

# О спектрах классов Поста булевских функций

Г. Н. Блохина, В. В. Кудрявцев

В работе изучаются длины базисов классов Поста булевских функций. Множество всех длин базисов такого класса называется его спектром. Основным результатом работы является нахождение всех спектров классов Поста.

**Ключевые слова:** булевская функция, спектр, базис, классы Поста.

## Введение

В 1921 г. Э. Поста опубликовал работу [1], в которой описал множество всех замкнутых относительно суперпозиции классов булевских функций, называемых теперь классами Поста.

Он показал, что все эти классы конечно-порожденные и их счетное число. Им построена структура по включению, образованная этими классами. Работа Э. Поста долго была малоизвестной.

В 1966 г. появилась монография [2], в которой было переизложено доказательство этих результатов Э. Поста в более краткой форме. В ней были также вычислены порядки классов Поста, то есть найдены базисы этих классов, содержащие наименьшее число переменных.

Позже в [3] были найдены предикаты, зависящие от наименьшего числа переменных, классами сохранения которых являются предикатные классы Поста.

Здесь мы вводим еще одну характеристику классов Поста, называемую спектром. Спектром классов Поста является множество всех длин базисов этого класса. Нашей целью является описание спектров всех классов Э. Поста, которая здесь достигается. Мы показываем, что спектрами являются множества  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{3\}$ ,  $\{1, 2\}$ ,  $\{2, 3\}$ ,  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\{1, 2, 3, 4\}$  и только они.

## 1. Основные понятия и результаты

Пусть  $E_2 = \{0, 1\}$ ,  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$  и  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k, \dots\}$  — алфавит переменных  $u_n$ , принимающих значения из  $E_2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Обозначим через  $C_1$  класс всех функций  $f(u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_m})$ ,  $t \in \mathbb{N}$ , значения аргументов которых и самих функций из  $E_2$ . Эти функции называются булевыми, б. функциями или просто функциями. Далее для обозначения переменных будут иногда использоваться мета-символы  $x, y, z$ , возможно, с индексами.

В классе  $C_1$  обычным образом вводятся операции переименования переменных и подстановки одних функций в другие вместо их переменных. Эти операции называются операциями суперпозиции. С их помощью строятся формулы из функций. Эти формулы реализуют функции, которые называют суперпозициями тех функций, из которых строятся формулы.

Если  $M \subseteq C_1$ , то через  $[M]$  обозначим все суперпозиции, реализуемые формулами, построенными с помощью функций из  $M$ . Оператор  $[M]$  является замыканием  $M$  и для него выполнено:

- 1)  $[M] \supseteq M$ ;
- 2) если  $M_1 \supseteq M_2$ , то  $[M_1] \supseteq [M_2]$ ;
- 3)  $[[M]] = [M]$ .

Говорим, что  $M$  замкнуто, если  $[M] = M$ .

Если  $M$  — замкнуто и  $M_1 \subseteq M$ , то при  $[M_1] = M$  говорим, что  $M_1$  — полно в  $M$ .

В случае, когда  $M_1$  конечно, говорим, что  $M$  является конечно-порожденным. Полное в  $M$  множество  $M_1$  называется базисом в  $M$ , если для любого  $M_2$  такого, что  $M_2 \subset M_1$  выполнено  $[M_2] \neq M$ , число элементов в  $M_1$  называем длиной базиса  $M_1$ . Для обозначения мощности множества  $T$  используем далее символ  $|T|$ .

Для замкнутого  $M$  обозначим через  $\Sigma(M)$  множество всех замкнутых классов  $M_1$  таких, что  $M_1 \subseteq M$ .

Решетка, которую образует множество  $\Sigma(M)$  с отношением включения между его элементами, обозначается через  $\overline{\Sigma}(M)$  и представляется в виде графа.

Вершинами этого графа являются классы функций из  $\Sigma(M)$ , вложение которых друг в друга обозначается ребром, ориентированным

от более широкого класса  $M$  к классу  $M'$ , вложенному в него, если нет такого  $M''$ , что  $M \subset M'' \subset M'$ .

Граф располагают вертикально, когда указанная ориентация ребер идет сверху вниз и потому возможна замена стрелок в графе на дуги и отрезки.

К числа основных задач для  $M$  относится задача о строении графа  $\overline{\Sigma}(M)$ . Она оказалась связанной с задачей о полноте.

Задача о полноте для  $M$  состоит в описании всех решений уравнения  $[X] = M$ ,  $X \subseteq M$ , относительно  $X$ .

Решение задачи о полноте в  $M$  получается с помощью понятия критериальной системы.

Подмножество  $\theta(M) \subseteq \Sigma(M)$  называется критериальной системой для  $M$  (к. системой), если всякое множество  $M_1 \subseteq M$  является полным точно тогда, когда для любого  $Q$  из  $\theta(M)$  выполнено  $M_1 \not\subseteq Q$ . Примером к. системы является  $\Sigma(M) \setminus M$ , если  $\Sigma(M) \setminus M \neq \emptyset$ . Вместе с тем ясно, что если  $\theta(M)$  — к. система и для некоторых ее элементов  $Q_1$  и  $Q_2$  выполнено  $Q_1 \subseteq Q_2$ , то  $\theta(M) \setminus \{Q_1\}$  также к. система. Таким образом, при рассмотрении к. систем как инструмента для решения задачи о полноте естественно требовать, чтобы к. система была избыточной. Это может быть осуществлено с помощью понятия предполного класса (п. класса).

Назовем замкнутое множество  $Q$  из  $\Sigma(M) \setminus M$  п. классом, если для любой функции  $f$  из  $M \setminus Q$  выполнено  $[Q \cup \{f\}] = M$ . Нетрудно видеть, что каждый п. класс входит в любую к. систему  $\theta(M)$ . Обозначая через  $\Sigma_\pi(M)$  класс всех п. классов, имеем  $\theta(M) \supseteq \Sigma_\pi(M)$ .

Может случиться, что для  $M$  множество  $\Sigma_\pi(M)$  является к. системой, тогда задача о полноте в  $M$  становится эквивалентной указанию  $\Sigma_\pi(M)$ .

Опишем все классы Поста. Их множество исчерпывается списком  $C_i, A_i, D_j, L_k, O_l, S_r, P_r, F_s^\mu, F_s^\infty$ , где  $i = 1, 2, 3, 4$ ;  $j = 1, 2, 3$ ;  $k = 1, 2, 3, 4, 5$ ;  $l = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ ;  $r = 1, 3, 5, 6$ ;  $s = 1, 2, \dots$ ;  $\mu = 2, 3, \dots$

Класс  $C_1$  содержит все б. функции;  $C_2$  состоит из всех функций  $f(x_1, \dots, x_n)$  таких, что  $f(0, \dots, 0) = 0$ ;  $C_3$  — из всех функций таких, что  $f(1, \dots, 1) = 1$ ;  $C_4 = C_2 \cap C_3$ .

Классы  $C_1, C_2, C_3, C_4$  образуют группу классов Поста типа  $C$ .

Функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  называется монотонной, если для любых наборов  $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$  и  $\beta = (b_1, \dots, b_n)$  таких, что  $a_i \leq b_i$  для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ , что обозначаем  $\alpha \leq \beta$ , выполнено  $f(\alpha) \leq f(\beta)$ .

Класс  $A_1$  состоит из всех монотонных функций,  $A_2 = C_2 \cap A_1$ ;  $A_3 = C_3 \cap A_1$ ;  $A_4 = A_2 \cap A_3$ .

Классы  $A_1, A_2, A_3, A_4$  называем классами типа  $A$ .

Функция  $f^*(x_1, \dots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  называется двойственной к  $f(x_1, \dots, x_n)$ . Если  $f = f^*$ , то  $f$  называем самодвойственной.

Класс  $M^*$ , состоящий из всех функций  $f^*$ , двойственным функциям  $f$  из  $M$ , называем двойственным к  $M$ .

Класс  $D_3$  состоит из всех самодвойственных функций;  $D_1 = D_3 \cap C_4$ ;  $D_2 = D_3 \cap A_1$ .

Классы  $D_1, D_2, D_3$  называем классами типа  $D$ .

Класс  $L_1$  состоит из всех линейных функций, то есть таких  $f(x_1, \dots, x_n)$ , что  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i + d \pmod{2}$ .  $L_2 = L_1 \cap C_2$ ;  $L_3 = L_1 \cap C_3$ ;  $L_4 = L_1 \cap C_4$ ;  $L_5 = L_1 \cap D_3$ .

Классы  $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5$  называем классами типа  $L$ .

Класс  $O_9$  состоит из функций, существенно зависящих не более, чем от одного переменного;  $O_8 = O_9 \cap A_1$ ;  $O_4 = O_9 \cap D_3$ ;  $O_5 = O_9 \cap C_2$ ;  $O_6 = O_9 \cap C_3$ ;  $O_1 = O_5 \cap O_6$ ;  $O_7 = \{0, 1\}$ ;  $O_2 = O_5 \cap O_7$ ;  $O_3 = O_6 \cap O_7$ .

Класс  $S_6$  состоит из всех функций вида  $x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n$  и констант 0 и 1;  $S_3 = S_6 \cap C_2$ ;  $S_5 = S_6 \cap C_3$ ;  $S_1 = S_5 \cap S_3$ .

Классы  $S_1, S_3, S_5, S_6$  называем классами типа  $S$ .

Класс  $P_6$  состоит из всех функций вида  $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$  и констант 0 и 1;  $P_5 = P_6 \cap C_2$ ;  $P_3 = P_6 \cap C_3$ ;  $P_1 = P_5 \cap P_3$ .

Классы  $P_1, P_3, P_5, P_6$  называем классами типа  $P$ .

Функция  $f$  удовлетворяет условию  $a^\mu$ , если любые  $\mu, \mu \geq 2$ , наборов, на которых  $f$  равна 0, имеют общую единичную координату, равную нулю.

Аналогично с заменой 0 на 1 вводится условие  $A^\mu$ .

Класс  $F_4^\mu$  состоит из всех функций со свойством  $a^\mu$ ;  $F_1^\mu = C_4 \cap F_4^\mu$ ;  $F_3^\mu = A_1 \cap F_4^\mu$ ;  $F_2^\mu = F_1^\mu \cap F_3^\mu$ .  $F_8^\mu$  состоит из всех функций со свойством  $A^\mu$ ;  $F_5^\mu = C_4 \cap F_8^\mu$ ;  $F_7^\mu = A_3 \cap F_8^\mu$ ;  $F_6^\mu = F_5^\mu \cap F_7^\mu$ .

Функция удовлетворяет условию  $a^\infty$ , если все наборы, на которых она равна нулю, имеют общую нулевую координату.

Аналогично с заменой 0 на 1 вводится свойство  $A^\infty$ .

Класс  $F_4^\infty$  состоит из всех функций со свойством  $a^\infty$ ;  $F_1^\infty = C_4 \cap F_4^\infty$ ;  $F_3^\infty = A_1 \cap F_4^\infty$ ;  $F_2^\infty = F_1^\infty \cap F_3^\infty$ .  $F_8^\infty$  состоит из всех

функций со свойством  $A^\infty$ ;  $F_5^\infty = C_4 \cap F_8^\infty$ ;  $F_7^\infty = A_3 \cap F_8^\infty$ ;  $F_6^\infty = F_5^\infty \cap F_7^\infty$ .

Множество перечисленных классов обозначим через  $\Delta$ . Э. Постом установлено следующее утверждение [1].

**Теорема 1.** *Имеют место положения:*

- a)  $\Delta = \Sigma(C_1)$ ;
  - б)  $\overline{\Sigma}(C_1)$  имеет вид, как на рис. 1.
- Этот граф будем называть диаграммой Поста.

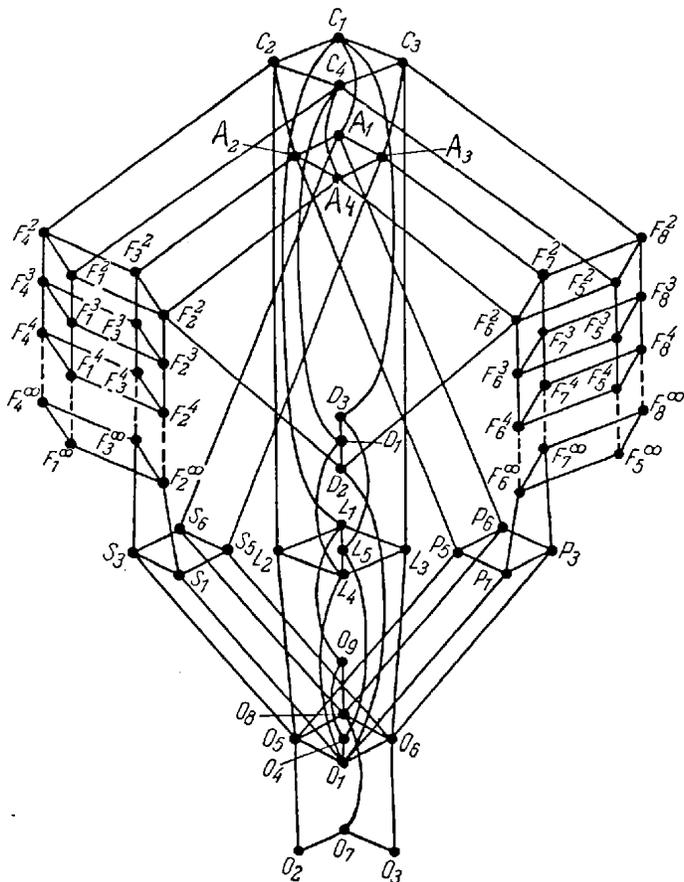


Рис. 1.

Из этой теоремы вытекает справедливость следующего утверждения.

**Теорема 2.** *Имеют место следующие положения:*

а) для любого  $Q$  из  $\Sigma(C_1) \setminus \{O_1, O_2, O_3\}$   $\Sigma_\pi(Q)$  является к. системой и  $|\Sigma_\pi(Q)| \leq 5$ ;

б) каждый класс  $Q$  из  $\Sigma(C_1)$  является конечно-порожденным, и для базиса  $B$  в  $Q$  выполнено  $|B| \leq 5$ .

Обозначим через  $spQ$  множество всех длин базисов в  $Q$  и назовем его спектром. Нашей задачей является нахождение спектров всех классов Поста.

Справедливо следующее основное утверждение.

**Теорема 3.** *Для любого  $Q$  из  $\Sigma(C_1)$  справедливы положения:*

а)  $spQ = \{1\}$ , если  $Q \in \{D_2, L_4, F_1^\infty, F_5^\infty, F_6^\infty, F_2^\infty, P_1, S_1, O_1, O_2, O_3, O_4\} \cup (\bigcup_{\mu=2}^{\infty} \{F_2^\mu\}) \cup (\bigcup_{\mu=2}^{\infty} \{F_6^\mu\})$ ;

б)  $spQ = \{2\}$ , если  $Q \in \{P_3, P_5, S_3, S_5, O_5, O_6, O_7, O_9, F_3^\infty, F_7^\infty\} \cup (\bigcup_{\mu=2}^{\infty} \{F_3^\mu\}) \cup (\bigcup_{\mu=2}^{\infty} \{F_7^\mu\})$ ;

в)  $spQ = \{3\}$ , если  $Q \in \{P_6, S_6, O_3\}$ ;

г)  $spQ = \{1, 2\}$ , если  $Q \in \{C_4, D_1, D_3, L_3, L_2, L_5, F_2^2, F_6^2, F_4^\infty F_8^\infty\} \cup (\bigcup_{\mu=2}^{\infty} \{F_1^\mu\}) \cup (\bigcup_{\mu=2}^{\infty} \{F_4^\mu\}) \cup (\bigcup_{\mu=2}^{\infty} \{F_5^\infty\}) \cup (\bigcup_{\mu=2}^{\infty} \{F_8^\mu\})$ ;

д)  $spQ = \{2, 3\}$ , если  $Q \in \{L_1, A_2, A_3\}$ ;

е)  $spQ = \{3, 4\}$ , если  $Q = A_1$ ;

ж)  $spQ = \{1, 2, 3\}$ , если  $Q \in \{C_2, C_3\}$ ;

з)  $spQ = \{1, 2, 3, 4\}$ , если  $Q = C_1$ ;

и) других спектров для  $Q$  из  $\Sigma(C_1)$ , кроме указанных в пунктах а)-з), не существует.

Эта теорема будет вытекать из лемм, установленных в разделах 2–8.

## 2. Классы типа $C$

Здесь мы рассматриваем классы  $C_1, C_2, C_3, C_4$  и вычислим при указании соответствующих базисов значения  $spC_i$  при  $i = 1, 2, 3, 4$ . Заметим, что, как это следует из строения диаграммы Поста (см. рис. 1), для любого  $Q$  из  $\Sigma(C_1)$  выполнено: если  $B$  — базис в  $Q$ , то  $|B| \leq |\Sigma_\pi(Q)|$ , чем мы будем часто пользоваться.

Говорят, что  $f(x_1, \dots, x_n)$  является  $\alpha$ -,  $\beta$ -,  $\gamma$ - или  $\delta$ - функцией, если  $f(x, \dots, x)$  равна  $x, 1, 0$  или  $\bar{x}$ , соответственно, чем мы иногда будем пользоваться.

**Лемма 1.** *Каждое из множеств  $B_1 = \{\overline{x \vee y}\}$ ,  $B_2 = \{x \cdot y, \bar{x}\}$ ,  $B_3 = \{x \cdot y, x + y, 1\}$ ,  $B_4 = \{x \cdot y, x + y + z, 0, 1\}$  является базисом в  $C_1$  и не существует базиса  $B$  в  $C_1$ , такого, что  $|B| \geq 5$ .*

**Доказательство.** Как следует из диаграммы Поста, имеет место  $\Sigma_\pi(C_1) = \{C_2, C_3, A_1, D_3, L_1\}$  и  $\Sigma_\pi(C_1)$  является к. системой в  $C_1$ . Непосредственной проверкой с помощью  $\Sigma_\pi(C_1)$  убеждаемся, что  $B_i$  при  $i = 1, 2, 3, 4$  является полной системой в  $C_1$  и для всякого  $B' \subset B_i$  выполнено  $[B'] \neq C_1$ . Отсюда следует, что каждое  $B_i$  является базисом в  $C_1$ . Покажем, что не существует базиса  $B$  в  $C_1$ , такое что  $|B| \geq 5$ . Предположим, что такой базис  $B$  есть, тогда, как отмечалось выше, выполнено  $|B| \leq |\Sigma_\pi(C_1)| = 5$ .

Пусть  $B = \{f_{C_2}, f_{C_3}, f_{A_1}, f_{D_3}, f_{L_1}\}$ , где  $f_Q \notin Q$  при  $Q$  из  $\Sigma_\pi(C_1)$ . Здесь для  $f_{C_3}$  имеем  $f_{C_3}(0, 0, \dots, 0) = 1$ . Пусть  $f_{C_3}(1, 1, \dots, 1) = a$ , тогда  $f_{C_3} \notin A_1$ , если  $a = 0$ , и  $f_{C_3} \notin D_3$ , если  $a = 1$ . Таким образом, либо  $B' \setminus \{f_{A_1}\}$ , либо  $B' \setminus \{f_{D_3}\}$  являются полными системами в  $C_1$ , то есть  $B'$  не базис в  $C_1$ . Лемма доказана.

**Следствие 1.** *Имеет место  $spC_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ .*

**Лемма 2.** *Каждое из множеств  $B_1 = \{\bar{x}y \vee \bar{x}\bar{y}z\}$ ,  $B_2 = \{x \cdot y, x + y\}$ ,  $B_3 = \{0, x \vee y, xyz \vee \bar{x}\bar{y}z\}$  является базисом в  $C_3$  и не существует базиса  $B$  в  $C_3$ , такого что  $|B| \geq 4$ .*

**Доказательство.** Из диаграммы Поста вытекает, что  $\Sigma_\pi(C_3) = \{C_4, A_3, L_3, F_8^2\}$  и  $\Sigma_\pi(C_3)$  является к. системой в  $C_3$ . Непосредственной проверкой с помощью  $\Sigma_\pi(C_3)$  убеждаемся, что  $B_i$  при  $i = 1, 2, 3$  является полной системой в  $C_3$  и для всякого  $B' \subset B_i$  выполнено

$[B'] \neq C_3$ . Отсюда следует, что каждое  $B_i$  является базисом в  $C_3$ . Покажем, что не существует базиса  $B$  в  $C_3$ , такого что  $|B| \geq 4$ . Предположим, что такой базис  $B$  есть, тогда, как отмечалось выше, будет выполнено

$$|B| \leq |\Sigma_\pi(C_3)| = 4.$$

Пусть  $B = \{f_{C_4}, f_{A_3}, f_{L_3}, f_{F_8^2}\}$ , где  $f_Q \notin Q$  при  $Q$  из  $\Sigma_\pi(C_3)$ . Ясно, что можно считать выполненным  $f_{C_4} \equiv 0$ . Тогда если  $f_{A_3}$  является  $\gamma$ -функцией, то  $[B \setminus \{f_{C_4}\}] = C_3$  и поэтому  $B$  не базис в  $C_3$ . Если же  $f_{A_3}$  является  $\alpha$ -функцией, то для нее найдутся два соседних набора  $\alpha$  и  $\alpha'$  значений ее переменных таких, что  $\alpha \leq \alpha'$  и  $f(\alpha) > f(\alpha')$ . Можно считать, что

$$\begin{aligned} \alpha &= (0, \dots, 0, 0, 1, \dots, 1) \\ \alpha' &= (0, \dots, 0, 1, 1, \dots, 1), \end{aligned}$$

а тем самым можно допустить, что  $f_{A_3}$  имеет вид  $f_{A_3}(x, y, z)$  и для нее выполнено

$$f_{A_3}(0, 0, 0) = 0, f_{A_3}(0, 0, 1) = 1, f_{A_3}(0, 1, 1) = 0 \text{ и } f_{A_3}(1, 1, 1) = 1.$$

Подставляя в  $f_{A_3}$  вместо  $x$  константу 0, получим функцию  $g(y, z) \in \{\bar{y}z, y + z\}$ .

Значит, если  $g(y, z) = \bar{y}z$ , то  $[B \setminus \{f_{L_3}\}] = C_3$ , а если  $g(x_2, x_3) = y + z$ , то  $[B \setminus \{f_{F_8^2}\}] = C_3$ . Таким образом,  $B$  не является базисом в  $C_3$ . Лемма доказана.

**Следствие 1.** *Имеет место  $spC_3 = \{1, 2, 3\}$ .*

В силу двойственности справедливо утверждение.

**Следствие 2.** *Имеет место  $spC_2 = \{1, 2, 3\}$ .*

**Лемма 3.** *Каждое из множеств  $B_1 = \{\bar{y}\bar{z}u \vee yz\bar{u} \vee yz\bar{u}\}$ ,  $B_2 = \{x \vee y, x(y + z + 1)\}$  является базисом в  $C_4$  и не существует базиса  $B$  в  $C_4$  такого, что  $|B| \geq 3$ .*

**Доказательство.** Из диаграммы Поста вытекает, что  $\Sigma_\pi(C_4) = \{F_1^2, D_1, A_4, F_5^2\}$  и  $\Sigma_\pi(C_4)$  является к. системой в  $C_4$ . Непосредственной проверкой с помощью  $\Sigma_\pi(C_4)$  убеждаемся, что  $B_i$  при  $i = 1, 2$  является полной системой в  $C_4$  и для всякого  $B' \subseteq B_i$  выполнено  $[B'] \neq C_4$ . Значит, каждое  $B_i$  является базисом в  $C_4$ . Покажем, что

не существует базиса  $B$  в  $C_4$  такого, что  $|B| > 2$ . Пусть такой базис существует, тогда, очевидно,  $|B| \in \{3, 4\}$ , в связи с чем рассмотрим два случая, когда  $|B| = 3$  и  $|B| = 4$ .

Случай  $|B| = 3$ .

Если такой базис  $B$  существует, то он имеет вид  $\{f_1, f_2, f_3\}$ . Построим матрицу  $T_1$ , как на рис. 2.

	$F_1^2$	$F_5^2$	$A_4$	$D_1$
$f_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$a_{14}$
$f_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	$a_{24}$
$f_3$	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$	$a_{34}$

Рис. 2.

В ней на пересечении строки  $f_i$  со столбцом  $R$  из  $\{F_1^2, F_5^2, A_4, D_1\}$  стоит 1, если  $f_i \in R$ , и стоит 0, если  $f_i \notin R, i = 1, 2, 3$ . Так как  $B_3$  базис в  $C_4$ , то в каждой строке должны быть нули и единицы. Действительно, в случае нулевой строки  $f_i$  функция  $f_i$  является полной в  $C_4$  и потому  $B_3$  не был бы базисом. Если же строка  $f_i$  единичная, то  $B_3 \setminus \{f_i\}$  является полной системой в  $C_4$  и потому  $B_3$  также не базис.

Таким образом, для  $f_i$  возможны случаи, когда  $f_i$  содержит точно  $j$  нулей и  $j = 1, 2, 3$ .

Пусть для  $f_i$  выполнено  $j = 1$ . Воспользуемся леммой из [2] «о паре свойств», которая утверждает, что имеют место такие следования для  $\alpha$ -функции при вхождении ее в пары классов из  $F_{1,2}, F_{5,2}, A_4$  и  $D_1$ :

$$(D_1, F_1^2) \rightarrow (D_1, F_5^2) \rightarrow (D_1, A_4) \rightarrow (F_5^2, F_1^2) \rightarrow (D_1, F_1^2).$$

Отсюда следует, что строка  $f_i$  точно с одним нулем в  $T_1$  невозможна.

Пусть для  $f_i$  выполнено  $j = 2$ . Здесь вид строки  $f_i$  может быть лишь таким

$$0011, 0101, 0110, 1100, 1010, 1001,$$

которые обозначим слева направо через  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ . Вновь воспользуемся леммой «о паре свойств», из которой следует, что строки  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6$  в  $T_1$  невозможны. Значит, далее можно считать, что в  $T_1$  строка с двумя нулями может быть только вида  $\alpha_3$  или  $\alpha_5$ .

Рассмотрим теперь случай, когда для любого  $i = 1, 2, 3$  в строке  $f_i$  из  $T_1$  имеется точно три нуля. Заметим, что так как  $B_3$  базис, то при

удалении из  $T_1$  любой строки остается подматрица, в которой есть столбец из единиц. Это означает, что в  $T_1$  есть единичный столбец, а все остальные столбцы нулевые. Пусть  $V \in \{F_1^2, F_5^2, A_4, D_1\}$  такой столбец, тогда  $B_3 \subseteq V$  и  $B_3$  не базис в  $C_4$ . Значит, нет такой матрицы  $T_1$ , в которой все строки точно с тремя нулями.

Таким образом осталось рассмотреть такие матрицы  $T_1$ , в которых есть строки с двумя нулями и они вида  $\alpha_3$  или  $\alpha_5$ , а также есть строки с тремя нулями.

Пусть  $T_1$  содержит  $\alpha_3$ ,  $\alpha_5$  и строку с тремя нулями, то есть имеет вид, как на рис. 3.

	$F_1^2$	$F_5^2$	$A_4$	$D_1$
$f_1$	0	1	1	0
$f_2$	1	0	1	0
$f_3$	$c_1$	$c_2$	0	$c_4$

Рис. 3.

Легко видеть, что всегда если  $c_j$ ,  $j = 1, 2, 4$ , равно единице, то в  $T_1$  найдется строка  $f_i$ , удаляя которую, останется подматрица без единичного столбца, что означает полноту оставшейся пары  $B_3 \setminus \{f_i\}$ , то есть  $B_3$  не является базисом в  $C_4$ .

Пусть теперь  $T_1$  содержит из  $\alpha_3$  и  $\alpha_5$  только  $\alpha_3$  и две строки равно с тремя нулями, то есть она имеет вид, как на рис. 4.

	$F_1^2$	$F_5^2$	$A_4$	$D_1$
$f_1$	0	1	1	0
$f_2$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$
$f_3$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$

Рис. 4.

Как и в предыдущем случае, нетрудно убедиться, что всегда найдется строка  $f_i$ , после удаления которой останется подматрица, не содержащая единичного столбца, а это означает, что  $B_3 \setminus \{f_i\}$  не является базисом.

Случай когда  $T_1$  содержит не  $\alpha_3$ , а  $\alpha_5$  рассматривается полностью аналогично.

Значит, в  $C_4$  не существует базиса из трех б. функций.

Случай  $|B| = 4$ .

Покажем, что в  $C_4$  нет базиса из четырех б. функций. Предположим, что это не так и система  $B_4 = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$  является базисом в  $C_4$ . Построим матрицу  $T$  так, как на рис. 5, заполненную нулями и единицами.

	$F_1^2$	$F_5^2$	$A_4$	$D_1$
$f_1$	$b_{11}$	$b_{12}$	$b_{13}$	$b_{14}$
$f_2$	$b_{21}$	$b_{22}$	$b_{23}$	$b_{24}$
$f_3$	$b_{31}$	$b_{32}$	$b_{33}$	$b_{34}$
$f_4$	$b_{41}$	$b_{42}$	$b_{43}$	$b_{44}$

Рис. 5.

В ней на пересечении строки  $f_i$  со столбцом  $R \in \{F_1^2, F_5^2, A_4, D_1\}$  стоит 1, если  $f_i \in R$ , и 0, если  $f_i \notin R$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Так как  $B_4$  базис в  $C_4$ , то в каждой строке должны быть как нули, так и единицы. Более того в любой строке должен быть точно один ноль, так как в противном случае одну из функций можно было бы удалить из  $B_4$  без потери свойства полноты оставшегося множества функций, что противоречило бы базисности  $B_4$  в  $C_4$ . Значит, в каждой строке в  $T$  имеется 3 единицы и один ноль. Это означает, что, например, в строке под номером  $f_1$  найдутся два столбца с номерами  $W$  и  $V$  такие, что  $W \neq V$ ,  $\{W, V\} \notin \{\{A_4, F_1^2\}, \{A_4, F_5^2\}\}$  и в строке  $f_1$  на местах  $W$  и  $V$  стоят единицы. Снова пользуясь леммой «о паре свойств», устанавливаем, что в этом случае  $f_1$  будет принадлежать каждому из классов  $R \setminus \{W, V\}$ , то есть строка  $f_1$  состояла бы только из единиц, что противоречит строению матрицы  $T$ . Значит, базиса  $B_4$  в  $C_4$  не существует. Лемма доказана.

**Следствие 1.** *Имеет место  $spC_4 = \{1, 2\}$ .*

### 3. Классы типа $A$

Здесь мы рассмотрим классы  $A_1, A_2, A_3, A_4$  и вычислим при указании соответствующих базисов значения  $spA_i$  при  $i = 1, 2, 3, 4$ .

**Лемма 4.** Каждое из множеств  $B_3 = \{0, 1, xy \vee zu\}$ ,  $B_4 = \{0, 1, xy, x \vee y\}$  является базисом в  $A_1$  и не существует базиса  $B$  в  $A_1$ , такого что  $|B| \in \{1, 2, d\}$ , где  $d > 4$ .

**Доказательство.** Как следует из диаграммы Поста, имеет место  $\Sigma_\pi(A_1) = \{A_2, A_3, S_6, P_6\}$  и  $\Sigma_\pi(A_1)$  является к. системой в  $A_1$ . Непосредственной проверкой с помощью  $\Sigma_\pi(A_1)$  убеждаемся, что  $B_i$  при  $i = 3, 4$  является полной системой в  $A_1$  и для всякого  $B' \subset B_i$  выполнено  $[B'] \neq A_1$ . Отсюда следует, что каждое  $B_i$  является базисом в  $A_1$ .

Далее, нетрудно видеть, что если  $B$  — базис в  $A_1$ , то  $B \supseteq \{0, 1\}$ . Отсюда следует, что  $|B| \geq 3$ . С другой стороны,  $|B| \leq |\Sigma_4(A_1)| = 4$ . Отсюда следует утверждение леммы.

**Следствие 1.** Имеет место  $spA_1 = \{3, 4\}$ .

**Лемма 5.** Каждое из множеств  $B_2 = \{xy \vee zu, 0\}$ ,  $B_3 = \{xy, x \vee y, 0\}$  является базисом в  $A_3$  и не существует базиса  $B$  в  $A_3$ , такого что  $|B| \in \{1, d\}$ , где  $d > 3$ .

**Доказательство.** Как следует из диаграммы Поста, имеет место  $\Sigma_\pi(A_3) = \{F_7^2, S_5, A_4\}$  и  $\Sigma_\pi(A_3)$  является к. системой в  $A_3$ . Непосредственной проверкой с помощью  $\Sigma_\pi(A_3)$  убеждаемся, что  $B_i$  при  $i = 2, 3$  является полной системой в  $A_3$  и для всякого  $B \subset B_i$  выполнено  $[B] \neq A_3$ . Отсюда следует, что каждое  $B_i$  является базисом в  $A_3$ .

Далее, нетрудно видеть, что если  $B'$  — базис в  $A_3$ , то  $1 \in B'$  и  $|B'| \leq |\Sigma_\pi(A_3)| = 3$ . Отсюда следует утверждение леммы.

**Следствие 1.** Имеет место  $spA_3 = \{2, 3\}$ .

В силу двойственности справедливо утверждение.

**Следствие 2.** Имеет место  $spA_2 = \{2, 3\}$ .

**Лемма 6.** Каждое из множеств  $B_1 = \{xy \vee zu\}$  и  $B_2 = \{xy, z \vee u\}$  является базисом в  $A_4$  и не существует базиса  $B$  в  $A_4$  такого, что  $|B| > 2$ .

**Доказательство.** Из диаграммы Поста следует, что  $\Sigma_\pi(A_4) = \{F_2^2, F_6^2\}$  и  $\Sigma_\pi(A_4)$  является к. системой в  $A_4$ . Непосредственной проверкой убеждаемся, что  $B_i$  при  $i = 1, 2$  является базисом в  $A_4$ , а для базиса  $B$  выполнено  $|B| \leq 2$ . Лемма доказана.

**Следствие 1.** *Имеет место  $spA_4 = \{1, 2\}$ .*

## 4. Классы типа $D$

Здесь мы рассмотрим классы  $D_1, D_2, D_3$  и вычислим при указании соответствующих базисов значения  $spD_i$  при  $i = 1, 2, 3$ .

**Лемма 7.** *Каждое из множеств  $B_1 = \{\bar{h}_2\}$ ,  $B_2 = \{\bar{x}, h_2\}$ , где  $h_2(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz$ , является базисом в  $D_3$  и не существует в  $D_3$  базиса  $B$  такого, что  $|B| > 2$ .*

**Доказательство.** Как следует из диаграммы Поста, имеет место  $\Sigma_\pi(D_3) = \{D_1, L_5\}$  и  $\Sigma_\pi(D_3)$  является к. системой в  $D_3$ . Непосредственной проверкой с помощью  $\Sigma_\pi(D_3)$  убеждаемся, что  $B_i$  при  $i = 1, 2$  является полной системой в  $D_3$  и для всякого  $B' \subseteq B_i$  выполнено  $[B'] \neq D_3$ . Отсюда следует, что каждое  $B_i$  является базисом в  $D_3$ . Так как для базиса  $B$  в  $D_3$  выполнено  $|B| \leq |\Sigma_\pi(D_3)| = 2$ , то заключаем, что наша лемма доказана.

**Следствие 1.** *Имеет место соотношение  $spD_3 = \{1, 2\}$ .*

**Лемма 8.** *Каждое из множеств  $B_1 = \{h_2(x, y, z) + u + v\}$ ,  $B_2 = \{h_2, x + y + z\}$  является базисом в  $D_1$  и не существует в  $D_1$  базиса  $B$  такого, что  $|B| > 2$ .*

**Доказательство.** Как следует из диаграммы Поста, имеет место  $\Sigma_\pi(D_1) = \{D_2, L_4\}$  и  $\Sigma_\pi(D_1)$  является к. системой. Непосредственной проверкой с помощью  $\Sigma_\pi(D_1)$  убеждаемся, что  $B_i$  при  $i = 1, 2$  является полной системой в  $D_1$  и для всякого  $B' \subset B_i$  выполнено  $[B'] \neq D_1$ . Отсюда следует, что  $B_i$  — базис в  $D_1$ . Так как для базиса  $B$  в  $D_1$  выполнено  $|B| \leq |\Sigma_\pi(D_1)| = 2$ , то заключаем, что наша лемма доказана.

**Следствие 1.** *Имеет место соотношение  $spD_1 = \{1, 2\}$ .*

**Лемма 9.** Множество  $B_1 = \{h_2\}$  является базисом в  $D_2$  и не существует базиса  $B$  в  $D_2$ , такого что  $|B| > 1$ .

**Доказательство.** Как следует из диаграммы Поста, имеет место  $\Sigma_\pi(D_2) = \{x\}$  и система  $\Sigma_\pi(D_2)$  является к. системой. Отсюда следует утверждение леммы.

**Следствие 1.** Имеет место соотношение  $spD_2 = \{1\}$ .

## 5. Классы типа $L$

Здесь мы рассмотрим классы  $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5$  и вычислим при указании соответствующих базисов значения  $spL_i$  при  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .

**Лемма 10.** Каждое из множеств  $B_2 = \{1, x + y\}$ ,  $B_3 = \{0, 1, x + y + z\}$  является базисом в  $L_1$  и не существует базиса  $B$  в  $L_1$ , такого что  $|B| \in \{1, d\}$  при  $d > 3$ .

**Доказательство.** Как следует из диаграммы Поста, имеет место  $\Sigma_\pi(L_1) = \{L_2, L_3, L_5, O_9\}$  и  $\Sigma_\pi(L_1)$  является к. системой. Непосредственной проверкой с помощью  $\Sigma_\pi(L_1)$  убеждаемся, что  $B_i$  при  $i = 1, 2$  является полной системой в  $L_1$  и для всякого  $B' \subset B_i$  выполнено  $[B'] \neq L_1$ . Отсюда следует, что каждое  $B_i$  является базисом в  $L_1$ .

Пусть  $B = \{f\}$  и  $[B] = L_1$ . Тогда, очевидно, выполнено  $f(0, \dots, 0) = 1$  и  $f(1, \dots, 1) = 0$ . Отсюда следует, что  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{2k+1} x_i + 1$ , а, значит,  $f \in L_1 \cap D_3 \neq L_1$ , что противоречит полноте  $f$  в  $L_1$ . Значит, такого базиса  $B$  в  $L_1$  нет.

Пусть теперь  $B = \{f_{L_2}, f_{L_3}, f_{L_5}, f_{O_9}\}$ , где  $f_Q$  означает, что  $f_Q \in L_1 \setminus Q$ ,  $Q \in \{L_2, L_3, L_5, O_9\}$ . Ясно, что  $f_{L_3}(0, \dots, 0) = 1$ . Пусть  $f_{L_3}(1, \dots, 1) = a$ . Тогда  $f_{L_3}(x_1, \dots, x_n) \notin L_2$  при  $a = 1$  и  $f_{L_3}(x_1, \dots, x_n) \notin L_5$  при  $a = 0$ . Значит,  $B \setminus \{f_{L_2}\}$  при  $a = 1$  и  $B \setminus \{f_{L_5}\}$  при  $a = 0$  являются полными системами в  $L_1$ . Так как для всякого базиса  $B'$  в  $L_1$  верно  $|B'| \leq |\Sigma_\pi(L_1)| \leq 4$ , то лемма доказана.

**Следствие 1.** Имеет место соотношение  $sp(L_1) = \{2, 3\}$ .

**Лемма 11.** Каждое из множеств  $B_1 = \{x + y\}$ ,  $B_2 = \{0, x + y + z\}$  является базисом в  $L_3$  и не существует базиса  $B$  в  $L_3$  такого, что  $|B| > 2$ .

**Доказательство.** Как следует из диаграммы Поста, имеет место  $\Sigma_\pi(L_3) = \{L_4, O_6\}$  и  $\Sigma_\pi(L_3)$  является к. системой. Непосредственной проверкой с помощью  $\Sigma_\pi(L_3)$  убеждаемся, что  $B_i$  при  $i = 1, 2$  является полной системой в  $L_3$  и для всякого  $B' \subset B_i$  выполнено  $[B'] \neq L_1$ . Отсюда следует, что каждое  $B_i$  является базисом в  $L_3$ . Заметим, что для базиса  $B$  в  $L_3$  выполнено  $|B| \leq |\Sigma_\pi(L_3)| = 2$ . Отсюда следует утверждение леммы.

**Следствие 1.** Имеет место  $spL_3 = \{1, 2\}$ .

В силу двойственности справедливо утверждение.

**Следствие 2.** Имеет место  $spL_2 = \{1, 2\}$ .

**Лемма 12.** Каждое из множеств  $B_1 = \{x + y + z + 1\}$ ,  $B_2 = \{\bar{x}, x + y + z\}$  является базисом в  $L_5$  и не существует базиса  $B$  в  $L_5$  такого, что  $|B| > 2$ .

**Доказательство.** Как следует из диаграммы Поста, имеет место  $\Sigma_\pi(L_5) = \{L_4, O_1\}$  и  $\Sigma_\pi(L_5)$  является к. системой. Непосредственной проверкой с помощью  $\Sigma_\pi(L_5)$  убеждаемся, что  $B_i$  при  $i = 1, 2$  является полной системой в  $L_5$  и для всякого  $B' \subset B_i$  выполнено  $[B'] = L_5$ . Отсюда следует, что каждое  $B_i$  является базисом в  $L_5$ . Замечая, что для базиса  $B$  в  $L_5$  выполнено  $|B| \leq |\Sigma_\pi(L_5)| = 2$ , заключаем, что лемма доказана.

**Следствие 1.** Имеет место  $spL_5 = \{1, 2\}$ .

**Лемма 13.** Множество  $B_1 = \{x + y + z\}$  является базисом в  $L_4$  и не существует в  $L_4$  базиса  $B$  такого, что  $|B| > 1$ .

**Доказательство.** Из диаграммы Поста следует, что  $\Sigma_\pi(L_4) = \{O_1\}$  и  $\{O_1\}$  является к. системой. Тем самым для любой функции  $f$  из  $L_4$  такой, что  $f \neq x$ , выполнено  $[\{f\}] = L_4$ . Отсюда следует лемма.

**Следствие 1.** Имеет место  $spL_4 = \{1\}$ .

## 6. Классы типа $F$

Здесь мы рассмотрим классы  $F_i^\mu$ ,  $F_i^\infty$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$ ,  $\mu = 2, 3, \dots$ , и вычислим для них спектры с явным указанием базисов, соответствующих этим спектрам.

Сначала рассмотрим классы  $F_j^\mu$ ,  $j = 5, 6, 7, 8$ ,  $F_j^\infty$ , а затем, используя двойственность, получим описание спектров для остальных классов типа  $F$ .

Пусть  $h_\mu(x_1, x_2, \dots, x_{\mu+1}) = \bigvee_{i=1}^{\mu+1} x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_{\mu+1}$ .

**Лемма 14.** Каждое из множеств  $B_1 = \{\bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z}\}$ ,  $B_2 = \{x\bar{y}, h_\mu\}$ ,  $B_3 = \{x(y \vee \bar{z}), 0, h_\mu\}$  является базисом в  $F_8^\mu$  и не существует базиса  $B$  в  $F_8^\mu$ , такого что  $|B| > 3$ .

**Доказательство.** Как следует из диаграммы Поста, имеет место  $\sum_\pi(F_8^\mu) = \{F_7^\mu, F_5^\mu, F_8^{\mu+1}\}$ , и  $\sum_\pi(F_8^\mu)$  является к. системой в  $F_8^\mu$ . Непосредственной проверкой убеждаемся, что каждое из множеств  $B_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , является полной системой в  $F_8^\mu$ , а для каждого  $B' \subset B_i$  выполнено  $[B'] \neq F_8^\mu$ . Значит,  $B_i$  является базисом в  $F_8^\mu$ . Остается заметить, что для базиса  $B$  в  $F_8^\mu$  выполнено  $|B| \leq |\sum_\pi(F_8^\mu)| = 3$ . Лемма доказана.

**Следствие 1.** Имеет место  $sp F_8^\mu = \{1, 2\}$ .

В силу двойственности справедливо утверждение.

**Следствие 2.** Имеет место  $sp F_4^\mu = \{1, 2\}$ .

**Лемма 15.** Множество  $B_2 = \{0, h_\mu\}$  является базисом для  $F_7^\mu$  и не существует базиса  $B$  в  $F_7^\mu$  такого, что  $|B| \in \{1, d\}$ , где  $d > 2$ .

**Доказательство.** Как следует из диаграммы Поста, имеет место  $\sum_\pi(F_7^\mu) = \{F_6^\mu, F_7^{\mu+1}\}$  и  $\sum_\pi(F_7^\mu)$  является к. системой в  $F_7^\mu$ . Непосредственной проверкой убеждаемся, что  $B_2$  является полной системой в  $F_7^\mu$ , а для всякого  $B' \subset B_2$  выполнено  $[B'] \neq F_7^\mu$ . Значит,  $B_2$  — базис в  $F_7^\mu$ .

Нетрудно видеть, что если  $B$  — базис в  $F_7^\mu$ , то  $0 \in B$ . Тем самым, так как  $\{0\} \neq F_7^\mu$ , то  $|B| > 1$ . Значит, нет базиса  $B$ , такого что  $|B| = 1$  и  $[B] = F_7^\mu$ .

В заключение отметим, что всегда для базиса  $B$  в  $F_7^\mu$  выполнено  $|B| \leq |\sum_\pi(F_7^\mu)| = 2$ , а тем самым лемма доказана.

**Следствие 1.** *Справедливо соотношение  $sp F_7^\mu = \{2\}$ .*

В силу двойственности имеет место утверждение.

**Следствие 2.**  *$sp F_3^\mu = \{2\}$ .*

**Лемма 16.** *Каждое из множеств*

$$B_1 = \left\{ \left( \bigvee_{i=1}^{\mu+3} x_1 x_2 \dots x_{i-1} \bar{x}_i x_{i+1} \dots x_{\mu+3} \right) \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \dots x_{\mu+3} \vee x_1 x_2 \dots x_{\mu+3} \right\},$$

$B_2 = \{x(y \vee \bar{z}), h_\mu\}$  *является базисом в  $F_5^\mu$  и не существует в  $F_5^\mu$  базиса  $B$  такого, что  $|B| > 2$ .*

**Доказательство.** Как следует из диаграммы Поста, имеет место  $\sum_\pi(F_5^\mu) = \{F_5^{\mu+1}, F_6^\mu\}$  и  $\sum_\pi(F_5^\mu)$  является к. системой в  $F_5^\mu$ . Непосредственной проверкой убеждаемся, что каждое из множеств  $B_i$ ,  $i = 1, 2$ , является полной системой в  $F_5^\mu$ , а для каждого  $B' \subset B_i$  выполнено  $|B'| \neq F_5^\mu$ . Остается заметить, что для базиса  $B$  в  $F_5^\mu$  выполнено  $|B| \leq |\sum_\pi(F_5^\mu)| = 2$ . Лемма доказана.

**Следствие 1.** *Имеет место  $sp F_5^\mu = \{1, 2\}$ .*

В силу двойственности справедливо утверждение.

**Следствие 2.** *Имеет место  $sp F_1^\mu = \{1, 2\}$ .*

**Лемма 17.** *Имеют место положения:*

а) *Каждое из множеств  $B_1 = \{xi(y \vee z) \vee yz\}$ ,  $B_2 = \{x(y \vee z), h_2\}$  является базисом в  $F_6^2$  и нет базиса  $B$  в  $F_6^2$ , такого что  $|B| > 2$ ;*

б) *множество  $\{h_\mu\}$  является базисом в  $F_6^\mu$  при  $\mu > 2$  и нет в  $F_6^\mu$  базиса  $B'$  такого, что  $|B'| > 1$ .*

**Доказательство.** Рассмотрим два случая, когда  $\mu = 2$  и  $\mu > 2$ .

Случай  $\mu = 2$ . Как следует из диаграммы Поста, имеет место  $\sum_\pi(F_6^2) = \{F_6^3, D_2\}$  и  $\sum_\pi(F_6^2)$  является к. системой в  $F_6^2$ . Непосредственной проверкой убеждаемся, что каждое  $B_i$ ,  $i = 1, 2$ , является полной системой в  $F_6^2$ , а для каждого  $B'' \subset B_i$  выполнено  $|B''| \neq F_6^2$ . Значит,  $B_i$  является базисом в  $F_6^2$ . Если  $B$  — базис в  $F_6^2$ , то  $|B| \leq |\sum_\pi(F_6^2)| = 2$ . Значит, при  $\mu = 2$  лемма доказана.

Случай  $\mu > 2$ . Как следует из диаграммы Поста, имеет место  $\sum_\pi(F_6^\mu) = \{F_6^{\mu+1}\}$  и  $\sum_\pi(F_6^\mu)$  является к. системой в  $F_6^\mu$ . Непосредственной проверкой убеждаемся, что  $h_\mu \notin F_6^{\mu+1}$  и потому  $\{h_\mu\} = F_6^\mu$ . Если  $B'$  — базис в  $F_6^\mu$ , то  $|B'| \leq |\sum_\pi(F_6^\mu)| = 1$ . Лемма доказана.

**Следствие 1.** *Имеет место  $sp F_6^2 = \{1, 2\}$ ,  $sp F_6^\mu = \{1\}$  при  $\mu > 2$ .*

В силу двойственности справедливо утверждение.

**Следствие 2.** *Имеет место  $sp F_2^2 = \{1, 2\}$ ,  $sp F_2^\mu = \{1\}$  при  $\mu > 2$ .*

**Лемма 18.** *Каждое из множеств  $B_1 = \{x\bar{y}\}$ ,  $B_2 = \{0, x(y \vee \bar{z})\}$  является базисом в  $F_8^\infty$  и не существует в  $F_8^\infty$  базиса  $B$ , такого что  $|B| > 2$ .*

**Доказательство.** Из диаграммы Поста следует, что  $\sum_\pi(F_8^\infty) = \{F_5^\infty, F_7^\infty\}$  и  $\sum_\pi(F_8^\infty)$  является к. системой в  $F_8^\infty$ . Непосредственной проверкой убеждаемся, что  $B_i$  является полной системой в  $F_8^\infty$  при  $i = 1, 2$  и для любого  $B' \subset B_i$  выполнено  $[B'] \neq F_8^\infty$ . Значит,  $B_i$  — базис в  $F_8^\infty$ . Далее, ясно, что если  $B$  — базис в  $F_8^\infty$ , то  $|B| \leq |\sum_\pi(F_8^\infty)| = 2$ . Лемма доказана.

**Следствие 1.** *Имеет место  $sp F_8^\infty = \{1, 2\}$ .*

В силу двойственности имеем утверждение.

**Следствие 2.** *Имеет место  $sp F_4^\infty = \{1, 2\}$ .*

**Лемма 19.** *Множество  $B_2 = \{0, x(y \vee z)\}$  является базисом в  $F_7^\infty$  и не существует базиса  $B$  в  $F_7^\infty$  такого, что  $|B| \in \{1, d\}$  при  $d > 2$ .*

**Доказательство.** Из диаграммы Поста следует, что  $\sum_\pi(F_7^\infty) = \{F_6^\infty, P_3\}$  и  $\sum_\pi(F_7^\infty)$  является к. системой в  $F_7^\infty$ . Непосредственной проверкой убеждаемся, что  $B_2$  — полная система в  $F_7^\infty$  и для любого  $B' \subset B_2$  выполнено  $[B'] \neq F_7^\infty$ . Значит,  $B_2$  — базис в  $F_7^\infty$ . Далее, ясно, что если  $B$  — базис в  $F_7^\infty$ , то  $B \ni 0$ , то есть  $|B| > 1$ , а также  $|B| \leq |\sum_\pi(F_7^\infty)| = 2$ . Отсюда следует лемма.

**Следствие 1.** *Справедливо соотношение  $sp F_7^\infty = \{2\}$ .*

В силу двойственности имеет место утверждение.

**Следствие 2.** *Справедливо соотношение  $sp F_3^\infty = \{2\}$ .*

**Лемма 20.** *Множество  $B_1 = \{x(y \vee \bar{z})\}$  является базисом в  $F_5^\infty$  и нет базиса  $B$  в  $F_5^\infty$ , такого что  $|B| > 1$ .*

**Доказательство.** Из диаграммы Поста следует, что  $\sum_{\pi}(F_5^{\infty}) = \{F_6^{\infty}\}$  и  $F_6^{\infty}$  — к. система в  $F_5^{\infty}$ . Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что  $B_1 \not\subseteq F_6^{\infty}$ . Значит,  $B_1$  — базис в  $F_5^{\infty}$ . Очевидно, что если  $B$  — базис в  $F_5^{\infty}$ , то с учетом соотношения  $|B| \leq |\sum_{\pi}(F_5^{\infty})| = 1$  заключаем, что  $|B| = 1$ . Лемма доказана.

**Следствие 1.** *Имеет место  $sp F_5^{\infty} = \{1\}$ .*

С учетом двойственности получаем утверждение.

**Следствие 2.** *Имеет место  $sp F_1^{\infty} = \{1\}$ .*

**Лемма 21.** *Множество  $B_1 = \{x(y \vee z)\}$  является базисом в  $F_6^{\infty}$  и нет базиса  $B$  в  $F_6^{\infty}$ , такого что  $|B| > 1$ .*

**Доказательство.** Из диаграммы Поста следует, что  $\sum_{\pi}(F_6^{\infty}) = \{P_1\}$  и  $P_1$  — к. система в  $F_6^{\infty}$ . Непосредственной проверкой убеждаемся, что  $B_1 \not\subseteq P_1$ . Значит,  $B_1$  — базис в  $F_6^{\infty}$ . Очевидно, что если  $B$  — базис в  $F_6^{\infty}$ , то с учетом соотношения  $|B| \leq |\sum_{\pi}(F_6^{\infty})| = 1$  заключаем, что  $|B| = 1$ . Лемма доказана.

**Следствие 1.** *Имеет место  $sp F_6^{\infty} = \{1\}$ .*

В силу двойственности имеем утверждение.

**Следствие 2.** *Имеет место  $sp F_2^{\infty} = \{1\}$ .*

## 7. Классы типов $P$ и $S$

Классами типа  $P$  считаем классы  $P_1, P_3, P_5, P_6$ , а классами типа  $S$  — классы  $S_1, S_3, S_5$  и  $S_6$ . Поскольку классы типа  $S$  двойственны классам типа  $P$ , ограничимся рассмотрением классов типа  $P$ .

Нетрудно видеть, что  $P_3 = P_1 \cup \{0\}$ ,  $P_5 = P_1 \cup \{1\}$ ,  $P_6 = P_1 \cup \{0\}$ , а  $P_1 = [\{\& x_i\}_{i=1}^s]$ , где  $s > 1$ . Отсюда вытекает справедливость следующего утверждения.

**Лемма 22.** *Всякий базис в классах  $P_1, P_3, P_5, P_6$  имеет вид  $\{\& x_i\}_{i=1}^s$ ,  $\{\& x_i, 0\}$ ,  $\{\& x_i, 1\}$ ,  $\{\& x_i, 0, 1\}$ ,  $s > 1$ , соответственно.*

**Следствие 1.** *Имеет место  $sp P_1 = \{1\}$ ,  $sp P_3 = \{2\}$ ,  $sp P_5 = \{2\}$ ,  $sp P_6 = \{3\}$ .*

С учетом двойственности справедливо утверждение.

**Следствие 2.** *Имеет место  $sp S_1 = \{1\}$ ,  $sp S_3 = \{2\}$ ,  $sp S_5 = \{2\}$ ,  $sp S_6 = \{3\}$ .*

## 8. Классы типа $O$

Классами типа  $O$  считаем классы  $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6, O_7, O_8, O_9$ . Очевидным является следующее утверждение.

**Лемма 23.** *Всякий базис в классах  $O_1, \dots, O_9$  имеет вид  $\{x\}$ ,  $\{1\}$ ,  $\{0\}$ ,  $\{\bar{x}\}$ ,  $\{x, 1\}$ ,  $\{x, 0\}$ ,  $\{0, 1\}$ ,  $\{0, 1, x\}$ ,  $\{c, \bar{x}\}$ , соответственно.*

**Следствие 1.** *Имеет место  $sp O_i = \{1\}$  при  $i = 1, 2, 3, 4$ ,  $sp O_j = \{2\}$  при  $j = 5, 6, 7, 9$ ,  $sp O_8 = \{3\}$ .*

## Список литературы

- [1] Post E. Two-valued iterative systems of mathematical logic. Princeton, 1941.
- [2] Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Физматлит, 1966.
- [3] Блохина Г. Н. О предикатном описании классов Поста // Дискретный анализ. Вып. 16. Новосибирск, 1970.
- [4] Кудрявцев В. В. О функциональной системе пучков логических функций // Фундаментальная и прикладная математика. Т. 5, вып. 1. М.: Изд-во МГУ.