Свойства корректной модификации метода парных сравнений*

С. И. Колесникова

Рассматриваются свойства функции относительного сходства как функции скаляризации критериев, применение которой разрешает нежелательные особенности известного метода парных сравнений Т. Саати (МАИ), связанные с применением линейной свертки и единичной нормализации при получении весовых коэффициентов альтернатив. Рассмотрен пример применения модификации МАИ.

Ключевые слова: метод анализа иерархий, весовые коэффициенты альтернатив, интеллектуальная система, тестовое распознавание образов, качество принятия решения.

Метод анализа иерархий (МАИ) [1] среди методов многокритериальной теории полезности («Электра», целевого и математического программирования, различных человеко-машинных процедур) по ориентировочным оценкам (база данных ISI) уже более 25-ти лет прочно удерживает позиции лидера в применении к решению прикладных слабоструктурированных многокритериальных задач [1–3]. Этому способствует и пакет зарубежных программ EXPERT CHOICE, реализующий МАИ и применение в информационно-аналитических и интеллектуальных системах поддержки принятия решений в многокритериальных задачах [4, 5], а также ряд современных интеллектуальных систем (в том числе, экспертных). Успешное применение МАИ в оценивании весовых коэффициентов признаков в интеллектуальных системах, основанных на тестовых методах распознавания [2, 6] подробно описано в работе [7].

*Работа поддержана РФФИ (проект № 09–01–99014–р_офи)

К достоинствам МАИ относятся структурирование проблемы, оценивание построенного набора альтернатив по каждому из заданных критериев, нахождение неточности и противоречия в суждениях эксперта, ранжирование альтернатив.

Отметим два нежелательных эффекта метода парных сравнений, замеченных и самим автором МАИ [1].

К первому относится эффект линейной свертки критериев, используемой в МАИ. В ряде работ [4, 5] отмечено, что в определенном классе многокритериальных задач при помощи линейной свертки в принципе невозможно найти «наилучшее» решение, и поэтому ее использование становится некорректным. Отмечено также, что при выборе наилучшего способа решения задачи многокритериального выбора следует руководствоваться принципом: у каждого элемента, принадлежащего оптимальной (по Парето) области множества X, должна существовать возможность быть выбранным в качестве наилучшего решения. В противном случае, «наилучшее» решение может и не быть найдено вообще в смысле экстремума выбранного способа скаляризации, в частности, в результате максимизации линейной свертки критериев в МАИ.

Ко второму относится эффект единичной нормировки, приводящей к тому, что предпочтения, выявленные на всем множестве альтернатив, могут не совпадать с «частными» предпочтениями на подмножестве альтернатив. Содержательно это означает следующее [8, 9]. При оценивании двух проектов z_1 и z_2 несколькими экспертами по методу МАИ устанавливается, что z_1 предпочтительней z_2 ($z_1 \succ z_2$), знак «$\succ$» означает факт предпочтительности (доминирования). При появлении третьего проекта система (на основе МАИ) их ранжирует по ценности заново, и в результате возможна ситуация: z_2 предпочтительней z_1 ($z_2 \succ z_1$).

Настоящая работа является продолжением исследований, проводившихся в работах [8–10]. В статье даны модифицированная процедура МАИ (ММАИ) иллюстративный пример применения ММАИ при решении прикладной задачи на основе тестового распознавания [5], свойства функции относительного сходства как функции скаляризации критериев, а именно, доказано, что:

1) предпочтения, индуцированные на множествах (альтернатив, признаков) Θ_1 и Θ_2 ($\Theta_1 \subset \Theta_2$) посредством применения классической процедуры МАИ Саати, в общем случае не совпадают;

2) в модифицированной процедуре МАИ указанное противоречие устраняется;

3) «наилучшее» решение, выбираемое согласно функции относительного сходства, принадлежит парето-оптимальному множеству.

Сделано также предположение (которое автору пока не удалось доказать), что для введенной функции относительного сходства справедливы и необходимые условия парето-оптимальности, а именно: для любого парето-оптимального решения найдется система весовых коэффициентов частных критериев, что указанная функция относительного сходства достигнет на этом решении максимального значения.

1. Основные определения и понятия

В общем виде постановка задачи, решаемой МАИ [1], включает цель, альтернативы и критерии оценки альтернатив; требуется выбрать наилучшую альтернативу. После построения иерархической структуры (цели — критерии — альтернативы) система парных сравнений элементов каждого уровня приводит к результату, который может быть представлен в виде обратно-симметричной матрицы $\mathbf{A}$, элемент которой a_{ij} есть интенсивность проявления альтернативы (элемента иерархии) i относительно альтернативы j в смысле выбранного фиксированного критерия. Главные собственные векторы матрицы $\mathbf{A}$ парных сравнений интерпретируются как векторы приоритетов сравниваемых элементов. Для элементов каждого уровня вычисляются коэффициенты важности для каждой из альтернатив в виде произведения в случае, когда оценки элементов заданы в виде отношения (мультипликативный МАИ).

Обозначим формируемую на каждом этапе матрицу парных сравнений $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|_{g\times g}$ альтернатив (далее в контексте работы будем предполагать понятия альтернативы и признака идентичными) $\Theta = (z_1, z_2, \ldots, z_g)$. Матрица $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|_{g\times g}$, $a_{ij} = w_i w_j^{-1}$ относительных весовых коэффициентов w_i, w_j — компонент весового вектора

$w = (w_1, w_2, \ldots, w_g)^T$, где g — количество сравниваемых альтернатив должна обладать свойствами [1]:

A) $a_{ij} > 0$; B) $a_{ij} = a_{ji}^{-1}$; C) $a_{ij} = a_{ik} \cdot a_{kj}$, $i, j = \overline{1, g}$; D) число g является максимальным собственным значением матрицы A, и для некоторого единственного (нормированного) вектор-столбца $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_g)^T$ с положительными компонентами выполняется равенство: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{w} = g \cdot \mathbf{w}$.

Обозначим $X = \{x\}$ — множество выбираемых решений-альтернатив x, $f(x)$ — числовой критерий на множестве X.

Решение $x' \in X$ называется оптимальным по Парето (парето-оптимальным) [3, 4], если не существует такого возможного решения $x \in X$, для которого имеет место неравенство $f(x) > f(x')$. Все парето-оптимальные решения образуют множество Парето, обозначаемое $P_f(X)$.

Бинарное отношение предпочтительности (доминирования) альтернатив (признаков) обозначается знаком «$\succ$», например, $z_2 \succ z_1$.

2. Постановка задачи

Требуется построить процедуру оценки значимости альтернатив по совокупности заданных критериев, во-первых, сохраняющей бинарные отношения (предпочтения) при изменении (добавлении дополнительной альтернативы, или удалении альтернативы из исследуемой совокупности); во-вторых, гарантирующей корректное применение линейной свертки, а также определить ее свойства и класс решаемых задач.

Прежде чем перейти к решению задачи, обсудим примеры из работ [5, 8–11], иллюстрирующие негативные стороны классического применения МАИ, приводящих к неточности в принятии решения.

Пример 1. Пусть задача состоит в выборе прямоугольного участка [4] из следующих трех вариантов: (I) 7×15, (II) 10×10, (III) 5×20 (измерение производится в некоторых единицах длины). При использовании МАИ с равновесными метрическими критериями (длина и ширина участка) и аддитивной сверткой критериев, выбор будет сделан в пользу второго участка, хотя первый участок, очевидно, имеет максимальную площадь. Действительно, соответствующие МПС имеют вид [2]:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 7/10 & 7/5 \\ 10/7 & 1 & 10/5 \\ 5/7 & 5/10 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 15/10 & 15/20 \\ 10/15 & 1 & 10/20 \\ 20/15 & 20/10 & 1 \end{bmatrix}.$$

оценки собственных векторов МПС $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ равны: $\mathbf{w}^1 = (0.318, 0.455, 0.227)$, $\mathbf{w}^2 = (0.333, 0.222, 0.444)$, соответственно, итоговый весовой вектор равен: $\mathbf{w} = (0.326, 0.338, 0.336)$.

Заметим, что при использовании мультипликативной свертки весовой вектор по равновесным критериям в примере 2 будет равен: $(0.318^{0.5} \cdot 0.333^{0.5}, 0.455^{0.5} \cdot 0.222^{0.5}, 0.227^{0.5} \cdot 0.444^{0.5}) = (0.326, 0.319, 0.319)$, или в нормализованном виде: $\mathbf{w} = (0.338, 0.331, 0.331)$, что тоже соответствует верному выбору. Известно [5], что максимальное значение мультипликативной свертки на некотором решении (в данном случае, точки с координатами (ширина, длина)) является достаточным условием парето-оптимальности этого решения.

Пример 2. Пусть оцениваются две альтернативы (признака): z_1, z_2 по двум равновесным мерам относительной важности со следующими МПС [5, 6]: $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1/4 & 1 \end{bmatrix}$. В результате применения МАИ получим для альтернатив z_1, z_2 вектор ВКА $\mathbf{w} = (w_1, w_2) = (0.567, 0.433)$. Так как $w_1 > w_2$, то $z_1 \succ z_2$. При оценивании трех альтернатив z_1, z_2, z_3 по тем же двум мерам относительной важности со следующими МПС: $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1/3 & 1/6 & 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1/2 \\ 1/4 & 1 & 1/8 \\ 2 & 8 & 1 \end{bmatrix}$. В результате классического применения МАИ получаем: $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) = (0.304, 0.338, 0.358)$, то есть $z_2 \succ z_1$.

Пример 3. Третий пример касается тестовых методов распознавания образов (основы одного из наиболее эффективных подходов к созданию интеллектуальных систем [2, 6, 11]), использующих для принятия решений наборы (тесты), содержащие меньшее количество признаков и с большим весом, где под весом теста понимается сумма весовых коэффициентов признаков. В работе [7] изложен метод к определению «весов» сравниваемых признаков и тестов, который учитывает вклад признаков в распознающую способность теста с учетом их взаимозависимости и базируется на представлении совокупности всех различимых пар объектов из разных классов (образов) в виде мультимножества. Дальнейшее применение МАИ, использующего парные сравнения признаков на основе специальным образом выбранных 3-х мер их относительной важности, приводит к итоговым значениям весовых коэффициентов признаков. Ниже приведенный пример из работы [11] свидетельствует о целесообразности корректного оценивания весовых коэффициентов при изменении анализируемого набора признаков в процессе принятия решения.

Пусть матрица **Q** (объект — признак) содержит описание 6-ти объектов, в матрице **R** указывается на соответствие номеров объектов и классов, которым объекты принадлежат.

$$\mathbf{Q} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \end{array}; \quad \mathbf{R} = \begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array} \left[\begin{array}{c} 1\\1\\1\\2\\2\\2 \end{array}\right]; \quad \mathbf{T} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array}.$$

Для данного примера тупиковыми тестами (матрица **T**) являются наборы признаков $\Theta_1 = \{z_1, z_2, z_3\}$, $\Theta_2 = \{z_1, z_2, z_4\}$ и $\Theta_3 = \{z_2, z_3, z_4\}$.

Корректное применение тестового алгоритма по принципу совпадения значений всех признаков не позволит новый объект $O = (0, 1, 2, 1)$ отнести к одному из выделенных классов, однако фрагмент $(0, 1)$, порождаемый набором $\Theta = \{z_1, z_2\}$, содержится в O и соответствующих объектах из первого класса и не содержится в объектах из второго класса, что дает основание полагать, что распознаваемый объект более близок к первому классу. Непосредственное применение МАИ в методе из работы [7] может привести к ошибочному определению весовых коэффициентов признаков, а, следовательно, и к неточности в принятии решения.

3. Решение задачи. Модифицированная процедура МАИ и ее свойства

В работах [8, 9] предлагается следующая схема решения проблемы единичной нормировки, согласно которой порядок предпочтения альтернатив на множестве метрических критериев строится на основе относительного (взаимного) превосходства.

Для каждой пары альтернатив с номерами (i, j) определяются нормированные по s-му критерию значения весовых коэффициентов альтернатив (ВКА) υ_{is}, υ_{js} (по терминологии работы [5] значения s-го критерия в i-й и j-й альтернативах), то есть $\upsilon_{is} + \upsilon_{js} = 1$. Далее вычисляются величины $D_i = \sum\limits_{s=1}^{\nu} c_s \upsilon_{is}$, $D_j = \sum\limits_{s=1}^{\nu} c_s \upsilon_{js}$ и строится обратно-симметричная матрица из отношений $\gamma_{ij} = D_i/D_j$, а именно: $B = ||b_{ij}||$, $b_{ij} = \gamma_{ij}$, $b_{ji} = 1/b_{ij}$. Величина γ_{ij} называется «коэффициентом относительного превосходства i-й альтернативы». Далее рекомендуется ненормированный вектор приоритетов альтернатив $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_g)^T$ находить как собственный вектор (как и в МАИ [1]) из решения матричного уравнения: $\mathbf{B} \cdot \mathbf{W} = \lambda_{\max} \cdot \mathbf{W}$, где $\lambda_{\max}$ — максимальное собственное значение матрицы $\mathbf{B}$.

Заметим, однако, что выполнение свойства транзитивности ($b_{ij} = b_{ik} \cdot b_{kj}$), являющееся весьма важным условием для данного вывода (см. ниже утверждение), в данном случае не гарантируется. Действительно, обозначив через υ'_{is}, υ'_{js} не нормированные по s-му критерию значения ВКА, получаем выражения: $\upsilon_{is} = \upsilon'_{is}/(\upsilon'_{is} + \upsilon'_{js})$, $\upsilon_{js} = \upsilon'_{js}/(\upsilon'_{is} + \upsilon'_{js})$. Отсюда следует, величина γ_{ij} — это не просто коэффициент относительного превосходства i-й альтернативы, а *по сравнению* с j-й, поскольку $D_i = D_{i/j}$, $D_j = D_{j/i}$:

$$D_{i/j} = \sum_{s=1}^{\nu} c_s \upsilon_{is} = \sum_{s=1}^{\nu} c_s \frac{\upsilon'_{is}}{\upsilon'_{is} + \upsilon'_{js}}, \quad D_{j/i} = \sum_{s=1}^{\nu} c_s \upsilon_{js} = \sum_{s=1}^{\nu} c_s \frac{\upsilon'_{js}}{\upsilon'_{is} + \upsilon'_{js}}.$$

Тогда получаем: $b_{ik} \cdot b_{kj} = \gamma_{ik} \cdot \gamma_{kj} = (D_{i/k}/D_{k/i}) \cdot (D_{k/j}/D_{j/k})$; $b_{ij} = (D_{i/j}/D_{j/i})$ и вопрос о справедливости $b_{ij} = b_{ik} \cdot b_{kj}$, таким образом, остается открытым.

Утверждение 1. *Вектор ВКА необходимо является собственным вектором, соответствующим максимальному собственному значе-*

нию $\lambda_{\max}$ *только в случае совместной (согласованной) матрицы парных сравнений.*

Доказательство утверждения непосредственно следует из вида характеристического уравнения для $\mathbf{B}$, имеющего место при выполнении свойств матрицы парных сравнений (МПС) 1)–4) [2, 4]:

$$\det(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{E}) = \det\begin{bmatrix}(1-\lambda) & 1 & \dots & 1\\ 1 & (1-\lambda) & \dots & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & 1 & \dots & (1-\lambda)\end{bmatrix} = (-1)^g\lambda^{g-1}(\lambda-g) = 0,$$

из которого следует, что матрица $\mathbf{B}$ будет иметь только два собственных значения (при выполнении условий 1)–4)), при этом, значение g является максимальным. В противном случае собственный вектор несовместной МПС будет соответствовать максимальному собственному значению, которое строго больше g, а не равно g.

Согласно работам [8–10], укажем основные этапы ММАИ и перечислим ее свойства.

I. Построим МПС на каждом из ν этапов (по числу ν мер относительной важности одной альтернативы над другой). Результатом каждого s-го уровня иерархии является g — компонентный вектор нормализованных значений ВКА — $w_s = (w_1^s, w_2^s, \dots, w_g^s)$. Введем весовые коэффициенты мер относительной важности альтернатив c_s, $\sum\limits_{s=1}^{\nu} c_s = 1$.

II. Сформируем всевозможные векторы $w_{ij}^s = \left(w_{ij}^s\left(i\right), w_{ij}^s\left(j\right)\right)$ локальных ВКА уровня 1 по формулам: $w_{ij}^s\left(i\right) = \frac{w_i^s}{w_i^s+w_j^s}$, $w_{ij}^s\left(j\right) = \frac{w_j^s}{w_i^s+w_j^s}$.

III. Сформируем матрицу $\mathbf{W} = \|w_{ij}\| = \|(w_{ij}\left(i\right), w_{ij}\left(j\right))\|$, где векторы $(w_{ij}\left(i\right), w_{ij}\left(j\right))$ — локальные нормализованные ВКА z_i, z_j уровня 2 относительно всей совокупности мер относительной важности альтернатив, компоненты которых находим по формулам:

$$w_{ij}\left(i\right) = \sum_{s=1}^{\nu} c_s w_{ij}^s\left(i\right), w_{ij}\left(j\right) = \sum_{s=1}^{\nu} c_s w_{ij}^s\left(j\right), \quad \sum_{s=1}^{\nu} c_s = 1$$

IV. Глобальные значения ВКА считаем по одной из формул [1]: $V_i^{(1)} = \frac{1}{g}\sum\limits_{j=1}^{g} w_{ij}(i)$, $V_i^{(2)} = \left(\prod\limits_{j=1}^{g} w_{ij}(i)\right)^{1/g}$, $i = \overline{1,g}$.

Свойства обобщенной процедуры МАИ сформулируем в виде 4-х теорем. Обозначим $\rho_1 = \{(z_i, z_j) : \ z_i \succ z_j\}$ $(\rho_2 = \{(z_i, z_j) : \ z_j \succ z_i\})$, $\Theta_1 = \{z_1, z_2, \ldots, z_{g-1}\}$, $\Theta_2 = \{z_1, z_2, \ldots, z_{g-1}, z_g\}$.

Теорема 1. *Пусть заданы множества альтернатив Θ_1 и Θ_2, $(\Theta_1 \subset \Theta_2)$. Бинарные отношения (предпочтения) $z_i\rho_1 z_j$, $z_i\rho_2 z_j$ $z_i, z_j \in \Theta_1 \subset \Theta_2$, $i \neq j$, индуцированные на множествах Θ_1 и Θ_2 посредством применения классической процедуры МАИ, в общем случае не совпадают.*

Теорема 2. *Пусть для МПС альтернатив $A' = \left\| a'_j \right\|_{(g-1)\times(g-1)}$ $\left(a'_{ij} = w'_i/w'_j\right)$ и $A = \|a_{ij}\|_{g\times g}$ $(a_{ij} = w_i/w_j)$ множеств Θ_1 и Θ_2, соответственно, выполнены свойства МПС A)–D). Тогда при выполнении условий: 1) $a'_{ij} = a_{ij}$, для $i, j < g$; 2) $\left(a'_{ij}\right)^g > 1$ $\left(\left(a'_{ij}\right)^g < 1\right)$ бинарные отношения (предпочтения) $z_i \succ z_j$ $(z_i \prec z_j)$, $z_i, z_j \in \Theta_1 \subset \Theta_2$, $i \neq j$, индуцированные на множествах Θ_1 и Θ_2 посредством применения стандартной процедуры метода анализа иерархий, совпадают.*

Теорема 3. *Пусть заданы множества (наборы, тесты) альтернатив Θ_1 и Θ_2, $\Theta_1 \subset \Theta_2$. Бинарные отношения (предпочтения) $z_i\rho_1 z_j$, $z_i\rho_2 z_j$, $z_i, z_j \in \Theta_1 \subset \Theta_2$, $i \neq j$, индуцированные посредством применения классической процедуры МАИ на множестве Θ_1 и модифицированной процедуры ММАИ на множестве Θ_2, совпадают.*

Из вышеприведенной процедуры следует, что функция, на основе которой принимается решение в ММАИ (назовем ее функцией относительного сходства i-й альтернативы по всей совокупности альтернатив и критериев) имеет вид:

$$F(i) = g^{-1}\sum_{j=1}^{g} w_{ij}(i) \left(F(i) = \left[\prod_{j=1}^{g} w_{ij}(i)\right]^{1/g} \right), \text{ где}$$

$$w_{ij}(i) = \sum_{s=1}^{\nu} c_s w_{ij}^s(i) = \sum_{s=1}^{\nu} c_s \frac{w_i^s}{w_i^s + w_j^s},$$
$$w_i^s = \left(\prod_{l=1}^{g} a_{il}^s\right)^{1/g} \left[\sum_{k=1}^{g} \left(\prod_{l=1}^{g} a_{kl}^s\right)^{1/g}\right]^{-1},$$

величины $a_{kl}^s = w_k^s / w_l^s$ — элементы МПС по s-му критерию МАИ.

Сформулируем достаточное условие парето-оптимальности функции относительного сходства в терминах множества выбираемых решений-альтернатив X и множества, оптимального по Парето $P_f(X)$.

Теорема 4. *Для парето-оптимальности точки x' необходимо и достаточно, чтобы функция относительного сходства $F(x)$ достигала в точке x' максимального значения: $F(x') = \max\limits_{x \in X} F(x)$.*

Доказательства теорем 1–3 опираются на результаты работы [10], свойства МПС A)–D), формулы этапов II–IV ММАИ; доказательство теоремы 4 опирается на исследования [4, 5] и вид функции относительного сходства. Следует также отметить, что свойства МПС 1)–4) являются условиями применения МАИ и считаются по умолчанию выполненными. Не выполнение указанных свойств приводит к некорректному использованию МАИ (см. утверждение и работу [5]).

Таким образом, «наилучшее» решение, выбираемое на основе модификации ММАИ с нелинейной сверткой критериев, принадлежит парето-оптимальному множеству и может быть выбрано максимизацией введенной функции относительного сходства.

4. Доказательство теорем 1–3

Доказательство теоремы 1. Не ограничивая общности, рассмотрим в качестве множеств Θ_1 и Θ_2, $\Theta_1 \subset \Theta_2$, следующие: $\Theta_1 = \{z_1, z_2, \ldots, z_{g-1}\}$, $\Theta_2 = \{z_1, z_2, \ldots, z_{g-1}, z_g\}$. Обозначим матрицы парных сравнений (МПС) признаков множества Θ_1 через $A' = \left\|a'_j\right\|_{(g-1)\times(g-1)}$, $\left(a'_{ij} = w'_i / w'_j\right)$, и МПС признаков множества Θ_2,

$A = \|a_{ij}\|_{g\times g}$, $(a_{ij} = w_i/w_j)$, соответственно. В качестве приближения собственных векторов МПС $\mathbf{A}'$, $\mathbf{A}$ в МАИ используют векторы $w' = (w'_1, w'_2, \ldots, w'_{g-1})^T$, $w = (w_1, w_2, \ldots, w_g)^T$, компоненты которого вычисляются как среднее геометрическое по элементам строк, то есть $w'_i = \left(\prod\limits_{l=1}^{g-1} a'_{il}\right)^{1/g-1}$ и $w_i = \left(\prod\limits_{l=1}^{g} a_{il}\right)^{1/g}$, соответственно.

Пусть после применения МАИ оценки альтернатив таковы (ВКА), что $w_i > w_j$, то есть на множестве Θ_1 задано отношение предпочтения $z_i \succ z_j$. Покажем, что это отношение предпочтения $(z_i \succ z_j)$ в общем случае не сохраняется на множестве Θ_2.

Очевидно, что для сохранения отношения $z_i \succ z_j$ на множестве Θ_2 необходимо должно выполняться неравенство: $w_i > w_j$, то есть

$$\prod_{l=1}^{g} a_{il} > \prod_{l=1}^{g} a_{jl}. \tag{1}$$

Заметим, что $\prod\limits_{l=1}^{g} a_{il} = \prod\limits_{l=1}^{g-1} a'_{il} \cdot a_{ig}$, $\prod\limits_{l=1}^{g} a_{jl} = \prod\limits_{l=1}^{g-1} a'_{jl} \cdot a_{jg}$, $i, j < g$, тогда неравенство (1) примет вид: $D'_{i,g-1} \cdot a_{ig} > D'_{j,g-1} \cdot a_{jg}$, $i, j < g$, где $D'_{s,g-1} = \prod\limits_{l=1}^{g-1} a'_{sl}$, $s \in \{i, j\}$. Отсюда следует, что для справедливости отношения (1) должно выполняться неравенство:

$$\frac{a_{ig}}{a_{jg}} > \frac{D'_{j,g-1}}{D'_{i,g-1}}, \quad i, j < g. \tag{2}$$

Далее, следуя технике МАИ, используем свойства МПС A)–D).

Преобразуем выражение (2), осуществив соответствующие замены, применяя свойства B) и C):

$$\frac{a_{ig}}{a_{jg}} = \frac{a_{ij} \cdot a_{ig}}{a_{jg}} = a_{ij} = a'_{ij};$$

$$\frac{D'_{j,g-1}}{D'_{i,g-1}} = \frac{\prod\limits_{l=1}^{g-1} a'_{jl}}{\prod\limits_{l=1}^{g-1} a'_{il}} = \prod_{l=1}^{g-1} \frac{a'_{jl}}{a'_{il}} = \prod_{l=1}^{g-1} \frac{a'_{ji} \cdot a'_{il}}{a'_{il}} = \prod_{l=1}^{g-1} \frac{1}{a'_{ij}} = (a'_{ij})^{1-g}.$$

Таким образом, для справедливости отношений (1) и (2) необходимо должно выполняться неравенство: $a_{ij} > (a_{ij})^{1-g}$, $i, j < g$, или: $(a_{ij})^g > 1$, $i, j < g$, что, очевидно, будет иметь место только в частных случаях. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1. Полагаем для определенности $z_i \succ z_j$, для $z_i, z_j \in \Theta_1$, то есть $w'_i > w'_j$, откуда следует, что при выполнении условий теоремы 2 и свойств МПС A)–D) выполняется неравенство $w_i/w_j > 1$, то есть $w_i > w_j$, и $z_i \succ z_j$, для $z_i, z_j \in \Theta_2$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. При выполнении условия (1) теоремы 2 справедлива полезная формула, связывающая ВКА двух множеств (по каждому критерию): $w_i = {w'}_i^{(g-1)/g} a_{ig}^{1/g}$, $i < g$. Действительно, использование представления компонент весового вектора альтернатив в МАИ как среднего геометрического по строкам МПС приводит к справедливости соотношений:

$$w_i = \left(\prod_{l=1}^{g} a_{il} \right)^{1/g} = \left(\prod_{l=1}^{g-1} a_{il} \right)^{1/g} a_{ig}^{1/g} = \left(\prod_{l=1}^{g-1} a'_{il} \right)^{1/g} a_{ig}^{1/g} = {w'}_i^{(g-1)/g} a_{ig}^{1/g}.$$

Пусть для определенности $z_i \succ z_j$, для $z_i, z_j \in \Theta_1$, то есть $w'_i > w'_j$. Требуется показать, что это отношение предпочтения $z_i \succ z_j$ сохранится на множестве Θ_2 $(i, j < g)$ при оценивании весовых коэффициентов альтернатив по модифицированному МАИ, то есть необходимо должно выполняться неравенство: $w_i > w_j$ $(i, j < g)$.

Предположим сначала выполнение условия (1) теоремы 2. Применяя полученную зависимость, вышеприведенные формулы для ВКА по методу ММАИ, свойства A)–D) МПС, получаем:

$$\begin{aligned} w_i - w_j &= {w'}_i^{(g-1)/g} a_{ig}^{1/g} - {w'}_j^{(g-1)/g} a_{jg}^{1/g} = \\ &= {w'}_i^{(g-1)/g} (a_{ij} a_{jg})^{1/g} - {w'}_j^{(g-1)/g} a_{jg}^{1/g} = \\ &= a_{ig}^{1/g} \left[{w'}_i^{(g-1)/g} a_{ij}^{1/g} - {w'}_j^{(g-1)/g} \right] = \\ &= a_{ig}^{1/g} \left[{w'}_i^{(g-1)/g} {a'}_{ij}^{1/g} - {w'}_j^{(g-1)/g} \right] \geqslant 0. \end{aligned}$$

Справедливость последнего неравенства обеспечивается предположением $a'_{ij} = w'_i/w'_j$ и $w'_i > w'_j$.

В общем случае используются непосредственно формулы для вычисления ВКА по методу ММАИ (этапы II–IV). Осуществляя последовательно несложные, но громоздкие преобразования, можно показать, что и в общем случае $w_i > w_j$.

5. Доказательство теоремы 4

Доказательство теоремы 4. ***Необходимость.*** Следует показать: если x' входит в парето-оптимальное множество, то существует такой вектор $c = \{c_1, \ldots, c_\nu\}$, $\sum\limits_{s=1}^{\nu} c_s = 1$, что выполнено условие $F(x') = \max\limits_{x \in X} F(x)$.

По построению функции относительного сходства следует:

$$F(w(x)) = g^{-1} \sum_{j=1}^{g} w_{xj}(x) = g^{-1} \sum_{j=1}^{g} \sum_{s=1}^{\nu} c_s w_{xj}^s(x) =$$
$$= g^{-1} \sum_{s=1}^{\nu} c_s \sum_{j=1}^{g} w_{xj}^s(x) = g^{-1} \sum_{s=1}^{\nu} c_s \phi_s(w_x^s), \phi_s(w_x^s) =$$
$$= \sum_{j=1}^{g} w_{xj}^s(x), w_{xj}^s(x) = \frac{w_x^s}{w_x^s + w_j^s}.$$

Здесь отображение $w(x) : \ X \to W$, $w(x) = \left(w_x^1, \ldots, w_x^\nu\right)$, $W \subset R$, реализовано классическим МАИ с положительными вещественными компонентами; отображение $\varphi(w) : \ W \to W'$, $\varphi(w) = (\varphi_1(w), \ldots, \varphi_\nu(w))$ реализовано монотонно возрастающим преобразованием $\varphi(\cdot)$ с выше указанными компонентами. Заметим, что значение $\varphi_s(w_x^s)$ представляет собой сумму относительных весовых коэффициентов альтернативы $x \in X$ *относительно всех* альтернатив по совокупности по s-му критерию. В силу монотонности $\varphi(\cdot)$ $\exists w'^s \in X$: $\varphi_s(w'^s) = \max\limits_{w^s \in W} \varphi_s(w^s)$. Тогда за счет выбора весовых коэффициентов критериев любое выбираемое решение $x \in X$ может быть получено в результате максимизации функции относительного сходства $F(w(x)) = g^{-1} \sum\limits_{s=1}^{\nu} c_s \phi_s(w_x^s)$.

Достаточность. Следует показать, что при выполнении условия $F(x') = \max\limits_{x \in X} F(x)$ точка x' входит в парето-оптимальное множество. Доказательство этого факта будет непосредственно следовать из [4, 5], если будет доказан факт истинности аксиом выбора 1–3 для новых критериальных функций $\varphi_s(x) = \sum\limits_{j=1}^{g} \frac{f'_s(x)}{f'_s(x)+f'_s(j)}$, линейная свертка которых образует $F(x)$ (известно, что аналогичный результат для линейной свертки критериев имеет место при выполнении всех трех аксиом «разумного» выбора; при нарушении выполнения хотя бы одной из аксиом 1–3 этот результат может не иметь места):

$$F(x) = g^{-1} \sum_{s=1}^{\nu} c_s \varphi_s(x),$$

$$\varphi_s(x) = \sum_{j=1}^{g} w^s_{xj}(x) = \sum_{j=1}^{g} \frac{w^s_x}{w^s_x + w^s_j} = \sum_{j=1}^{g} \frac{f'_s(x)}{f'_s(x) + f'_s(j)},$$

где функция $\varphi_s(x)$ является нелинейной суперпозицией исходных $f'_s(x) = w^s_x$ (что содержательно означает переход в другое критериальное пространство).

Истинность трех аксиом «разумного выбора» автоматически следует из факта монотонно возрастающего преобразования $\varphi(\cdot)$ при $f'_s(x) > 0$.

Далее парето-оптимальность точки $x' \in X$ устанавливается от противного [4, 5], в предположении существования точки $x'' \in X$: $f(x'') \geqslant f(x')$, что, согласно определениям многокритериального выбора, эквивалентно покомпонентной записи в виде: $f_l(x'') \geqslant f_l(x')$, для всех $l = \overline{1,\nu}$, при этом, по крайней мере одно из неравенств должно быть строгим. После умножения обеих частей неравенства на постоянные положительные величины $c_1, c_2, \ldots, c_\nu$ $\left(\sum\limits_i c_i = 1\right)$ и сложения, имеет место неравенство, несовместное с предположением теоремы: $F(x'') \geqslant F(x')$. Отсюда следует, что точка $x' \in X$ принадлежит парето-оптимальному множеству ($x' \in P_f(X)$). Теорема 4 доказана.

6. Иллюстративный пример применения ММАИ

Покажем этапы ММАИ на данных 2-го примера.

Этап 1. Пусть МПС альтернатив (признаков) составлена по каждому из двух данных равновесных критериев и посчитаны весовые коэффициенты. Матрицы парных сравнений $\mathbf{B}_I^1$ и $\mathbf{B}_{II}^1$ представлены для удобства в расширенном виде, включая и оценки собственных векторов w_l^j и их нормализованные значения $w_{l\ \text{норм}}^j$ (верхний индекс указывает номер критерия, нижний — номер этапа). Вычисления проведем с точностью до 2-х знаков.

$$\mathbf{B}_I^1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} z_1 & z_2 & z_3 & w_1^1 & w_{1\ \text{норм}}^1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1.00 & 0.50 & 3.00 & 1.15 & 0.30 \\ 2.00 & 1.00 & 6.00 & 2.29 & 0.60 \\ 0.33 & 0.17 & 1.00 & 0.38 & 0.10 \end{array}\right] \end{array};$$

$$\mathbf{B}_I^2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} z_1 & z_2 & z_3 & w_1^2 & w_{1\ \text{норм}}^2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1.00 & 4.00 & 0.50 & 1.26 & 0.31 \\ 0.25 & 1.00 & 0.13 & 0.32 & 0.08 \\ 2.00 & 8.00 & 1.00 & 2.52 & 0.62 \end{array}\right] \end{array}.$$

По 2-м равновесным критериям оценки альтернатив, следуя традиционному МАИ, будут равны: $\mathbf{w}^0 = (0.32, 0.35, 0.33)$. Согласно модифицированному МАИ далее следуют действия.

Этап 2. По двум критериям формируем МПС $\mathbf{B}_{II}^1 = \left\|w_{ij}^1\right\| = \left\|(w_i^1, w_j^1)\right\|$ и $\mathbf{B}_{II}^2 = \left\|w_{ij}^2\right\| = \left\|(w_i^2, w_j^2)\right\|$:

$$\mathbf{B'}_{II}^1 = \left[\begin{array}{ccc} (1.00;\ 1.00) & (0.30;\ 0.60) & (0.30;\ 0.10) \\ (0.60;\ 0.30) & (1.00;\ 1.00) & (0.60;\ 0.10) \\ (0.10;\ 0.30) & (0.10;\ 0.60) & (1.00;\ 1.00) \end{array}\right];$$

$$\mathbf{B'}_{II}^2 = \left[\begin{array}{ccc} (1.00;\ 1.00) & (0.31;\ 0.08) & (0.31;\ 0.62) \\ (0.08;\ 0.31) & (1.00;\ 1.00) & (0.08;\ 0.62) \\ (0.62;\ 0.31) & (0.62;\ 0.08) & (1.00;\ 1.00) \end{array}\right].$$

Далее нормализуем по каждому критерию каждую пару элементов сравнения альтернатив и получаем относительные локальные ВКА (по формулам 2-й строки, 3-го и 4-го столбцов в табл. 1), например: $w_{12}^1 = \left(\frac{0.30}{0.30+0.60}; \frac{0.60}{0.30+0.60}\right) = (0.33; 0.67)$, и оформляем их в матрицы нормализованных локальных ВКА по каждому критерию:

$$\mathbf{B}_{II}^1 = \begin{bmatrix} (0.50;\ 0.50) & (0.33;\ 0.67) & (0.75;\ 0.25) \\ (0.67;\ 0.33) & (0.50;\ 0.50) & (0.86;\ 0.14) \\ (0.25;\ 0.75) & (0.14;\ 0.86) & (0.50;\ 0.50) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B}_{II}^2 = \begin{bmatrix} (0.50;\ 0.50) & (0.80;\ 0.20) & (0.33;\ 0.67) \\ (0.20;\ 0.80) & (0.50;\ 0.50) & (0.11;\ 0.89) \\ (0.67;\ 0.33) & (0.89;\ 0.11) & (0.50;\ 0.50) \end{bmatrix}.$$

Этап 3. Формируем обобщенную матрицу $\mathbf{W} = \|w_{ij}\| = \|(w_{ij}(i), w_{ij}(j))\|$, где векторы $(w_{ij}(i), w_{ij}(j))$ — локальные ВКА z_i, z_j уровня 2 относительно *всей совокупности критериев* сравнения, компоненты которых находим по формулам 4-й строки табл. 1, например,

$$(u_{12}^1; u_{12}^2) = \left(\frac{1}{2}(0.33 + 0.80); \frac{1}{2}(0.67 + 0.20)\right) = (0.57; 0.43).$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} (0.50;\ 0.50) & (0.57;\ 0.43) & (0.54;\ 0.46) \\ (0.43;\ 0.57) & (0.50;\ 0.50) & (0.48;\ 0.52) \\ (0.46;\ 0.54) & (0.52;\ 0.48) & (0.50;\ 0.50) \end{bmatrix}.$$

Этап 4. Глобальные значения ВКА считаем по формуле: $V_i^{(1)} = \sum\limits_{j=1}^{g} w_{ij}$, и затем нормализуем: $V = (0.357; 0.315; 0.328)$.

Таким образом, согласно модифицированной процедуре ВКА первых двух альтернатив будут равны: $0.357; 0.315$, что согласуется с оценками, полученными по 2-м критериям в первоначальном наборе альтернатив.

Продолжая рассмотрение примера 1, получим следующие относительные весовые коэффициенты:

$$\mathbf{B'}_1 = \begin{bmatrix} (7;\ 7) & (7;\ 10) & (7; 5) \\ (10;\ 7) & (10;\ 10) & (10;\ 5) \\ (5;\ 7) & (5;\ 10) & (5;\ 5) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B'}_2 = \begin{bmatrix} (15;\ 15) & (15;\ 10) & (15; 20) \\ (10;\ 15) & (10;\ 10) & (10;\ 20) \\ (20;\ 15) & (20;\ 10) & (20;\ 20) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} (0.50;\ 0.50) & (0.41;\ 0.59) & (0.58;\ 0.42) \\ (0.59;\ 0.41) & (0.50;\ 0.50) & (0.67;\ 0.33) \\ (0.42;\ 0.58) & (0.33;\ 0.67) & (0.50;\ 0.50) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} (0.50;\ 0.50) & (0.60;\ 0.40) & (0.43;\ 0.57) \\ (0.40;\ 0.60) & (0.50;\ 0.50) & (0.33;\ 0.67) \\ (0.57;\ 0.43) & (0.67;\ 0.33) & (0.50;\ 0.50) \end{bmatrix}.$$

Ненормализованные оценки собственных векторов, согласно ММАИ, будут равны: $\mathbf{w}^1 = (0.493, 0.580, 0.411), \mathbf{w}^2 = (0.505, 0.405, 0.575)$, соответственно. Итоговый весовой вектор по равновесным критериям равен: $\mathbf{w} = (0.336, 0.332, 0.332)$, что отвечает верному выбору.

Обсуждаемая модификация известного метода позволяет надеяться, что на основе вышеопределенной функции относительного сходства возможно непротиворечивое упорядочение анализируемых элементов (альтернатив, признаков). Данная модификация метода парных сравнений может служить основой в интеллектуальных системах для оптимального по Парето выбора «наилучшей» пары «метод формирования характеристических признаков — алгоритм распознавания» решением 2-х критериальной задачи, где к частным критериям можно, например, отнести качество распознавания (f_1) и время распознавания (f_2) [12], полученных на контрольной выборке.

7. Решение прикладной задачи на основе ММАИ

В статье [13] представлено использование МАИ для решения задачи выбора оптимального подмножества (ОП) безусловных безызбыточных диагностических тестов (ББДТ) при наличии нескольких критериев и сформулированы направления дальнейших исследований. Решение данной задачи актуально при принятии решений в интеллектуальных системах, основанных на тестовых методах распознавания образов.

При увеличении числа критериев построения ОП ББДТ существенно возрастает трудоемкость алгоритма и возникает необходимость привлечения дополнительной информации о критериях, например, использование оценок их относительной важности. Прежде чем сформулировать задачу, приведем некоторые определения [13].

Признак называется обязательным, если он содержится во всех безызбыточных тестах.

Признак называется псевдообязательным, если он не является обязательным и входит во множество используемых при принятии решений безызбыточных тестов.

Сигнальным признаком 1 рода будем называть минимальные подмножества характеристических признаков, различающие объекты, принадлежащие к 2-м разным образам.

Тестом называется совокупность признаков, различающих любые пары объектов, принадлежащих разным образам (классам).

Пусть $\mathbf{T} = \|t_{ij}\|_{n\times m}$ — бинарная матрица ББДТ, n — количество ББДТ, m — количество характеристических признаков, строкой T_i представлен i-й ББДТ.

Обозначим через $Z = \{z_j \mid j = 1, \dots, m\}$ — множество характеристических признаков, причем $t_{ij} = 1 \leftrightarrow z_j \in T_i$.

Для каждого признака z_j определим весовой коэффициент w_j и коэффициенты стоимости w'_j и ущерба (риска) w''_j и информационный вес w'''_j (например, по одному из методов, приведенных в обзоре работы [8]).

Предполагая признаки независимыми (по предпочтению), определим вес i-го теста: $W_i = \sum\limits_j w_j t_{ij}$. Аналогично определяются значения стоимости и ущерба теста.

Критерии выбора и постановка задачи. Пусть дана матрица тестов T с заданными весами, стоимостью и значениями рисков для признаков.

Необходимо выделить такую подматрицу T_0, содержащую n_0 строк, чтобы соответствующее ей множество тестов N^0 обеспечивало выполнение следующих критериев в порядке их следования:

1) В N^0 должно содержаться максимальное число псевдообязательных признаков.
2) N^0 должно содержать минимальное общее число признаков.
3) N^0 должно содержать минимальное общее число сигнальных признаков 1-го рода для всех пар образов.
4) N^0 должно содержать минимальное общее число подмножеств сигнальных признаков 1-го рода для всех пар образов.

5) N^0 должно иметь максимальный суммарный вес W_0^r.
6) N^0 должно содержать максимальный суммарный информационный вес W_0^g.
7) N^0 должно иметь наименьшую суммарную стоимость.
8) N^0 должно обеспечивать наименьший ущерб (риск).

Изложенная в работе модификация МАИ позволяет проведение корректной скаляризации указанных критериев, число которых является переменным, что способствует повышению качества принимаемого решения.

8. Заключение

В статье рассмотрены свойства модификации метода анализа иерархий, расширяющие возможности классического метода и обосновывающие альтернативный способ применения свертки критериев. Показано, что функция относительного сходства как функция скаляризации критериев, устраняет нежелательные особенности известного метода, приводящие к неточности принятия решения в многокритериальных задачах.

Список литературы

[1] Саати Т. Л. Принятие решений. Метод анализа иерархий. М.: Радио и связь, 1989.

[2] Журавлев Ю. И., Рязанов В. В., Сенько О. В. Распознавание. Математические методы. Программная система. Практические применения. Москва: Фазис, 2006.

[3] Ларичев О. И. Теория и методы принятия решений, а также Хроника событий в Волшебных странах: Учебник. Изд. третье, перераб. и доп. М.: Университетская книга, Логос, 2006.

[4] Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. Н.: Наука, 2007.

[5] Ногин В. Д. Упрощенный вариант метода анализа иерархий на основе нелинейной свертки критериев // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. Т. 44. № 7. С. 1259–1268.

[6] Кудрявцев В. Б., Андреев А. Е. Теория тестового распознавания // Интеллектуальные системы. 2006. Т. 10, вып. 1–4. С. 95–140.

[7] Колесникова С. И., Янковская А. Е. Оценка значимости признаков для тестов в интеллектуальных системах // Известия РАН. Теория и системы управления. 2008. No 6. С. 135–148.

[8] Самохвалов Ю. Я. Особенности применения метода анализа иерархий при оценке проблем по метрическим критериям // Кибернетика и системный анализ. 2004. № 5. С. 15–19.

[9] Самохвалов Ю. Я. Групповой учет относительного превосходства альтернатив в задачах принятия решений // Кибернетика и системный анализ. 2003. № 6. С. 141–145.

[10] Колесникова С. И. Системный подход к оцениванию взаимного влияния признаков в тестовом распознавании // Кибернетика и системный анализ. 2009. № 3. С. 127–135.

[11] Дюкова Е. В., Песков Н. В. Построение распознающих процедур на базе элементарных классификаторов. Режим доступа: http://www.ccas.ru/frc/papers/djukova05construction.pdf.

[12] Колесникова С. И., Букреев В. Г., Мертвецов А. Н., Цой Ю. Р., Лаходынов В. С. Интеллектуальная модель распознавания состояний динамических систем «IReDDS». — Свидетельство об официальной регистрации программы ЭВМ № 2010610441, 11.01.2010.

[13] Колесникова С. И., Янковская А. Е. Выбор оптимального подмножества тестов с применением редукции многокритериального выбора и метода анализа иерархий // Третья Международная конференция «Системный анализ и информационные технологии» САИТ–2009 (14–18 сентября 2009 г., Звенигород, Россия): Труды конференции. М., 2009. С. 278–284.