов Поста:*

1) Пусть $\mathcal{K}$ — один из классов C_i, $i = 1,2,3,4$, D_1, D_3, $F_i^{\infty}(n)$, $F_i^{\mu}(n)$, $i = 1,4,5,8$, $\mu > 1$, $\mu \in \mathbb{N}$. Тогда:

$$S(\mathcal{K}, n) \asymp \frac{2^n}{n}.$$

2) Пусть $\mathcal{K}$ — один из классов A_i, $i = 1,2,3,4$, D_2, $F_i^{\infty}(n)$, $F_i^{\mu}(n)$, $i = 2,3,6,7$, $\mu > 1$, $\mu \in \mathbb{N}$. Тогда:

$$S(\mathcal{K}, n) \asymp \frac{2^n}{n \cdot \sqrt{\log n}}.$$

3) Пусть $\mathcal{K}$ — один из классов L_i, $i = 1,2,3,4,5$, S_i, $i = 1,3,5,6$, P_i, $i = 1,3,5,6$, O_i, $i = 1,2,4,5,6,7,8,9$. Тогда:

$$S(\mathcal{K}, n) \asymp n.$$

4) $S(O_3, n) = 1$.

Константы c_1, c_2 из определения отношения $\asymp$ приведены в следующей таблице:

Классы	c_1	c_2
C_i, $i = 1,2,3,4$	1	2
D_1, D_3	1	2
$F_i^{\infty}(n)$, $i = 1,4,5,8$	$3/4$	$3/2$
$F_i^{\mu}(n)$, $i = 1,4,5,8$, $\mu > 1$, $\mu \in \mathbb{N}$	$3/4$	2
A_i, $i = 1,2,3,4$	$\sqrt{2/\pi}$	$2\sqrt{2/\pi}$
D_2	$1/2\sqrt{2/\pi}$	$2\sqrt{2/\pi}$
$F_i^{\infty}(n)$, $i = 2,3,6,7$	$3/4\sqrt{2/\pi}$	$3/2\sqrt{2/\pi}$
$F_i^{\mu}(n)$, $i = 2,3,6,7$, $\mu > 1$, $\mu \in \mathbb{N}$	$3/4\sqrt{2/\pi}$	$2\sqrt{2/\pi}$
L_i, $i = 1,2,3,4,5$	2	2
S_i, $i = 1,3,5,6$	2	2
P_i, $i = 1,3,5,6$	1	1
O_i, $i = 1,2,4,5,6,7,8,9$	1	1

Ниже даны точные значения функции Шеннона для классов из пп. 1, 3 Теоремы 1.

Теорема 2. *Если $\mathcal{K}$ — один из классов C_i, $i = 1, 2, 3, 4$ и $n \in \mathbb{N}$, то $\exists p > 0$:*

$$S(\mathcal{K}, n) = 2^{n-p} - 1 + \sum_{j=0}^{p} 2^{2^j} - p - 1.$$

Значение $p = \mathcal{A}(n)$ однозначно вычисляется с помощью алгоритма $\mathcal{A}$ при $m = n$:

$P_{\min} = 1; P_{\max} = 2^2; Q = 1;$
$for(s = 1, p = 0; s \leqslant m; s{+}{+})\{$
$\quad if(Q \geqslant P_{\max}/2)\{$
$\qquad P_{\min} = P_{\max}; P_{\max} = P_{\max}^2; p{+}{+};$
$\quad \}else\{$
$\qquad Q = Q \cdot 2;$
$\quad \}$
$\}$

Теорема 3. *Если $\mathcal{K}$ — один из классов D_1, D_3, $n \in \mathbb{N}$, и $p = \mathcal{A}(n)$, то:*

1) При $n = p + 2^p$:

$$S(\mathcal{K}, n) = 2^{n-p} - 1 + \sum_{j=0}^{p} 2^{2^j} - p - 1 - 2^{2^{p-1}-1}.$$

2) При всех остальных значениях n:

$$S(\mathcal{K}, n) = 2^{n-p} - 1 + \sum_{j=0}^{p} 2^{2^j} - p - 1.$$

Теорема 4. *Если $\mathcal{K}$ — один из классов $F_i^{\infty}(n)$, $i = 1, 4, 5, 8$, $n \in \mathbb{N}$, и $p = \mathcal{A}(n-1)$:*

$$S(\mathcal{K}, n) = 2^{n-1-p} - 1 + \sum_{j=0}^{p} 2^{2^j} - p - 1 + \max(2^{n-2-p}, 2^{2^p} - 1).$$

Теорема 5. *Для следующих классов точные значения функции Шеннона равны:*

1) $S(L_i, n) = 2n$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$.
2) $S(S_i, n) = 2n$, $i = 1, 3, 5, 6$.
3) $S(P_i, n) = n + 1$, $i = 1, 3, 5, 6$.
4) $S(O_i, n) = n + 1$, $i = 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.
5) $S(O_3, n) = 1$.

Автор выражает благодарность академику Кудрявцеву В. Б. и проф. Бабину Д. Н. за ценные замечания и внимание к работе.

Список литературы

[1] Кибкало М. А. О сложности представления коллекции языков в конечных автоматах // Интеллектуальные системы. Т. 13, вып. 1–4. 2009. С. 347–360.

[2] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

[3] Кузьмин А. Д. Реализация функций алгебры логики автоматами, нормальными алгорифмами и машинами Тьюринга // Проблемы кибернетики. Вып. 13. М.: Наука, 1955. С. 75–96. (РЖМат, 1966, 1В223).

[4] Коршунов А. Д. О числе монотонных функций // Проблемы кибернетики. Вып. 38. 1981. С. 5–109.

[5] Сапоженко А. А. О числе антицепей в ранжированных частично упорядоченных множествах // Дискретная математика. 1989. Т. 1, вып. 1. С. 74–93.

[6] Сапоженко А. А. О числе антицепей в многослойных ранжированных множествах // Дискретная математика. 1989. Т. 1, вып. 2. С. 110–128.

[7] Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966.